

BADANIA SYNCHRONIZACJI I SAMOSYNCHRONIZACJI WIBRATORÓW  
MECHANICZNYCH

ZBIGNIEW ENGEL (KRAKÓW)

Wstęp

Wibrotechnika jest działem techniki znajdującym coraz częściej zastosowanie w realizacji różnych procesów technologicznych. Badania nad teoretycznymi rozwiązaniami konstrukcji maszyn wibracyjnych prowadzone są w dwóch kierunkach: w układach otwartych i w układach zamkniętych. Praca urządzeń w układach otwartych polega na przekazywaniu energii z źródła do obiektu z bardzo słabym sprzężeniem zwrotnym lub bez sprzężenia zwrotnego. Druga grupa urządzeń pracuje na zasadzie przekazywania energii ze źródła z silnym sprzężeniem zwrotnym. Zasadę pracy tych urządzeń określa się zwykle jako synchronizację dwóch zjawisk fizycznych.

Maszyny wibracyjne w wielu przypadkach napędzane są nie jednym, lecz kilkoma wibratorami umieszczonymi we wspólnej platformie (belce). W tych przypadkach zachodzi konieczność zapewnienia synchronizacji obrotów między poszczególnymi wibratorami. W większości maszyn wibracyjnych synchronizację obrotów zapewniano za pomocą przekładni kinematycznych (przekładnie zębate, przekładnie pasowe itp.). Poważnym brakiem takich przekładni jest duże zużycie współpracujących elementów a także szumy szkodliwe dla zdrowia.

Niejednokrotnie na drodze doświadczalnej udało się otrzymać zjawisko automatycznego podtrzymywania różnych prędkości kątowych obrotów oddzielnych wibratorów bez jakichkolwiek związków kinematycznych czy elektrycznych między wibratorami. Zachodziła wtedy tzw. samosynchronizacja wibratorów mechanicznych. Praktyczne badania samosynchronizacji napotykały na trudności, ponieważ nie były znane przyczyny oraz warunki, przy których występowało to zjawisko.

Zjawisko samosynchronizacji w przypadku maszyn wibracyjnych jest bardzo korzystne. Niemniej jednak można podać szereg przykładów w technice, gdzie samosynchronizacja daje szkodliwe efekty. Ma to miejsce w przypadku jednolitych maszyn obrotowych z szybkobieżnymi niewyrównoważonymi rotorami, umieszczonych na wspólnym fundamencie. W takich przypadkach współfazowe lub synchroniczne obroty rotorów tych maszyn mogą doprowadzić do znacznych wibracji konstrukcji, a nawet do jej zniszczenia (problem napędu maszyn za pomocą wałów transmisyjnych, napędy maszyn za pomocą takich samych silników elektrycznych).

Organy robocze maszyn wibracyjnych napędzane kilkoma wibratorami mogą być przedstawione za pomocą platformy o jednym stopniu swobody. Takie maszyny mają ograniczone zastosowanie. Częściej spotyka się maszyny, których organ roboczy wykonuje ruch płaski, tzn. ma trzy stopnie swobody. Do tego rodzaju maszyn zaliczyć należy niektóre wibro płaszczyzny, wibromłyny, wibropogrążacze, a także maszyny służące do rozdzielania materiałów. W maszynach tego typu rotory niewyważone spełniają nie tylko rolę wibratora, lecz także służą jako organy robocze tych maszyn.

Zagadnienie synchronizacji układów zaobserwowano już dawno zarówno w technice jak i w pewnych obiektach przyrody. Zjawisko synchronizacji układów zachodzi w układach elektrycznych, w generatorach lampowych, przy wzajemnej pracy wibratorów mechanicznych, w zegarach wahadłowych, w instrumentach muzycznych oraz w niektórych układach biologicznych.

Synchronizacja układów mechanicznych polega na tym, że kilka urządzeń przy braku wzajemnych związków kinematycznych i elektrycznych przy nałożeniu pewnych warunków zaczyna się poruszać lub drgać z podobnymi prędkościami kątowymi lub częstościami. Zjawisko synchronizacji zaobserwował już HUYGHENS w XVII wieku podczas pracy pary zegarów wahadłowych umieszczonych na wspólnej ścianie. W XIX wieku RAYLEIGH badał zjawisko synchronizacji w układach akustycznych i elektroakustycznych. W przypadku obserwacji dwóch rur organowych stwierdził, że przy dostatecznie małym rozstrojeniu rury dźwięczą zgodnie, tj. zachodzi wzajemna synchronizacja dwóch samowzbudnych układów. Analogiczne zjawisko zaobserwował Rayleigh w przypadku dwóch kamertonów z elektro-magnetycznym wymuszeniem. Z początkiem XX wieku zjawisko synchronizacji zaobserwowano w pewnych układach elektrycznych i elektro-mechanicznych. Mamy tu na myśli synchronizację pracy generatorów lampowych.

