

NAPRĘŻENIOWY WARUNEK BEZPIECZEŃSTWA W PRZYPADKU NIEKONSERWATYWNYCH  
ZAGADNIENI STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ

ANDRZEJ KOWALSKI (MIELEC), MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Typowym przykładem niekonserwatywnych obciążeń w teorii stateczności sprężystej są obciążenia śledzące o kierunku działania zmiennym w trakcie wyboczenia. Już E. L. NIKOLAI [12] zwrócił uwagę na konieczność stosowania kinetycznego kryterium stateczności w przypadku niektórych problemów tego typu. Klasyczny już dziś przypadek siły śledzącej, działającej na swobodnym końcu pręta jednostronnie utwierdzonego, rozwiązał po raz pierwszy M. BECK [1]; dokładniejsze obliczenia numeryczne podane przez Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKIEGO [6] doprowadziły do wyniku

$$(1.1) \quad P_k = 20,0509 \frac{EJ}{l^2}.$$

Podano również szereg metod przybliżonych obliczenia siły krytycznej przy problemach niekonserwatywnych; sprowadzają się one przede wszystkim do zastąpienia metody energetycznej typu Ritza przez równania Lagrange'a drugiego rodzaju (Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI [5], A. KOWALSKI [7], M. LEVINSON [11]), do stosownej modyfikacji metody ortogonalizacyjnej Galerkinia (W. W. BOŁOTIN [2], H. LEIPHOLZ [8, 9, 10]) lub do przystosowania metody małego parametru (A. GAJEWSKI [4]). Metody te zezwalają na przybliżone obliczenie obciążeń krytycznych dla dość szerokiej klasy ważnych praktycznie problemów niekonserwatywnych.

W tym świetle coraz większego znaczenia nabiera zagadnienie stosowalności wyprowadzonych wzorów w praktyce inżynierskiej. Tak np. śledząca siła krytyczna (1.1) jest około ośmiokrotnie wyższa od siły eulerowskiej dla tego samego pręta (lecz przy ustalonym kierunku działania) i zbliżanie się do niej w zastosowaniach konstrukcyjnych może budzić zrozumiałą niepokój. Wydaje się więc rzeczą niezbędną analiza stanu podkrytycznego i sformułowanie odpowiedniego warunku bezpieczeństwa; najbardziej przekonującą wydaje się przy tym analiza rozkładu naprężeń w trakcie drgań, nawiązująca do kinetycznego kryterium stateczności i wyrażenie warunku bezpieczeństwa przez ograniczenie kresu górnego wartości bezwzględnej naprężenia występującego w trakcie drgań i będącego funkcją miejsca i czasu.

W obecnej pracy przeprowadzimy taką analizę dla pręta jednostronnie utwierdzonego, obciążonego siłą śledzącą. Sformułujemy naprężeniowy warunek bezpieczeństwa przy założeniu sprężystości materiału; nie będziemy poruszali znacznie trudniejszego problemu pojawienia się odkształceń plastycznych.

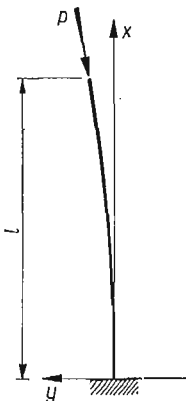
Główna trudność analizy polega na tym, iż mamy do czynienia z układem o nieskończonej liczbie stopni swobody i w związku z tym naprężenia będą w sposób istotny zależały od warunku początkowego ruchu, a więc od rozkładu wychyleń i prędkości w chwili  $t = 0$ . Rozpatrzmy więc tylko dwie pierwsze postacie drgań jako najważniejsze praktycznie, a warunek początkowy damy wtedy przez przyjęcie pewnych wyjściowych ugięć pręta w dwóch punktach na jego osi (przyjmujemy, że takie ugięcia są spowodowane pewnymi czynnikami ubocznymi) oraz przez przyjęcie, iż prędkości początkowe są równe zero.

Rozpatrzmy jedynie drgania swobodne układu nie uwzględniając wpływu tłumienia zarówno na wielkość siły krytycznej, jak i na wielkość naprężeń podczas drgań.

