

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PODŁUŻNA SZYBOWCA W ZESPOLE HOLOWNICZYM

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracach związanych z zagadnieniem holowania szybowców nie rozpatrywano stateczności zespołu holowniczego, tzn. stateczności zespołu składającego się z samolotu holującego na linie szybowiec i szybowca. Rozpatrywano wyłącznie stateczność szybowca traktując samolot jako ciało o nieskończenie wielkiej bezwładności.

W pracy [1] rozpatrywano wpływ liny holowniczej na krytyczną prędkość flatteru. Przyjęto trzy stopnie swobody odkształcalnego szybowca jak również uwzględniono sprężystą wydłużalność liny. Otrzymano układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych liniowych drugiego rzędu, którego rozwiązanie sprowadzało się do znalezienia pierwiastków równania charakterystycznego szóstego stopnia. W pracy nie uwzględniono sił aerodynamicznych działających na linę holowniczą jak również sił i momentów pochodzących od liny holowniczej i działających na szybowiec. Rozważania przeprowadzono dla trzech konkretnych położań szybowca względem samolotu.

Znane prace dotyczące holowania szybowca za samolotem, mianowicie [2, 5, 13 i 17], zostały omówione w pracy [12].

W pracy [12] rozpatrzono przypadek holowania sztywnego szybowca przez samolot o nieskończenie wielkiej masie, lecący poziomo, prostoliniowo, ze stałą prędkością. Rozpatrując stateczność dynamiczną szybowca zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Pozwoliło to na określenie współczynników równania charakterystycznego, zastosowania kryteriów stateczności Routha-Hurwitza oraz obliczenia pierwiastków równania charakterystycznego metodą Bairstowa. W pracy nie uwzględniono dynamiki liny holowniczej jak również zakłóceń wynikających z odchylenia od założonego ruchu samolotu holującego. Na podstawie obliczeń numerycznych zbadano jak wpływa na stateczność szybowca położenie względem samolotu holującego, prędkość holowania, usytuowanie zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca oraz długość i wydłużalność liny holowniczej.

W przypadku samolotu holującego o masie porównywalnej z masą szybowca holowanego występuje wzajemny wpływ ruchów samolotu na szybowiec holowany i odwrotnie. W takim przypadku należy rozpatrzyć stateczność układu: samolot holujący + lina holownicza + szybowiec, co wykonano w niniejszej pracy.

Przedmiotem niniejszej pracy jest przypadek holowania sztywnego szybowca przez sztywny samolot za pośrednictwem ciężkiej, wiotkiej i sprężystej liny holowniczej, obciążonej siłami aerodynamicznymi.

Założono, iż zespół holowniczy znajdował się przed zakłóceniem w poziomym, prostoliniowym, ustalonym locie. Stosując równania Lagrange'a II rodzaju wyprowadzono różniczkowe równania ruchu, które przedstawiono w formie zlinearyzowanej. Otrzymano układ siedmiu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Wprowadzając zakłócenie jako warunki początkowe scałkowano numerycznie otrzymany układ równań metodą Runge-Kutta-Gilla. Otrzymane wyniki wskazały wzajemne oddziaływanie na siebie samolotu i szybowca w czasie holowania, co wyraziło się w niemożności rozprzęgnięcia równań ruchu układu. Rozwiązanie układu równań sprowadzono do zagadnienia znajdowania wartości własnych macierzy niesymetrycznych (dowolnych) czternastego stopnia (w omawianym przypadku).

W oparciu o prace [8, 9 i 14] sprowadzono macierz niesymetryczną do postaci quasi-trójkątnej dolnej, a następnie wyznaczono wartości własne.

Znajomość wartości własnych pozwoliła na określenie zmian częstości oscylacji i tłumienia, jak również na bezpośrednie porównanie z wynikami otrzymanymi w pracy [12] dla zagadnienia uproszczonego.

Na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych dla jednego z szybowców wyczynowych i obecnie stosowanego samolotu holującego zbadano, jak wpływa na stateczność szybowca położenie względem samolotu holującego i prędkości holowania.