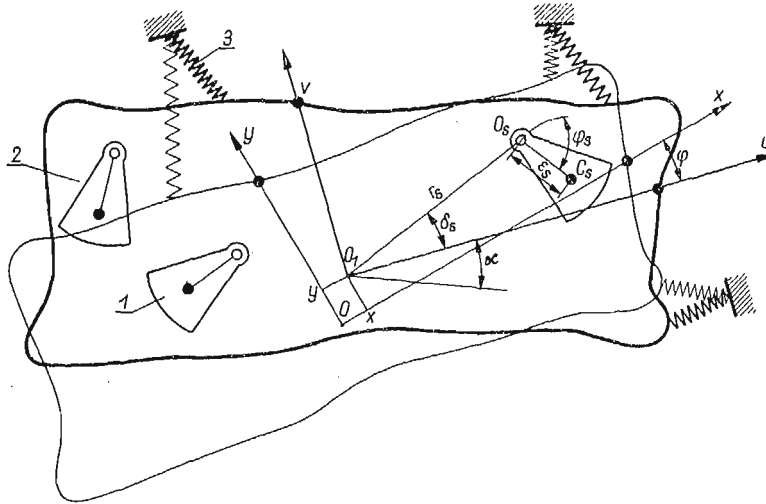
Po drugiej wojnie światowej w Związku Radzieckim zaobserwowano samosynchronizację wibratorów bezwładnościowych umieszczonych na platformie. Okazało się, że wibratory takie napędzane silnikiem asynchronicznym przy braku jakichkolwiek przekładni kinematycznych czy elektrycznych przy odpowiednich warunkach pracują synchronicznie. Zjawiskami synchronizacji oraz samosynchronizacji układów mechanicznych zajmuje się w Związku Radzieckim I. I. BLECHMAN, R. F. NAGAJEW, B. P. ŁAWROW, K. M. RAGULSKI oraz inni.

Niedawno zmarły uczone amerykański Norbert WIENER zaobserwował zjawisko synchronizacji w układach biologicznych. Stwierdził on m. in., że zjawisko synchronizacji leży u podstaw powstawania tzw. «alfa-rytmów» w mózgu.

O ważności zjawisk synchronizacji i samosynchronizacji świadczyć może zorganizowanie w październiku 1965 r. w Kownie specjalnego sympozjum poświęconego tym zagadnieniom. Na sympozjum wygłoszono dużą liczbę referatów, których tematykę można podzielić na dwie grupy zagadnień. Pierwsza grupa poświęcona była problemom synchronizacji i zastosowań zjawisk samosynchronizacji w maszynach wibracyjnych. Druga grupa poświęcona była zagadnieniom samosynchronizacji w różnych układach mechanicznych. Uczestnicy sympozjum wybrali komisję, która uporządkować ma terminologię synchronizacji i samosynchronizacji. Postanowiono również zwoływać podobne sympozja co dwa lata.

1. Samosynchronizacja wibratorów umieszczonych na belce o trzech stopniach swobody

Na rysunku 1 przedstawiony jest schemat belki na której umieszczone są wibratory bezwładnościowe, wymuszające drgania układu. Zakładamy, że belka ma trzy stopnie swobody. Belka z umieszczonymi na niej wibratorami związana jest z nieruchomym



Rys. 1

podłożem za pomocą elementów sprężystych. Na belce umieszczono  $k$  wibratorów bezwładnościowych o różnych parametrach. Wibratory napędzane są za pomocą silników elektrycznych umieszczonych na belce lub poza nią.

Równania różniczkowe ruchu układu przedstawionego na rys. 1 mają postać [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\varphi_s - \varphi) &= m_s \varepsilon_s [(\ddot{x} \sin \varphi_s + \ddot{y} \cos \varphi_s) - \ddot{\varphi} r_s \cos (\varphi_s + \delta_s) + g \cos (\varphi_s - \kappa)] + \\
 &+ L_s (\varphi_s - q_s \dot{\varphi}), \quad s = 1, 2, \dots, k, \\
 M \ddot{x} + k_x \dot{x} + c_x x + c_{x\varphi} \dot{\varphi} &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) \\
 M \ddot{y} + k_y \dot{y} + c_y y + c_{y\varphi} \dot{\varphi} &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s), \\
 I \ddot{\varphi} + k_\varphi \dot{\varphi} - \sum_{s=1}^k k_s (\varphi_s - \varphi) + c_\varphi \dot{\varphi} + c_{x\varphi} \dot{x} + c_{y\varphi} \dot{y} &= \\
 &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s r_s [\dot{\varphi}_s^2 \sin (\varphi_s + \delta_s) - \ddot{\varphi}_s \cos (\varphi_s + \delta_s)] - \sum_{s=1}^k q_s L_s (\varphi_s - q_s \dot{\varphi}).
 \end{aligned}$$

Pierwsze  $k$  z tych równań opisują ruch  $k$  wibratorów umieszczonych na belce, natomiast ostatnie trzy są równaniami drgań belki w pobliżu położenia równowagi.