## 2. Analiza drgań przy podkrytycznej sile śledzącej

Obliczenia nasze oprzemy na równaniu różniczkowym drgań poprzecznych pręta ściskanego siłą  $P$  (Rys. 1)

$$(2.1) \quad EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$



Rys. 1

gdzie  $EJ$  oznacza sztywność giętą, a  $m$  — masę jednostki długości pręta. Postać równania (2.1) jest niezależna od zachowania się siły po wyobczeniu; wpływa ono jedynie na warunki brzegowe. W przypadku siły śledzącej warunki te mają postać

$$(2.2) \quad y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l, t) = 0$$

gdzie  $l$  oznacza długość pręta utwierdzonego na końcu  $x = 0$ .

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne

$$(2.3) \quad \xi = x/l, \quad v = y/l,$$

podstawiając do równania (2.1)

$$(2.4) \quad y(x, t) = y(\xi l, t) = lv(\xi)e^{i\Omega t}$$

oraz wprowadzając bezwymiarowe stałe odpowiadające sile ściskającej i częstości drgań

$$(2.5) \quad \beta = P l^2 / EJ, \quad \omega = \Omega l^2 \sqrt{m/EJ},$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach

$$(2.6) \quad \frac{d^4 v}{d\xi^4} + \beta \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \omega^2 v = 0.$$

Całka ogólna równania (2.6) ma postać

$$(2.7) \quad v(\xi) = C_1 \sin r_1 \xi + C_2 \cos r_1 \xi + C_3 \operatorname{sh} r_2 \xi + C_4 \operatorname{ch} r_2 \xi,$$

gdzie

$$(2.8) \quad r_{1,2}^2 = \pm \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2}.$$

Warunki brzegowe (2.2) prowadzą do układu równań

$$(2.9) \quad \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ r_1 C_1 + r_2 C_3 &= 0, \\ C_1(r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2) + C_2(r_1^2 \cos r_1 + r_2^2 \operatorname{ch} r_2) &= 0, \\ -C_1(r_1^3 \cos r_1 + r_1 r_2^2 \operatorname{ch} r_2) + C_2(r_1^3 \sin r_1 - r_2^3 \operatorname{sh} r_2) &= 0, \end{aligned}$$

przy czym w dwóch ostatnich równaniach wyrugowano już  $C_3$  i  $C_4$ . Wyrażając wszystkie stałe przez  $C_1$  możemy napisać krótko

$$(2.10) \quad v(\xi) = C_1 F(\xi),$$

gdzie  $F(\xi)$  jest funkcją nie zawierającą już stałych całkowania,

$$(2.11) \quad F(\xi) = \sin r_1 \xi - \mu \cos r_1 \xi - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{sh} r_2 \xi + \mu \operatorname{ch} r_2 \xi,$$

przy czym przez  $\mu$  oznaczono stałą

$$(2.12) \quad \mu = \frac{\sin r_1 + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{sh} r_2}{\cos r_1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{ch} r_2}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik główny układu równań (2.9) doprowadzamy do równania przestępnego, określającego związek pomiędzy siłą  $\beta$  a częstością drgań  $\omega$ . Wykres funkcji  $\beta = f(\omega)$  można znaleźć w pracy M. BECKA [1] lub monografii W. W. BOŁOTINA [2].

### 3. Rozkład naprężeń wzdłuż osi pręta

Przyjmując założenie jednowymiarowego stanu naprężenia w pręcie, możemy napisać

$$(3.1) \quad \sigma_{\max} = \sigma_{g\max} + \sigma_c = Eh \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P}{F},$$

gdzie  $\sigma_g$  oznacza naprężenie od zginania,  $\sigma_c$  — od ściskania,  $h$  — odległość skrajnego włókna przekroju od osi pręta,  $F$  — powierzchnię przekroju. Wobec faktu, że równanie częstości ma nieskończenie wiele pierwiastków, należałoby do (3.1) zamiast (2.4) podstawić

$$(3.2) \quad y = l \sum_{j=1}^{\infty} v_j(\xi) e^{i\Omega_j t} = l \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j} F_j(\xi) e^{i\Omega_j t}$$

i otrzymalibyśmy wtedy po sprowadzeniu konsekwentnie do postaci bezwymiarowej

$$(3.3) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{h}{l} \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j} F_j''(\xi) e^{i\omega_j t} + \frac{4\beta}{\lambda^2};$$

$\lambda$  oznacza tu smukłość pręta i zgodnie z klasyczną definicją smukłości dla pręta jednostronnie utwierdzonego mamy w naszym przypadku  $\lambda = 2l/i$ , przy czym  $i$  oznacza najmniejszy promień bezwładności przekroju.