Ważniejsze oznaczenia

a, a_s [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej szybowca i samolotu w zależności od kąta natarcia,
a_1, a_{1s} [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej usterzenia poziomego w zależności od kąta natarcia usterzenia dla szybowca i samolotu,
b_1, b_2 [m]	połowa rozpiętości szybowca i samolotu,
C_n, C_t	bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły normalnej i stycznej do liny, określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
C_q	bezwymiarowy współczynnik ciężarowy liny,
C_{x1}, C_{x2}	bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu szybowca i samolotu w locie holowanym,
C_{z1}, C_{z2}	bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły nośnej szybowca i samolotu w locie holowanym,
d [m]	średnica liny holowniczej,
g [m/s ²]	przyśpieszenie ziemskie,
h_{z1}, h_{z2} [m]	współrzędne zaczepu holowniczego szybowca i samolotu, mierzone pionowo względem środka ciężkości,
J_1, J_2 [kg m s ²]	momenty bezwładności względem osi poprzecznych szybowca i samolotu,
k_{z1}, k_{z2} [m]	współrzędne zaczepu holowniczego szybowca i samolotu mierzone poziomo względem środka ciężkości,
l_0, l_1 [m]	długość liny swobodnej i obciążonej,
l_{a1}, l_{a2} [m]	średnia cięciwa aerodynamiczna szybowca i samolotu,
l_{H1}, l_{H2} [m]	odległość osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości dla szybowca i samolotu,
M_{01}, M_{02} [kG m]	aerodynamiczny moment pochylający szybowca i samolotu,

n [kG/m]	siła aerodynamiczna normalna do liny działająca na 1 m długości liny holowniczej,
P_n [kG]	siła ciągu silnika samolotu,
$P_{x1} = X_1$ [kG]	siła oporu aerodynamicznego szybowca i samolotu,
P_{z1}, P_{z2} [kG]	siła aerodynamiczna wyporu (nośna) szybowca i samolotu,
P_{zH1}, P_{zH2} [kG]	siła nośna usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
q [kG/m]	ciężar jednostkowy metra bieżącego liny,
Q_1, Q_2 [kG]	ciężar szybowca i samolotu,
S_1, S_2 [m ²]	powierzchnia nośna skrzydeł szybowca i samolotu,
S_{H1}, S_{H2} [m ²]	powierzchnia nośna usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
S_n [m ²]	powierzchnia zataczana przez śmigło samolotu,
t [s]	czas,
T [kG]	bieżący naciąg liny holowniczej,
T_1, T_2 [kG]	siła pochodząca od liny holowniczej działająca na zaczepie szybowca i samolotu,
V [m/s]	prędkość lotu,
x_n [m]	odległość płaszczyzny śmigła samolotu od środka ciężkości,
x_{s1}, x_{s2} [m]	odległość środka ciężkości od środka aerodynamicznego dla szybowca i samolotu,
z_{H1}, z_{H2} [m]	odległość pionowa osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości dla szybowca i samolotu,
z_n [m]	odległość linii działania siły ciągu śmigła od środka ciężkości samolotu,
z_{s1}, z_{s2} [m]	odległość pionowa środka aerodynamicznego od środka ciężkości dla szybowca i samolotu,
α_1, α_2 [rad]	kąt natarcia szybowca i samolotu,
α_{H1}, α_{H2} [rad]	kąt natarcia usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
$\alpha_{zH1}, \alpha_{zH2}$ [rad]	kąt zaklinowania usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ [rad]	kąt odchylenia strug spływających ze skrzydeł szybowca i samolotu,
φ_1, φ_2 [rad]	kąty nachylenia liny holowniczej w stosunku do linii lotu, mierzone na zaczepach szybowca i samolotu,
φ_n [rad]	kąt nachylenia linii działania siły ciągu śmigła w stosunku do osi samolotu,
λ [1/kG]	współczynnik wydłużalności liny holowniczej,
A_e, A_{eS}	wydłużenie skrzydła szybowca i samolotu,
$\bar{\lambda} = \bar{\xi} \pm i \bar{\eta}$	wartości własne układu równań różniczkowych w postaci bezwymiarowej,
$\bar{\xi} = \xi \hat{t}$	współczynnik tłumienia w postaci bezwymiarowej,
$\bar{\eta} = \eta \hat{t}$	bezwymiarowa częstość oscylacji,
ρ [kG s ² /m ³]	gęstość powietrza.