W równaniach (1.1) przyjęto oznaczenia:

$x, y$	współrzędne środka masy belki w nieruchomym układzie osi odniesienia,
$\varphi$	kąt obrotu belki w płaszczyźnie $Oxy$ ,
$\varphi_s$	kąt obrotu $s$ -go wibratora,
$M$	masa całego układu,
$I$	moment bezwładności układu zredukowany na oś przechodzącą przez środek ciężkości układu,
$\varkappa$	kąt zawarty między osią $x$ a poziomem,
$C_x, C_y, C_\varphi, C_{x\varphi}, C_{y\varphi}$	współczynniki sztywności sprężystych połączeń,
$m_s$	masa $s$ -go wibratora,
$\varepsilon_s$	odległość środka ciężkości $s$ -go wibratora od osi obrotu,
$I_s$	moment bezwładności $s$ -go wibratora względem jego osi obrotu,
$r_s, \delta_s$	współrzędne biegunowe,
$L_s$	moment obrotowy silnika zredukowany na wał $s$ -tego wibratora.

Dla uproszczenia założono, że  $L_s$  zależy jedynie od prędkości kątowej. Dlatego przyjęto  $L_s$  jako funkcję  $\dot{\varphi}_s - q_s \dot{\varphi} = \sigma_s \omega_0$  w pewnym małym otoczeniu ( $q_s = 1$ , gdy silnik umieszczony jest na belce lub  $q_s = 0$ , gdy silnik leży poza belką).

Układ (1.1) jest układem nieliniowym, dlatego rozwiązanie ogólne układu  $k+3$  połączonych równań jest niemożliwe. Zresztą nie jest to konieczne przy badaniu synchronizacji układu.

Zadanie samosynchronizacji można sformułować jako podanie warunków istnienia i stateczności rozwiązań równań (1.1) w postaci:

$$(1.2) \quad \varphi_s = \sigma_s[\omega t + \psi_s(\omega t)], \quad x = x(\omega t), \quad y = y(\omega t), \quad \varphi = \varphi(\omega t),$$

gdzie  $x, y, \varphi$  oznaczają okresowe funkcje czasu o okresie  $2\pi/\omega$ ,  $\sigma_s = \pm 1$  w zależności od kierunku obrotów wibratora. Rozwiązaniu (1.2) odpowiada synchroniczny ruch wibratorów, tj. ruch z równą co do bezwzględnej wartości średniej prędkości kątowej  $|\dot{\varphi}_{sr}| = \omega$ .

Prędkość  $\omega$  nie jest wcześniej znana i należy ją wyznaczyć. Jeżeli przejdziemy od układu równań (1.1), uwzględniając wyrażenia (1.2), od nie znanych  $\varphi_s$  do nie znanych  $\psi_s$ , to zadanie sprowadza się do podania warunków istnienia i stateczności okresowych rozwiązań przekształconego układu równań. W celu podania tych warunków posłużono się metodami A. POINCARÉGO i A. M. LAPUNOWA.

W pracy [3] podano następujące twierdzenie: *aby istniała możliwość ruchów, przy których  $k$  mechanicznych wibratorów umieszczonych na drgającej belce obracających się z jednakową co do bezwzględnej wartości średnią prędkością kątową, konieczne jest, aby  $k$  przestępnych równań*

$$(1.3) \quad 2M[\sigma_r L_r(\sigma_r \omega_s) - k_r \omega_0] = m_r \varepsilon_r \omega_0^2 \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s$$

$$[P_{rs} \sin(\alpha_r - \alpha_s) + Q_{rs} \cos(\alpha_r - \alpha_s)], \quad r = 1, 2, \dots, k$$

gdzie

$$P_{rs} = P_{sr} = a_{xx} + \sigma_r \sigma_s a_{yy} + a_{x\varphi}(\varrho_r \sin \delta_r + \varrho_s \sin \delta_s) - a_{y\varphi} \sigma_r \sigma_s (\varrho_r \cos \delta_r + \varrho_s \cos \delta_s) +$$

$$+ \sigma_r \sigma_s \varrho_r \varrho_s e a_{\varphi\varphi} \cos(\sigma_r \delta_r - \sigma_s \delta_s),$$

$$Q_{rs} = -Q_{sr} = (\sigma_r \sigma_s) a_{xy} + a_{x\varphi}(\sigma_s \varrho_s \cos \delta_s - \sigma_y \varrho_r \cos \delta_r) + a_{y\varphi}(\sigma_r \varrho_s \sin \delta_s - \sigma_s \varrho_r \sin \delta_r) +$$

$$+ \sigma_r \sigma_s \varrho_r \varrho_s e a_{\varphi\varphi} \sin(\sigma_r \delta_r - \sigma_s \delta_s),$$