Ze wzoru tego wyeliminujemy teraz czynnik czasu zastępując szereg funkcji czasu przez stosowną majorantę.

Wobec  $|\operatorname{Re}(e^{i\omega_j t})| \leq 1$  możemy napisać

$$(3.4) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{h}{l} \sum_{j=1}^{\infty} |C_{1j} F_j''(\xi)| + \frac{4\beta}{\lambda^2}.$$

Stosujemy tu nadal znak równości, a nie nierówności słabej, bowiem stosunki poszczególnych częstości są z reguły niewymierne; mamy więc prawo przypuszczać, że po dostatecznie długim okresie czasu nastąpi moment, w którym wszystkie postacie drgań (a, praktycznie biorąc, znaczna ich liczba) osiągną w danym punkcie  $\xi$  swą wartość amplitudalną z odpowiednim znakiem i wszystkie iloczyny  $C_{1j} F_j''(\xi)$  będą dodatnie.

Do pierwszego składnika wzoru (3.4) można również wprowadzić smukłość pręta  $\lambda$ . Możemy mianowicie napisać

$$(3.5) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{\psi}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} |C_{1j} F_j''(\xi)| + \frac{4\beta}{\lambda^2},$$

gdzie  $\psi = 2h/i$  jest łatwym do obliczenia, bezwymiarowym współczynnikiem kształtu przekroju. Dla przekroju prostokątnego mamy  $\psi = \sqrt{12} = 3,464$ , dla kołowego  $\psi = 4$ , dla pierścieniowego (rurowego) cienkościennego  $\psi = 2\sqrt{2} = 2,828$ .

Naprężenia, określone wzorem (3.5), zależą od danej początkowej linii ugięcia i początkowej prędkości drgań. Dla celów praktycznych zastąpimy teraz układ o nieskończonej liczbie stopni swobody przez układ o możliwie małej ich liczbie. Przyjmijmy mianowicie dwa stopnie swobody, gdyż jeden nie zezwalałby na analizę zjawiska dudnienia — zbliżania się dwóch sąsiednich częstości do siebie.

Zamiast (3.5) napiszemy zatem

$$(3.6) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{\psi}{\lambda} [|C_{11} F_1''(\xi)| + |C_{12} F_2''(\xi)|] + \frac{4\beta}{\lambda^2}.$$

Dla wyznaczenia stałych  $C_{11}$  i  $C_{12}$  musimy założyć początkowe wychylenia pręta w dwóch punktach osi. Jednym z nich powinien być punkt  $\xi = 1$  (swobodny koniec) — bezwymiarowe ugięcie początkowe w tym punkcie oznaczymy przez  $f = \delta/l$ . Drugi punkt oznaczymy przez  $\xi_0$ , a odpowiednie bezwymiarowe ugięcie przedstawimy jako ułamek tamtego, oznaczając je przez  $\kappa f$ . Prędkości początkowe przyjmijmy w obu punktach równe zeru. W takim razie z układu równań

$$(3.7) \quad \begin{aligned} f &= C_{11} F_1(1) + C_{12} F_2(1), \\ \kappa f &= C_{11} F_1(\xi_0) + C_{12} F_2(\xi_0), \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} C_{11} &= \frac{F_2(\xi_0) - \kappa F_2(1)}{F_1(1)F_2(\xi_0) - F_2(1)F_1(\xi_0)} f, \\ C_{12} &= \frac{\kappa F_1(1) - F_1(\xi_0)}{F_1(1)F_2(\xi_0) - F_2(1)F_1(\xi_0)} f. \end{aligned}$$

Funkcja  $F''(\xi)$  jest określona wzorem

$$(3.9) \quad F''(\xi) = -r_1^2 (\sin r_1 \xi - \mu \cos r_1 \xi) + r_2^2 \left( -\frac{r_1}{r_2} \operatorname{sh} r_2 \xi + \mu \operatorname{ch} r_2 \xi \right),$$

przy czym  $F_1$  otrzymujemy przez podstawienie parametrów  $r_1$ ,  $r_2$  i  $\mu$  odpowiadających pierwszej częstości, a  $F_2$  — odpowiadających drugiej częstości drgań pręta.

Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa pręta będzie więc miał postać

$$(3.10) \quad \frac{\psi}{\lambda} \max_{0 \leq \xi \leq 1} [|C_{11} F_1''(\xi)| + |C_{12} F_2''(\xi)|] + \frac{4\beta}{\lambda^2} \leq \frac{k}{E},$$

gdzie  $k$  oznacza stosowne naprężenie dopuszczalne.

#### 4. Wyniki liczbowe

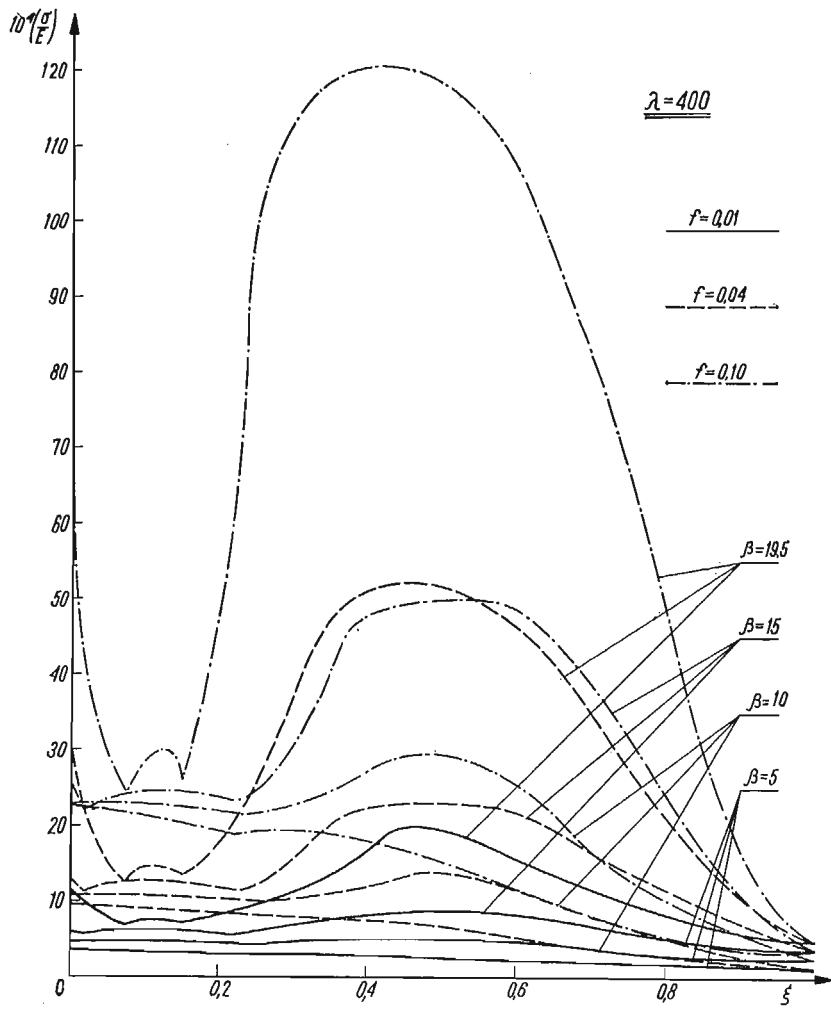
Do obliczeń liczbowych przyjmiemy  $\xi_0 = 0,5$  oraz  $\kappa = 0,3$ ; taki rozkład ugięć początkowych odpowiada mniej więcej ugięciom statycznym pod działaniem siły prostopadłej do osi pręta, a przyłożonej na jego swobodnym końcu. Założono przekrój rurowy cienkościenny przyjmując  $\psi = 2,828$ .