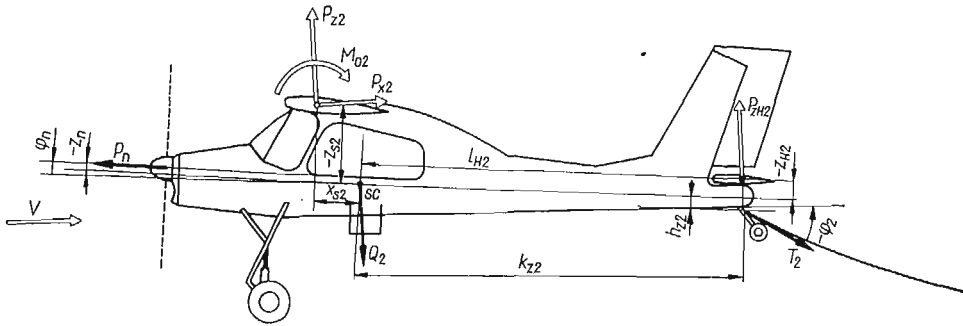
2. Równowaga podłużna samolotu holującego

W ustalonym poziomym locie musi zachodzić równowaga sił i momentów działających na samolot holujący (rys. 1), z czego wynikają trzy równania równowagi

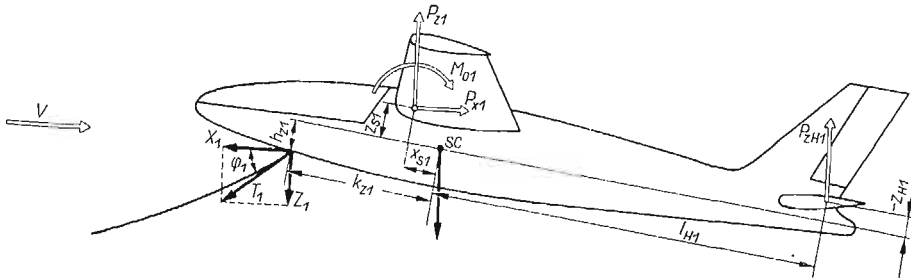
$$(2.1) \quad -P_{z2} - P_{zH2} + Q_2 - T_2 \sin \varphi_2 - P_n \sin(\alpha_2 + \varphi_n) = 0,$$

$$(2.2) \quad -P_{x2} - T_2 \cos \varphi_2 + P_n \cos(\alpha_2 + \varphi_n) = 0,$$

$$(2.3) \quad M_{02} + P_{z2}(x_{s2} \cos \alpha_2 + z_{s2} \sin \alpha_2) + P_{x2}(x_{s2} \sin \alpha_2 - z_{s2} \cos \alpha_2) + \\ + P_n z_n - P_{zH2}(l_{H2} \cos \alpha_2 - z_{H2} \sin \alpha_2) - T_2 \cos \varphi_2 (k_{z2} \sin \alpha_2 + \\ + h_{z2} \cos \alpha_2) - T_2 \sin \varphi_2 (k_{x2} \cos \alpha_2 - h_{x2} \sin \alpha_2) = 0.$$



Rys. 1. Geometria samolotu holującego i układ sił działających na samolot w locie holowanym



Rys. 2. Geometria szybowca i układ sił działających na szybowiec w locie holowanym

Rozpatrując równowagę sił działających na szybowiec holowany stycznych do kierunku prędkości (rys. 2) otrzymano

$$T_1 \cos \varphi_1 - P_{x1} = 0.$$

Z powyższego równania określono siłę naciągu liny holowniczej przyłożoną na zaczepie szybowca holowanego:

$$T_1 = \frac{P_{x1}}{\cos \varphi_1}$$

Korzystając z zależności

$$\frac{T_2 e^{\eta_2}}{\tau_2} = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1},$$

(wyprowadzonej w pracy [12] wzór (4.3)) i podstawiając zależność na T_1 otrzymano siłę T_2 pochodzącą od liny i działającą na zaczep samolotu holującego (rys. 3)

$$(2.4) \quad T_2 = \frac{P_{x1}}{\cos \varphi_1} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_2}} \frac{\tau_2}{\tau_1},$$