$$\begin{aligned}
 a_{xx} &= \frac{\partial(\ln D)}{\partial(\lambda_x^2)}, & a_{yy} &= \frac{\partial(\ln D)}{\partial(\lambda_y^2)}, & a_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial(\ln D)}{\partial(\lambda_\varphi^2)}; \\
 a_{x\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln D)}{\partial q_{x\varphi}}, & a_{y\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln D)}{\partial q_{y\varphi}}, & a_{xy} &= \frac{e q_{x\varphi} q_{y\varphi}}{D}; \\
 D &= (\lambda_x^2 - 1)(\lambda_y^2 - 1)(\lambda_\varphi^2 - 1) - e q_{y\varphi}^2 (\lambda_x^2 - 1) - e q_{x\varphi}^2 (\lambda_y^2 - 1); \\
 \lambda_x^2 &= \frac{c_x}{M\omega_0^2}, & \lambda_y^2 &= \frac{c_y}{M\omega_0^2}, & \lambda_\varphi^2 &= \frac{c_\varphi}{I\omega_0^2}; \\
 q_{x\varphi} &= \frac{c_{x\varphi}}{MH\omega_0^2}, & q_{y\varphi} &= \frac{c_{y\varphi}}{MH\omega_0^2}; \\
 Q_s &= \frac{r_s}{H}, & e &= \frac{MH}{I}
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

dopuszczano rozwiązania rzeczywiste odnośnie niewiadomych  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , określonych z dokładnością do stałej addytywnej. Każdemu takiemu rozwiązaniu odpowiada jedynie jeden asymptotycznie stateczny ruch typu (1.2), jeżeli dla tego rozwiązania wszystkie pierwiastki algebraicznego równania  $k - 1$  stopnia

$$\begin{vmatrix}
 b_{11} - b_{k1} - \varkappa & b_{12} - b_{k2} & \dots & b_{1,k-1} - b_{k,k-1} \\
 b_{21} - b_{k1} & b_{22} - b_{k2} - \varkappa & \dots & b_{2,k-1} - b_{k,k-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b_{k-1,1} - b_{k1} & b_{k-1,2} - b_{k2} & \dots & b_{k-1,k-1} - b_{k,k-1} - \varkappa
 \end{vmatrix} = 0,
 \tag{1.5}$$

gdzie

$$b_{r,j} = \begin{cases} \frac{-m_r \varepsilon_r}{k_r + k_r^*} \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s [P_{rs} \cos(\alpha_r - \alpha_s) - Q_{rs} \sin(\alpha_r - \alpha_s)], & r = j, \\ \frac{m_r \varepsilon_r}{k_r + k_r^*} m_j \varepsilon_j [P_{rj} \cos(\alpha_r - \alpha_j) - Q_{rj} \sin(\alpha_r - \alpha_j)], & r \neq j \end{cases}
 \tag{1.6}$$

$$k_r^* = - \left[ \frac{dL_s}{d(\dot{\varphi}_s - q_s \dot{\varphi})} \right]_{\delta_s \omega} > 0$$

mają ujemne rzeczywiste części. Jeżeli rzeczywista część choć jednego z pierwiastków  $\varkappa$  była dodatnia, to ruch będzie niestateczny.

Z równań (1.3) znaleziono w pierwszym przybliżeniu, takie  $\omega_0$ , które jest równe ilorazowi średniej arytmetycznej wartości momentu  $\sigma_s L_s(\sigma_s, \omega_0)$  przez średnie arytmetyczne wartości współczynników  $k_r$ . Jest ono równe:

$$\omega_0 = \frac{\sum_{r=1}^k \sigma_r L_r(\sigma_r, \omega_0)}{\sum_{r=1}^k k_r}.
 \tag{1.7}$$

Wszystkie rozważania odnoszą się do przypadku ruchów układu w dali od rezonansu, to znaczy częstość  $\omega_0$  w dostatecznym stopniu różni się od wartości obracających w zero wyrażenie  $D$  w równaniu (1.4). Trzeba podkreślić, że z równań ruchu (1.1) łatwo otrzymać szczególnie przypadek, gdy organ roboczy maszyny wibracyjnej (belka) ma jeden stopień swobody.

W naszym przypadku mamy do czynienia z drganiami układu wymuszonymi przez napędzane wibratory. Otrzymane wyniki można przenieść na maszyny wibracyjne, w których wibratory spełniają rolę organu roboczego, to znaczy służą jako element ścierający, mielący, drobiący itp. W takich przypadkach we wzorach zamiast momentu silnika  $L_s$  należy uwzględnić moment sił oporu.

I. I. BLECHMAN w swoich pracach dotyczących samosynchronizacji, wprowadza do rozważań tak zwaną częstość «parcjalną»  $\omega_s$ , określoną wzorem:

$$(1.8) \quad \omega_s = \frac{\sigma_s L_s(\sigma_s \omega_s)}{k_s}, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Z równań ruchu układu wynika, że prędkości  $\omega_s$  są równe co do bezwzględnej wartości prędkościom kątowym obrotów wibratorów. Na podstawie przeprowadzonej analizy oraz prac [3, 4, 5, 6, 9] można podać następujące wnioski.