Tablica 1

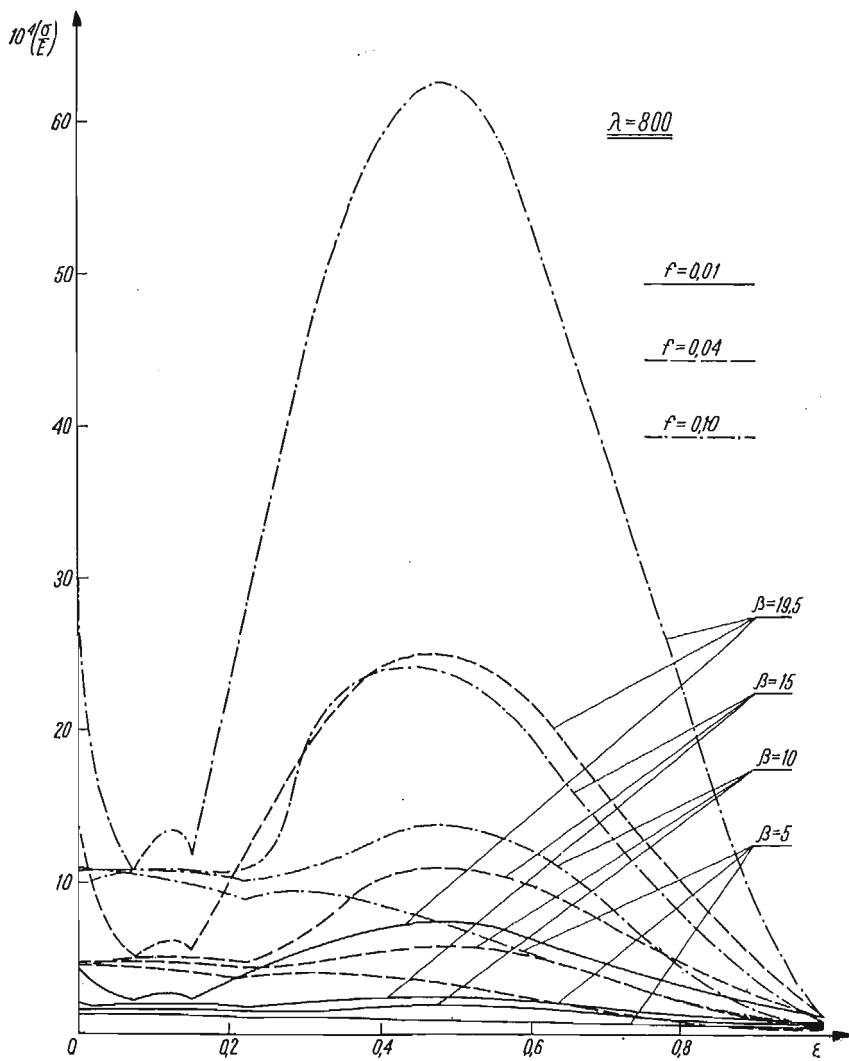
$\beta$	0	5	10	15	19,5
$\omega_1$	3,50	4,10	5,00	6,50	9,50
$\omega_2$	21,75	19,75	17,50	15,00	11,50
$P/P_k$	0	0,25	0,50	0,75	0,975

Korzystając z wykresu M. Becka przyjęto wartości  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , zestawione w tablicy 1. Za pomocą tych danych określono kolejno  $r_1$ ,  $r_2$  i  $\mu$  dla każdej z tych częstości, a dalej funkcje  $F_1(\xi)$  i  $F_2(\xi)$  oraz stałe  $C_{11}$  i  $C_{12}$ . Rozkład naprężeń określonych wzorem (3.6) przedstawiono na wykresach (rys. 2 i 3) odpowiednio dla smukłości pręta  $\lambda = 400$  i  $\lambda = 800$ . Warto zauważyć, że punktem niebezpiecznym nie zawsze jest tu punkt utwierdzenia ( $\xi = 0$ ); częściej nawet kres górny naprężenia osiągnany jest na długości pręta przy  $\xi$  równym około 0,4.