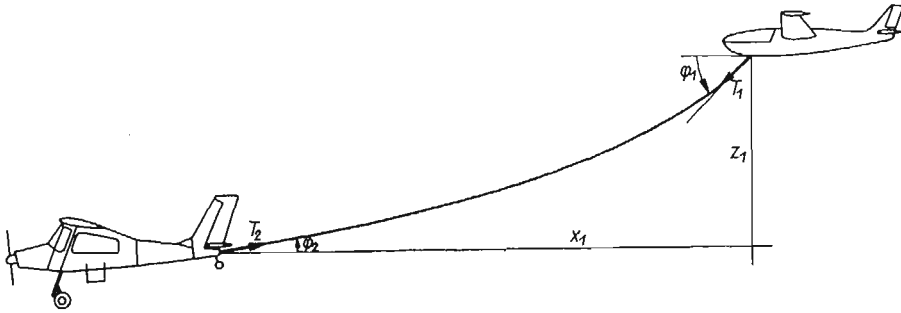
gdzie η_1 , η_2 , τ_1 i τ_2 są to funkcje wyprowadzone w pracy [12] (wzory 4.4 i 4.5).

Z równania (2.2) po podstawieniu zależności (2.4) otrzymano niezbędny ciąg zespołu śmigło-silnikowego samolotu holującego potrzebny do utrzymania zespołu holującego w ustalonym, prostoliniowym, poziomym locie:

$$(2.5) \quad P_n = \frac{1}{\cos(\alpha_2 + \varphi_n)} \left(P_{x2} + P_{x1} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_2}} \frac{\tau_2}{\tau_1} \right).$$

Z równania (2.2) i (2.3) otrzymano siłę nośną, jaka musi być przyłożona na usterzeniu poziomym samolotu holującego, ażeby zapewnić równowagę podłużną:

$$(2.6) \quad P_{zH2} = \frac{1}{l_{H2} \cos \alpha_2 - z_{H2} \sin \alpha_2} \left[M_{02} + P_{z2}(x_{s2} \cos \alpha_2 + z_{s2} \sin \alpha_2) + \right. \\ \left. + P_{x2}(x_{s2} \sin \alpha_2 - z_{s2} \cos \alpha_2) + (P_{x2} + T_2 \cos \varphi_2) \frac{z_n}{\cos(\alpha_2 + \varphi_n)} + \right. \\ \left. - T_2 \cos \varphi_2(k_{z2} \sin \alpha_2 + h_{z2} \cos \alpha_2) - T_2 \sin \varphi_2(k_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2} \sin \alpha_2) \right].$$



Rys. 3. Wielkości geometryczne charakteryzujące konfigurację liny holowniczej

Po podstawieniu do równania (2.1) zależności (2.4)–(2.6) i uwzględnieniu, że kąt natarcia α_2 samolotu holującego jest mały, tzn.

$$(2.7) \quad \sin \alpha_2 \approx \text{tg } \alpha_2 \approx \alpha_2, \quad \cos \alpha_2 \approx 1 - \frac{\alpha_2^2}{2},$$

otrzymano równanie, które po podzieleniu przez $\frac{1}{2} \rho S V^2$ sprowadzono do postaci bezwymiarowej. Następnie w powyższe równanie wprowadzono współczynnik oporu samolotu holującego C_{x2} , określony przez współczynnik aerodynamiczny siły nośnej C'_{z2} [3, 4, 12 i 15]:

$$(2.8) \quad C_{x2} = C_{x02} + \frac{(C'_{z2})^2}{\pi A_{es}}, \quad C'_{z2} = \alpha_2 a_s.$$

Po uporządkowaniu otrzymanego równania względem potęg C'_{z2} uzyskano równanie algebraiczne drugiego stopnia

$$(2.9) \quad A (C'_{z2})^2 + B C'_{z2} + C = 0,$$

które pozwoli nam obliczyć współczynnik siły nośnej C'_{z2} samolotu holującego dla danych warunków lotu.