Możliwość samosynchronizacji mechanicznych wibratorów zależy przede wszystkim od tego, o ile różnią się między sobą prędkości kątowe poszczególnych wibratorów. Jeżeli wszystkie prędkości są jednakowe i dodatnie, to synchronizacja w większości przypadków istnieje. W przypadku, gdy organ roboczy maszyny ma jeden stopień swobody, to wibratory z jednakowymi dodatnimi prędkościami samosynchronizują się niezależnie od wartości innych parametrów oraz rozłożenia wibratorów na belce.

W pewnych przypadkach, gdy na organie drgającym maszyny wibracyjnej znajduje się kilka wibratorów, można niektóre z nich wyłączyć ze źródła energii (nie napędzać). Okazuje się, że nie napędzane wibratory bez jakichkolwiek związków mechanicznych czy elektrycznych będą obracać się synchronicznie z innymi wibratorami napędzanymi silnikami. Zachodzić będzie tzw. «bezstykowe przesyłanie mocy». Energia potrzebna do pokonania oporów nie napędzanych wibratorów pochodzi od wibratorów napędzanych dzięki drganiom sztywnej belki, na której umieszczone są wibratory. Można przyjąć, że drgający organ maszyny wibracyjnej jest «kanałem» przenoszącym moc. Dzięki temu kanałowi moce doprowadzone do poszczególnych wibratorów rozdzielają się w ten sposób, że zachodzi wyrównywanie prędkości kątowych obrotów poszczególnych wibratorów. Możliwość bezstykowego przesyłania mocy została potwierdzona doświadczalnie.

Możliwość zachodzenia samosynchronizacji obrotów oddzielnych wibratorów mechanicznych zależy od liczby stopni swobody drgającego organu maszyny wibracyjnej, od kierunku obrotów poszczególnych wibratorów oraz w pewnym stopniu od rozłożenia wibratorów a także od stosunku między częstością drgań własnych organu roboczego maszyny wibracyjnej do prędkości  $\omega_0$ . W niektórych przypadkach możliwa jest samosynchronizacja wibratorów obracających się w przeciwnych kierunkach, co w praktyce może być wykorzystane do wytworzenia siły wymuszającej o stałym kierunku.

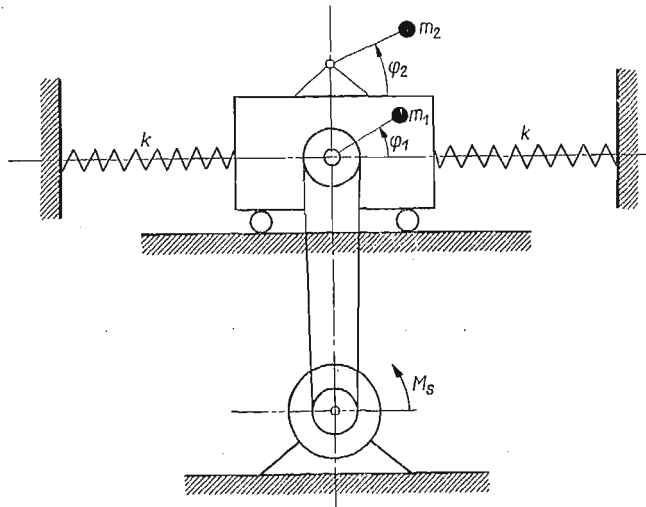
2. Szczególny przypadek układu samosynchronizującego

Zbadamy teraz układ mechaniczny składający się z masy oraz umieszczonych na niej dwóch wibratorów bezwładnościowych (rys. 2). W oparciu o równania Lagrange'a ułożono równania ruchu układu. Równania te mają postać:

$$\begin{aligned}
 & m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 l_1 \ddot{x} + m_1 l_1 g \sin \varphi_1 = M(\dot{\varphi}_1) - H(\varphi_1), \\
 (2.1) \quad & m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} + m_2 l_2 g \sin \varphi_2 = 0, \\
 & m \ddot{x} + \dot{\varphi}_1 m_1 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 m_2 l_2 \cos \varphi_2 - m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + f(x) = -T(\dot{x}),
 \end{aligned}$$

gdzie

- $m = m_0 + m_1 + m_2$ ,
- $\varphi_1$  kąt obrotu wibratora nr 1,
- $\varphi_2$  kąt obrotu wibratora nr 2,
- $l_1, l_2$  mimośrody,
- $M(\dot{\varphi}_1)$  moment obrotowy silnika napędzającego,
- $H(\varphi_1)$  moment oporów,
- $f(x)$  charakterystyka sprężyn,
- $T(\dot{x})$  funkcja uwzględniająca opory układu.