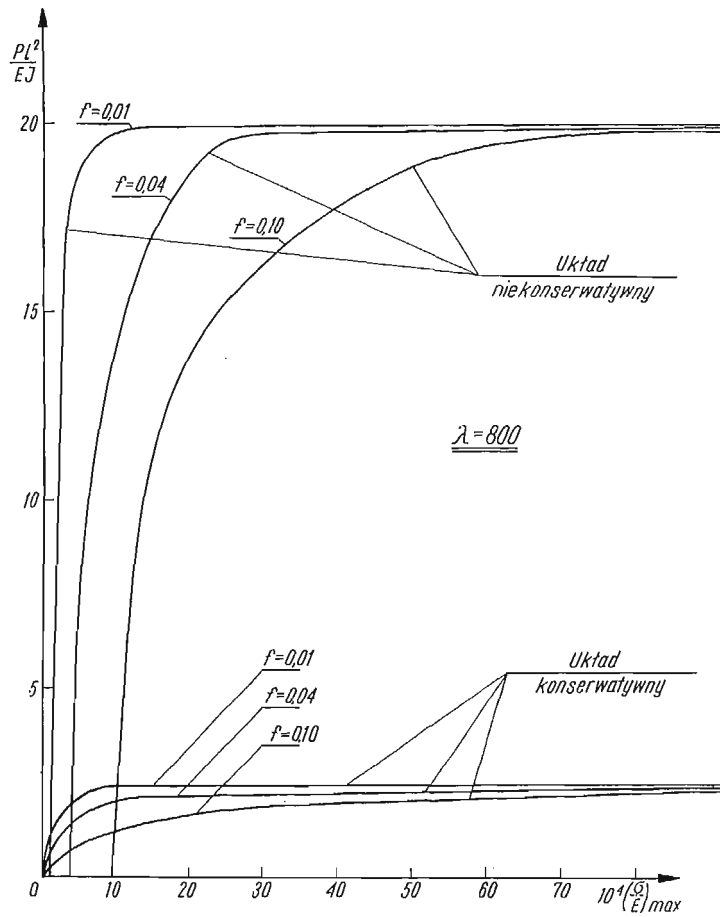
W oparciu o otrzymane wyniki sporządzono wykresy (rys. 4 i 5) dla tych samych smukłości, zależności maksymalnych naprężeń od bezwymiarowej siły  $\beta$  i od danego wychylenia początkowego  $f$ . Dla porównania przytoczono również wykresy naprężeń maksymalnych przy obciążeniu siłą o ustalonym kierunku działania (siłą typu eulerowskiego), działającą na mimośrodkach  $f$  o tych samych wartościach. Wykresy na rys. 6 i 7 przedstawiają wreszcie dla tych samych smukłości naprężeniowe warunki bezpieczeństwa przy różnych danych naprężeniach  $k$  i różnych danych wychyleniach początkowych  $f = \delta/l$ .