W przypadku $\varphi_n = 0$ współczynniki równania (2.9) mają postać:

$$A = \frac{1}{a_s^2} \left\{ a_s(z_{H2} - z_{s2}) + C_{x02} z_{H2} - \frac{a_s^2}{\pi A_{es}} (z_n - z_{s2}) + \frac{1}{2} C_{m02} l_{a2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad B = & -\frac{1}{a_s} \left\{ (a_s + C_{x02})(l_{H2} + x_{s2}) + \frac{2Q_2}{\rho S_2 V^2} z_{H2} + \right. \\
 & \left. - \frac{2Q_2}{\rho S_2 V^2} l_{H2} + \bar{C}_{x1} [h_{z2} + z_{H2} - \operatorname{tg} \varphi_2 (k_{z2} - l_{H2})] \right\}, \\
 & + \bar{C}_{x1} [k_{z2} + l_{H2} + \operatorname{tg} \varphi_2 (z_{H2} + h_{z2})] \left. \right\}, \\
 C = & -C_{x02}(z_n - z_{s?}) - C_{m02} l_{a2} + \frac{2Q_2}{\rho S_2 V^2} l_{H2} - \bar{C}_{x1} [h_{z2} + z_n - \operatorname{tg} \varphi_2 (l_{H2} + k_{z2})],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \bar{C}_{x1} = C_{x1} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_2}} \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{S_1}{S_2}.$$

Z równania (2.9) otrzymano wartość współczynnika siły nośnej samolotu holującego:

$$(2.12) \quad C'_{z2} = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}.$$

Wprowadzając do C'_{z2} poprawkę uwzględniającą działanie śmigła [3, 4, 15 i 20] otrzymano:

$$(2.13) \quad C_{z2} = C'_{z2} \left(1 - 0,064 \frac{S_n}{S_2} \right).$$

Współczynnik siły nośnej samolotu holującego C_{z2} wyznaczony z (2.13) określa parametry lotu samolotu holującego, zapewniające równowagę w ustalonym locie poziomym.

Jak wynika z (2.13) parametry lotu samolotu holującego zależne są od charakterystyki aerodynamicznej samolotu, położenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości samolotu oraz przez \bar{C}_{x1} określone równaniem (2.11) od charakterystyki aerodynamicznej szybowca holowanego C_{x1} i charakterystyki linii holowniczej $\tau_1, \tau_2, e^{\eta_1}, e^{\eta_2}, \varphi_1, \varphi_2$.

Warunki równowagi szybowca holowanego zostały wprowadzone i omówione w pracy [12], rozdział 6.

3. Stateczność statyczna podłużna samolotu holującego

Pojęcie «statycznej stateczności» przyjęte w lotnictwie jest szeroko omówione w wielu pracach i podręcznikach poświęconych dynamice samolotu w locie swobodnym [3, 4, 15].

Warunkiem podłużnej stateczności statycznej w locie swobodnym jest, aby

$$(3.1) \quad \frac{dC_m}{dC_z} < 0$$

dla przyjętego w niniejszej pracy dodatniego kierunku działania momentów pochyłających (moment dodatni jest momentem zadzierającym samolot, powodującym wzrost kąta natarcia).

Stateczność statyczna mówi jedynie o występowaniu momentów wywołujących powrót szybowca do stanu równowagi w pierwszej chwili po zakłóceniu lotu [3, 4, 11]. Szybowiec stateczny statycznie może być niestateczny dynamicznie.

Przez analogię do lotu swobodnego zaproponowano w pracy [12] wprowadzenie pojęcia «stateczności statycznej w locie na holu».

Bezwymiarowy współczynnik momentu pochylającego samolot holujący, liczony względem środka ciężkości samolotu ma postać:

$$(3.2) \quad C_{mh2} = C_{ma2} + C_{ml2},$$

gdzie C_{mh2} oznacza współczynnik momentu pochylającego samolotu holującego, C_{ma2} współczynnik momentu pochylającego, pochodzący od sił aerodynamicznych działających na samolot, C_{ml2} współczynnik momentu pochylającego pochodzący od holu.

W rozważanych warunkach lotu współczynniki te zależą wyłącznie od C_{z2} . Po zróżniczkowaniu (3.2) względem C_{z2} otrzymano

$$(3.3) \quad \frac{dC_{mh2}}{dC_{z2}} = \frac{dC_{ma2}}{dC_{z2}} + \frac{dC_{ml2}}{dC_{z2}}.$$

Zgodnie z określeniami przyjętymi w lotnictwie [3, 4 i 11] otrzymano zapas stateczności statycznej samolotu holującego w postaci:

$$(3.4) \quad \bar{h}_{h2} = \bar{h}_{12} + h_{12},$$

gdzie $\bar{h}_{12} = -dC_{ml2}/dC_{z2}$ oznacza zmianę zapasu stateczności statycznej pochodzącą od holu, $\bar{h}_{12} = -dC_{ma2}/dC_{z2}$ zapas stateczności statycznej z trzymanym sterem (ster wysokości zablokowany) w locie swobodnym.