Rys. 2

Oznaczając przez:

$$(2.2) \quad M_s(\dot{\varphi}) = M(\dot{\varphi}_1) - H(\varphi_1)$$

oraz mnożąc pierwsze równanie układu (2.1) przez  $m_2 l_2$ , drugie zaś przez  $-m_1 l_1$ , po dodaniu stronami tych równań otrzymamy przy założeniu, że  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$  (co jest warunkiem synchronizacji)

$$(2.3) \quad \ddot{\varphi} (m_1 m_2 l_1^2 l_2 - m_1 m_2 l_1 l_2^2) = M_s(\dot{\varphi}) \cdot m_2 l_2.$$

Stąd

$$(2.4) \quad M_s(\dot{\varphi}) = m_1 l_1 (l_1 - l_2) \ddot{\varphi}.$$

Przy założeniu, że moment silnika  $M_s$  będzie miał postać

$$(2.5) \quad M_s(\dot{\varphi}) = a - b\dot{\varphi},$$

gdzie  $a, b$  są stałe, wyrażenie (2.3) można napisać w postaci

$$(2.6) \quad m_1 l_1 (l_1 - l_2) \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} - a = 0.$$

Rozwiązanie równania (2.3) otrzymano w postaci

$$(2.7) \quad \varphi = c_1 e^{-\frac{bt}{m_1 l_1 (l_1 - l_2)}} + c_2 t + c_3,$$

gdzie

$$(2.8) \quad c_2 = \frac{a}{b}, \quad c_3 = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2} (l_1 - l_2) m_1 l_1.$$

Wyrażenie  $e^{-\frac{bt}{m_1 l_1 (l_1 - l_2)}}$  zmierza do zera. Można go więc opuścić. Wówczas wyrażenie (2.7) przyjmie postać

$$(2.9) \quad \varphi = c_2 t + c_3.$$

Przy takiej zmienności kąta obrotu wibratora napędzanego zachodzić będzie samosynchronizacja układu.

Wstawiając do trzeciego równania układu (2.1) za

$$\varphi_1 = \varphi_2 = c_2 t + c_3, \quad \dot{\varphi} = c_2, \quad \ddot{\varphi} = 0$$

otrzymamy

$$(2.10) \quad m\ddot{x} + T(\dot{x}) + f(x) = A \sin(c_2 t + c_3),$$

gdzie

$$(2.11) \quad A = c_2^2 (m_1 l_1 + m_2 l_2).$$

Rozwiązanie ostatniego równania zależeć będzie od postaci funkcji  $T(\dot{x})$  i  $f(x)$ . Przy założeniu, że

$$T(\dot{x}) = 2h\dot{x}, \quad f(x) = k^2 x$$

równanie (2.10) będzie równaniem liniowym i będzie miało postać

$$(2.12) \quad m\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = A \sin(c_2 t + c_3).$$

Rozwiązanie równania (2.12) można podać w postaci

$$x(t) = D_1 e^{-s_1 t} + D_2 e^{-s_2 t} + |\lambda| \cos(c_2 t - \alpha),$$

gdzie:

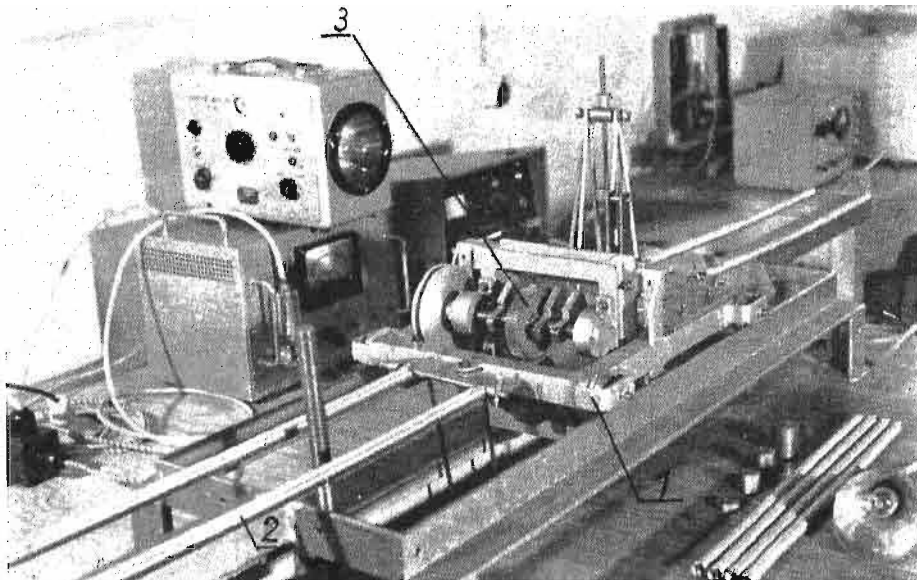
$$|\lambda| = \frac{A}{\sqrt{(-mc_2^2 + k^2) + 4h^2 c_2^2}}.$$

Z analizy omówionego przypadku układu samosynchronizującego wynika, że samosynchronizacja wibratorów mechanicznych zależy od charakterystyki silnika napędzającego wibrator. Według schematu układu pokazanego na rys. 2 zbudowane zostało stanowisko doświadczalne, na którym przeprowadzono badania synchronizacji dwóch wibratorów bezwładnościowych.