Rys. 2

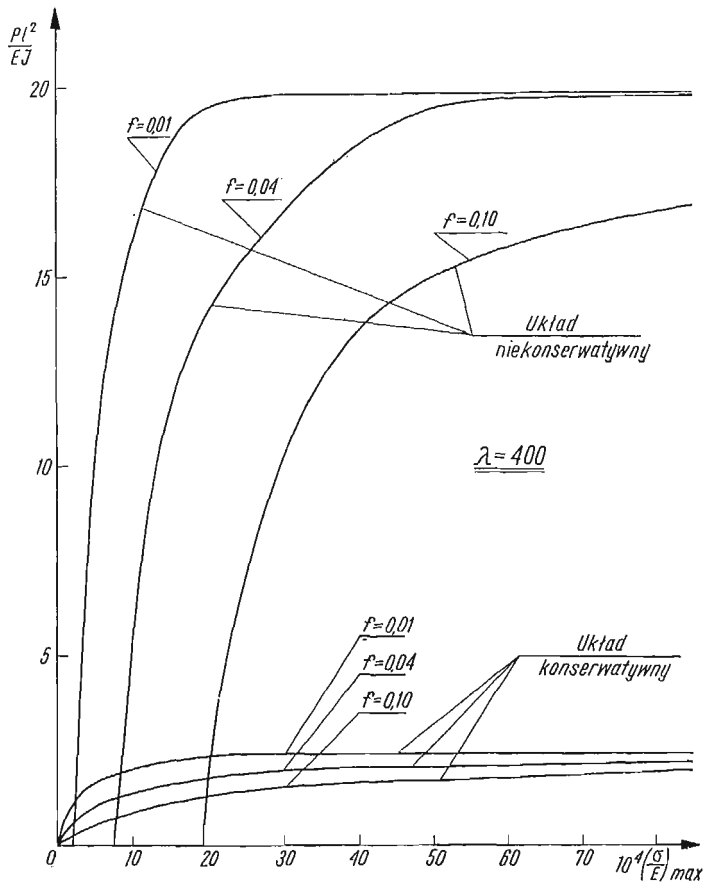


Rys. 3

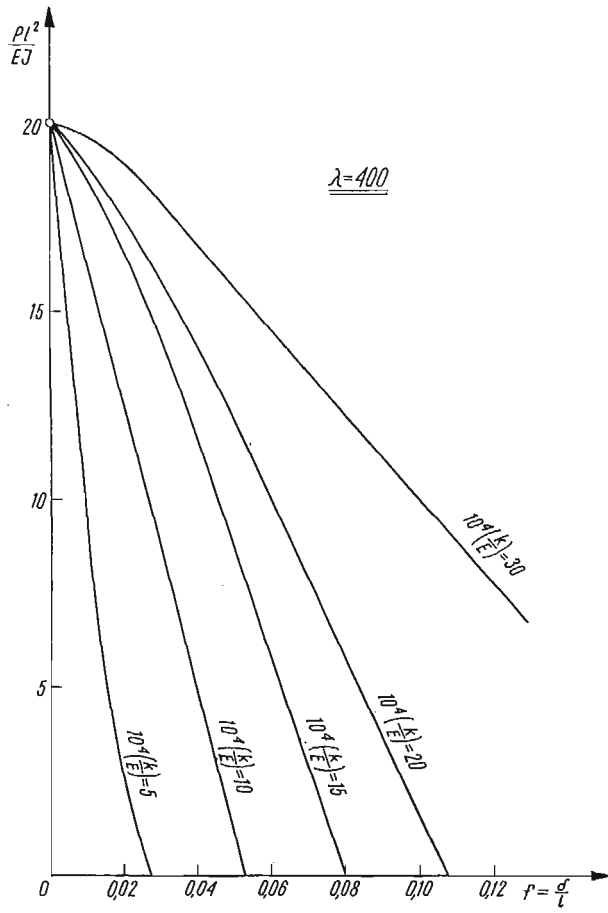


Rys. 4

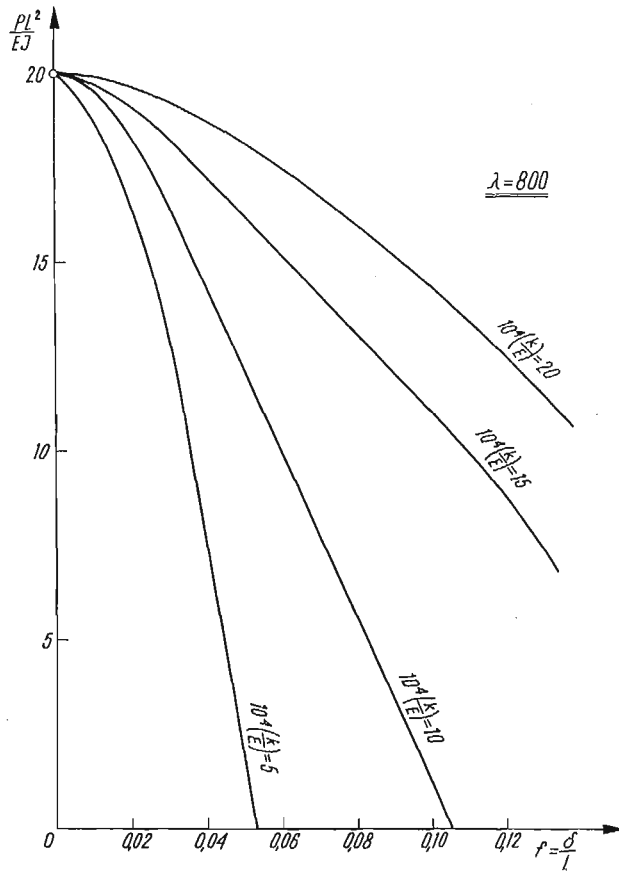




Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

## 5. Wnioski

Z przedstawionych wykresów, a zwłaszcza z porównania z wykresami dla obciążeń o ustalonym kierunku, wynika, iż obciążenia śledzące są w istocie wielokrotnie mniej niebezpieczne dla konstrukcji od obciążeń konserwatywnych. Oczywiście, że dla bardziej wnikliwej oceny niezbędne są badania innych układów i przyjmowanie do równań większej liczby stopni swobody. Stosowanie obciążeń nawet kilkakrotnie większych od klasycznej siły eulerowskiej wydaje się jednak dopuszczalne, o ile mamy pewność, że zdefiniowany w [3 i 6] współczynnik śledzenia  $\eta$  może tylko nieznacznie odbiegać od jedności.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