W celu określenia zapasu stateczności statycznej samolotu holującego rozpatrzono momenty sił działających na samolot, pochodzących od liny holowniczej (rys. 1). Składowe X_2^1 i Z_2^1 siły, pochodzącej od naciągu liny i przyłożonej na zaczepie samolotu holującego, zmieniają się w zależności od kąta natarcia α_2 :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} X_2^1 &= T_2 \cos \varphi_2 + X_{x2}^1(k_{z2} - k_{z2} \cos \alpha_2 + h_{z2} \sin \alpha_2) - X_{z2}^1(k_{z2} \sin \alpha_2 + h_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2}), \\ Z_2^1 &= -T_2 \sin \varphi_2 + Z_{x2}^1(k_{z2} - k_{z2} \cos \alpha_2 + h_{z2} \sin \alpha_2) - Z_{z2}^1(k_{z2} \sin \alpha_2 + h_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2}), \end{aligned}$$

gdzie $X_{x2}^1, X_{z2}^1, Z_{x2}^1, Z_{z2}^1$ są to pochodne «linowe» omówione w p. 4.

Moment pochylający sił pochodzących od liny holowniczej ma postać

$$(3.6) \quad M_{l2} = -X_2^1(h_{z2} \cos \alpha_2 + k_{z2} \sin \alpha_2) + Z_2^1(k_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2} \sin \alpha_2).$$

Po podstawieniu do (3.6) zależności (3.5) i (2.4), uwzględnieniu (2.7) i (2.8) oraz podzieleniu równania momentów przez $\frac{1}{2} \rho S_2 V^2 l_{a2}$ otrzymano współczynnik momentu pochylającego C_{ml2} w postaci bezwymiarowej:

$$(3.7) \quad C_{ml2} = -\bar{C}_{x1}(\bar{k}_{z2} \operatorname{tg} \varphi_2 - \bar{h}_{z2}) - \bar{C}_{x1}(\bar{k}_{z2} - \bar{h}_{z2} \operatorname{tg} \varphi_2) \alpha_2 + \frac{1}{2} \bar{C}_{x1}(\bar{h}_{z2} + \bar{k}_{z2} \operatorname{tg} \varphi_2) \alpha_2^2 - l_{a2} \times \\ \times \left\{ \left[\bar{x}_{x2} \bar{h}_{z2} - \bar{x}_{z2} \bar{k}_{z2} \right] \alpha_2 + \frac{1}{2} (\bar{x}_{x2} \bar{k}_{z2} + \bar{x}_{z2} \bar{h}_{z2}) \alpha_2^2 \right\} \left(\bar{h}_{z2} - \frac{1}{2} \bar{h}_{z2} \alpha_2^2 + \bar{k}_{z2} \alpha_2 \right) - \\ - \left[\bar{z}_{x2} \bar{h}_{z2} - \bar{z}_{z2} \bar{k}_{z2} \right] \alpha_2 + \frac{1}{2} (\bar{z}_{x2} \bar{k}_{z2} + \bar{z}_{z2} \bar{h}_{z2}) \alpha_2^2 \right\} \left(\bar{k}_{z2} - \frac{1}{2} \bar{k}_{z2} \alpha_2^2 - \bar{h}_{z2} \alpha_2 \right) \left. \right\}.$$