### 3. Badania doświadczalne urządzeń samosynchronizujących

W Katedrze Mechaniki Technicznej AGH w Krakowie przeprowadzone zostały badania doświadczalne układów samosynchronizujących na dwóch stanowiskach badawczych. Na rysunku 3 przedstawione jest stanowisko I. Stanowisko to składa się z wózka



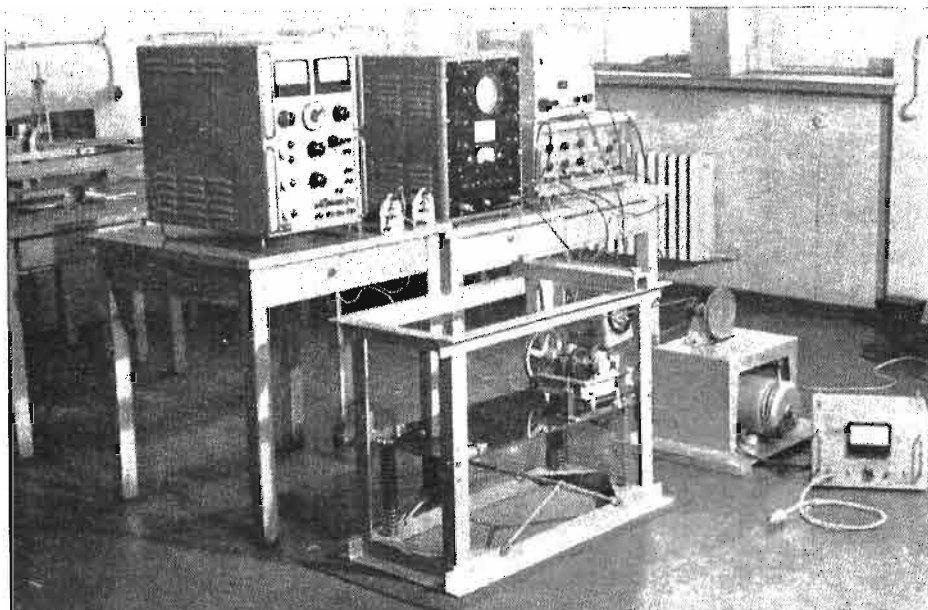
Rys. 3

poruszającego się po specjalnych szynach. Ruch drgający wózka ograniczony jest sprężynami 2, przy czym liczba sprężyn może być zmieniana. Liczba sprężyn wpływa na wartość amplitudy drgań wózka. Na wózku znajduje się wibrator bezwładnościowy 3, wymuszający drgania układu. Wibrator ten jest napędzany silnikiem elektrycznym o ciągłej regulacji obrotów. Oprócz wibratora 3 do wózka przymocowane jest wahadło fizyczne spełniające rolę drugiego wibratora.

Samosynchronizacja wibratorów polega na utrzymaniu równej ilości obrotów obu wibratorów: wibratora napędzanego silnikiem elektrycznym i wibratora obracającego się wskutek drgań układu. Zmiana obrotów wibratora napędzanego silnikiem elektrycznym w pewnych granicach powoduje zmianę obrotów wibratora drugiego, zachodzi wówczas pełna samosynchronizacja układu. Doświadczenia wykazały, że synchroniczne obroty obu wibratorów utrzymują się w granicach 500–700 obr/min. Na stanowisku tym w celu uzyskania synchronicznych obrotów wibratorów, trzeba było rozruszać wibrator do obrotów wibratora napędzanego silnikiem elektrycznym. Wstępne badania wykazały, że moc przenoszona za pomocą przekładni bezstykowej na tym stanowisku jest rzędu 0,1 KM. Moc mierzona była za pomocą specjalnego hamulca założonego na oś wibratora.

Na rysunku 4 pokazany jest widok stanowiska II. Stanowisko to składa się ze sztywnej płyty na której znajdują się wibratory. Jeden z wibratorów napędzany był silnikiem elektrycznym z ciągłą regulacją obrotów. Drugi wibrator nie był napędzany i nie miał żadnych przekładni kinematycznych ani elektrycznych z napędzanym wibratorem. Płyta zamoco-

wana była sprężyste do sztywnej ramy. Na stanowisku tym przeprowadzono cały szereg badań zmieniając parametry układu: a) liczbę sprężyn, b) rodzaj zawieszenia belki, c) rozstaw między osiami wibratorów.