## Literatura cytowana w tekście

1. M. ВЕСК, *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, Z. angew. Math. Phys., 3, 3 (1952), 225–228.
2. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, Москва 1961.
3. Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, *Об устойчивости стержня при действии следящей силы*, Труды Ленингр. Полит. Института, № 192 (1958), 21–27.
4. A. GAJEWSKI, *Stateczność pewnych niepryzmatycznych i niejednorodnych prętów ściskanych siłą śledzącą*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966), 591–608.
5. Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czasop. Techn., 9, 65 (1960), 1–8.
6. Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI, *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963), 7–31.
7. A. KOWALSKI, *Stateczność prętów o skokowo zmiennym przekroju ściskanych siłą śledzącą*, Rozpr. Inżyn., 15 (1967), 197–209.
8. H. LEIPHOLZ, *Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes*, Z. angew. Math. Phys., 4, 13 (1962), 359–372.
9. H. LEIPHOLZ, *Über die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens bei nichtselbstadjungierten und nichtkonservativen Eigenwertproblemen*, Z. angew. Math. Phys., 1, 14 (1963), 70–79.
10. H. LEIPHOLZ, *Grundzüge einer Stabilitätstheorie für elastische Systeme unter nichtkonservativer Belastung*, Ing.-Archiv, 1, 34 (1965), 56–68.
11. M. LEVINSON, *Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability*, Z. angew. Math. Phys., 3, 17 (1966), 431–442.
12. Е. Л. НИКОЛАИ, *Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня*, Изв. Ленингр. Полит. Инст., 31 (1928).

## Резюме

## УСЛОВИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Критические величины неконсервативных нагрузок превышают как правило, соответствующие критические значения сил в случае существования потенциала. Например, критическая следящая сила для односторонне закрепленного стержня равна примерно восьмикратному значению эйле-

ровой силы для этого стержня. С этой точки зрения все большее значение получает вопрос о применимости в инженерной практике выведенных формул.

В настоящей статье проводится анализ распределения напряжений в процессе колебаний одно-сторонне закрепленного стержня, нагруженного подкритической следящей силой. Используются точные уравнения колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы, однако в вычислениях учтены только прогибы соответствующие двум первым частотам колебаний. Оказывается, что наибольшие напряжения могут появиться либо в закрепленном конце стержня либо в некоторой его точке (локальный максимум). Сформулировано условие безопасности по напряжениям, а также даны графики изображающие это условие при различных отношениях допустимого напряжения  $k$  к модулю Юнга  $E$ . Дано сравнение со случаем когда сила имеет постоянное направление в процессе потери устойчивости. Обнаружено что допустимая величина следящей силы в действительности многократно превышает то значение силы с фиксированным направлением, которому соответствуют допустимые напряжения  $k$ .

## S U M M A R Y

### STRESS CRITERION OF SAFETY FOR NON-CONSERVATIVE PROBLEMS OF ELASTIC STABILITY

The critical values of non-conservative loads are, as a rule, much higher than those resulting from a potential; for instance, the critical tangential (i.e. remaining normal to the end cross-section) force for a cantilever beam exceeds by about eight times the corresponding eulerian force. In this respect, the problem of applicability of these results in engineering practice becomes of primary importance.

In the paper, the analysis of the stress distribution in a vibrating cantilever beam loaded by a subcritical tangential force is given. In general, the exact equation of vibrations of the system with distributed masses is considered, whereas in numerical calculations two leading modes of vibrations are taken into account. It is shown that the maximum stress occurs either at the clamped end of the beam or at a certain intermediate point of the length (local maximum). The stress criterion of safety was formulated and shown graphically for various ratios of admissible stress  $k$  to the Young's modulus  $E$ . The results are compared with the case of conservative compressive forces. It is shown that the admissible force exceeds by many times the corresponding value of a force fixed in direction, provided the admissible stress  $k$  remains the same.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1966 r.*