Różniczkując (3.7) względem C_{z2} i korzystając z drugiej zależności (2.8) otrzymano zmianę zapasu stateczności statycznej samolotu holującego

$$(3.8) \quad \bar{h}_{12} = \Delta \bar{h}_2(l) + \Delta \bar{h}_2(\bar{k}_{z2}) + \Delta \bar{h}_2(\bar{h}_{z2}),$$

gdzie poszczególne wyrazy 3.8 mają postać:

$$(3.9) \quad \Delta \bar{h}_2(l) = \frac{l_{a2}}{a_s} \left\{ \bar{k}_{z2}^2 \left[\bar{z}_{z2} - (2\bar{x}_{x2} + \bar{z}_{x2}) \frac{C_{z2}}{a_s} + \frac{3}{2} (\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^2}{a_s^2} + \bar{z}_{x2} \frac{C_{z2}^3}{a_s^3} \right] + \right. \\ \left. + \bar{h}_{z2}^2 \left[\bar{x}_{x2} + (2\bar{z}_{z2} + \bar{x}_{z2}) \frac{C_{z2}}{a_s} - \frac{3}{2} (\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^2}{a_s^2} - \bar{x}_{z2} \frac{C_{z2}^3}{a_s^3} \right] - \right. \\ \left. - \bar{h}_{z2} \bar{k}_{z2} \left[\bar{z}_{x2} + \bar{x}_{z2} - 3(\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}}{a_s} - 3(\bar{x}_{z2} + \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^2}{a_s^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^3}{a_s^3} \right] \right\},$$

$$(3.10) \quad \Delta \bar{h}_2(\bar{k}_{z2}) = \bar{k}_{z2} \frac{\bar{C}_{x1}}{a_s} \left(1 - \frac{C_{z2}}{a_s} \operatorname{tg} \varphi_2 \right),$$

$$(3.11) \quad \Delta \bar{h}_2(\bar{h}_{z2}) = -\bar{h}_{z2} \frac{\bar{C}_{x1}}{a_s} \left(\frac{C_{z2}}{a_s} - \operatorname{tg} \varphi_2 \right),$$

przy czym

$$\bar{x}_{x2} = \frac{2X'_{x2}}{\rho S_2 V^2}, \quad \bar{k}_{z2} = \frac{k_{z2}}{l_{a2}}, \quad \bar{h}_{z2} = \frac{h_{z2}}{l_{a2}}.$$

Analogicznie do \bar{x}_{x2} otrzymano \bar{x}_{z2} , \bar{z}_{x2} i \bar{z}_{z2} .

Zapasu stateczności statycznej samolotu w locie swobodnym h_{12} nie wyprowadzono w niniejszej pracy; przyjęto go w następującej formie ostatecznej na podstawie [4] i [20]:

$$(3.12) \quad \bar{h}_{12} = \frac{S_{H2} l_{H2}}{S_2 l_{a2}} \left(\frac{V_{H2}}{V} \right)^2 \frac{a_{1s}}{a_s} \left(1 - \frac{d\varepsilon_2}{d\alpha_2} \right) - \bar{x}_{s2} - \frac{2C_{z2}}{a_s} \left(1 - \frac{a_s}{\pi \Lambda_{es}} \right) \bar{z}_{s2} - 0,064 \frac{S_n x_n}{S_2 l_{a2}}.$$

Zmiana stateczności statycznej wywołana hołem (3.8) zależy od wielu czynników. Może ona powodować wzrost lub spadek stateczności statycznej w stosunku do zapasu odpowiadającego lotowi swobodnemu samolotu z trzymanym sterem. Zapas stateczności statycznej ma wpływ na stateczność dynamiczną szybowca i samolotu holującego. Występuje on w różniczkowych równaniach ruchu jako współczynnik w pochodnych aerodynamicznych M_{w1} i M_{w2} .

Stateczność statyczna szybowca holowanego została wyprowadzona i omówiona w pracy [12], rozdział 7.

4. Pochodne «linowe»

Siły, występujące na zaczepach holowniczych samolotu holującego i szybowca, pochodzące od liny holowniczej, zależne są od wzajemnego położenia końców liny, charakterystyki aerodynamicznej liny, charakterystyki aerodynamicznej szybowca i prędkości holowania. Przez analogię do pochodnych aerodynamicznych [3, 4, 15], stosowanych przy

rozpatrywaniu stateczności samolotów, wprowadzono pochodne «linowe» (współczynniki sił), które omówiono szerzej w pracach [12 i 13].