Rys. 4

Liczby obrotów silnika oraz wibratorów mierzone były stroboskopem błyskowym, bezstykowym licznikiem obrotów oraz tachometrem. Na płycie zamocowany był wibrograf Geigera. Za pomocą tego wibrografu rejestrowano drgania płyty. Drgania płyty rejestrowane były także za pomocą tastografu. Przeprowadzone doświadczenia wykazały, że wzbudzenie obrotów wibratora nie napędzanego silnikiem następowało w każdym przypadku przy około 300 obr/min wibratora napędzanego silnikiem (następował wtedy rezonans układu). Wskutek drgań belki następowały synchroniczne obroty obu wibratorów. Badania wykazały, że obroty obu wibratorów były równe co do bezwzględnej wartości i współfazowe. Synchroniczne obroty utrzymywały się nie tylko przy prędkości kątowej odpowiadającej 300 obr/min, lecz także przy zwiększaniu liczby obrotów wibratora napędzanego do 380 obr/min. Przy około 380 obr/min wibratory wypadały z synchronizacji. Także przy zmniejszaniu liczby obrotów do 250 obr/min zachodziła pełna samosynchronizacja obrotów wibratorów.

Na podstawie przeprowadzonych doświadczeń można wysunąć wniosek, że w celu wzbudzenia obrotów wibratora nie napędzanego silnikiem elektrycznym, nie mającego żadnych przekładni kinematycznych oraz elektrycznych z napędzanym wibratorem trzeba doprowadzić do rezonansu belkę, na której umieszczone są obydwaj wibratory. Gdy częstość drgań własnych układu pokryje się z częstością siły wymuszającej, następuje wzbudzenie obrotów wibratora nie napędzanego. Zmiana odległości między osiami wibratorów w zasadzie nie wpływała na zjawisko samosynchronizacji, natomiast powodo-

wała zmianę amplitudy drgań belki. Istotny wpływ na zjawisko samosynchronizacji miało sprężyste zawieszenie belki drgającej.

Badania przeprowadzone na obu stanowiskach badawczych były badaniami wstępnymi i miały na celu wykazanie możliwości występowania zjawiska synchronizacji obrotów wibratorów mechanicznych umieszczonych na wspólnej podstawie, a także potwierdzenie możliwości bezstykowego przesyłania mocy. Celowe jest dalsze prowadzenie badań w tym kierunku.

#### Literatura cytowana w tekście

1. И. И. БЛЕХМАН, *Синхронизация механических вибраторов*, Инж. Сборник, **16** (1953).
2. И. И. БЛЕХМАН, *О самосинхронизации механических вибраторов*, Изв. АН СССР, **6**, 1958.
3. И. И. БЛЕХМАН, *Теория самосинхронизации механических вибраторов и некоторые ее приложения*, Труды ВЦ по осн. пробл. ТММ, 1960.
4. И. И. БЛЕХМАН, *Проблема синхронизации динамических систем*, Прикл. Мат. Мех., **2**, **28** (1964).
5. W. BOGUSZ, Z. ENGEL, *Możliwości bezstykowego przesyłania mocy*, Przegląd Naukowo-Techniczny AGH (w druku).
7. W. BOGUSZ, Z. ENGEL, *Badania urządzenia mechanicznego do bezstykowego przesyłania mocy*, Informacja naukowo-techniczna, HPR 20 (1965).
6. W. BOGUSZ, Z. ENGEL, *Badania doświadczalne urządzeń samosynchronizujących*, Przegląd Mechaniczny, **8**, 1965.
8. Z. ENGEL, *O pewnym układzie samosynchronizującym*, Materiały IV Konferencji Dynamiki Maszyn, Kraków 1965.
9. Z. ENGEL, *Pewne zagadnienia techniki wibracyjnej*, Rozprawy AGH nr 70, 1966.
10. В. П. ЛАВРОВ, *Пространственная задача о синхронизации механических вибраторов*, АН СССР ОТН **5**, 1961.
11. Р. Ф. НАГАЕВ, *О внутренней синхронизации почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей*, Прикл. Мат. Мех., **2**, **28** (1964).
12. Р. Ф. НАГАЕВ, *Синхронизация в системе существенно-нелинейных объектов с одной степенью свободы*, Прикл. Мат. Мех., **2**, **29** (1965).
13. R. MIKLAZEWSKI, *On possibility of self synchronization of rotating eccentric vibrators*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych. **4** (1962).

#### Резюме

#### ИССЛЕДОВАНИЕ SYNХРОНИЗАЦИИ И АВТОСИНХРОНИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВИБРАТОРОВ

Вибрационные машины можно приводить в движение несколькими вибраторами. В этом случае требуется синхронизация скоростей вращений всех вибраторов. В статье рассмотрены вопросы синхронизации и автосинхронизации таких механических систем. Описаны основные работы в этой области проводимые прежде всего в СССР, а также Кафедрой Технической Механики Горно-Металлургической Академии в Кракове.

## S u m m a r y

## INVESTIGATIONS OF SYNCHRONIZATION AND SELFSYNCHRONIZATION OF MECHANICAL VIBRATORS

Vibration machines may be driven by some mechanical vibrators. In this case, it is necessary to ensure synchronized rotations of all the vibrators.

Problems of synchronization and self-synchronization of mechanical systems have been presented in the paper. Basic investigations in this field carried out mainly in the Soviet Union have been discussed, also the work done in the Department of Technical Mechanics of the Academy of Mining and Metallurgy.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1967 r.*

---