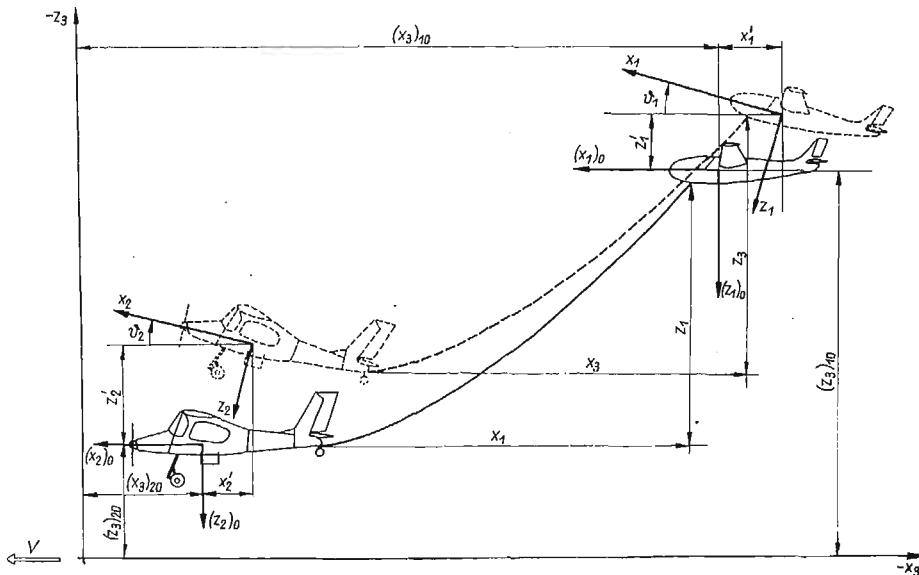
Pochodne «linowe» $X_{x1}^l, X_{z1}^l, Z_{x1}^l, Z_{z1}^l$ składowych sił działających na zaczep holowniczy szybowca względem przesunięć poziomego i pionowego zostały wyprowadzone w pracy [12]. Analogicznie do nich wyprowadzono pochodne «liniowe» składowych sił działających na zaczep holowniczy samolotu $X_{x2}^l, X_{z2}^l, Z_{x2}^l, Z_{z2}^l$. Pochodne «linowe» podano w formie ostatecznej w p. 8 niniejszej pracy.

5. Stateczność dynamiczna podłużna zespołu samolot i szybowiec w locie na hołu

Różniczkowe równania ruchu układu holowniczego, tzn. samolot holujący + hol + szybowiec, wyprowadzimy korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju [18, 19] o postaci

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j,$$

gdzie q_j oznaczają współrzędne uogólnione, T energię kinetyczną układu wyrażoną przez współrzędne uogólnione, V energia potencjalna układu wyrażona poprzez współrzędne uogólnione, Q_j siły uogólnione odpowiadające współrzędnym q_j .



Rys. 4. Przyjęte układy współrzędnych i zależności geometryczne między nimi

Przy rozpatrywaniu stateczności podłużnej przyjęto, że zespół holujący znajdował się w poziomym, prostoliniowym locie ustalonym. Zakłócenia lotu ustalonego, tzn. zmiany położenia i prędkości, zachodzą w płaszczyźnie pionowej zgodnej z kierunkiem lotu. Zespół holujący posiada siedem stopni swobody: przesunięcia pionowe szybowca, samolotu i liny, przesunięcia poziome szybowca i samolotu oraz obroty wokół środków ciężkości szybowca i samolotu.

Szybowiec holowany posiada trzy stopnie swobody [2, 3, 4, 12 i 15], odpowiadające im zmiany oznaczono (rys. 4) w sposób następujący: x'_1 , z'_1 oznaczają zmiany położenia środka ciężkości szybowca, względem układu x_3 , z_3 związanego z niezakłóconym przepływem, ϑ_1 zmianę kąta pochylenia szybowca (obrót względem środka ciężkości), u_1 , w_1 składowe zmiany prędkości w kierunkach osi x_1 i z_1 , związanych z szybowcem, q_1 zmiana prędkości kątowej pochylenia szybowca wokół środka ciężkości.

Samolot holujący posiada trzy stopnie swobody [3, 4, 15] i odpowiadające im zmiany oznaczono na (rys. 4) w sposób następujący: x'_2 , z'_2 zmiany położenia środka ciężkości samolotu względem układu x_3 , z_3 związanego z niezakłóconym przepływem, ϑ_2 jest zmianą kąta pochylenia samolotu (obrót względem środka ciężkości), u_2 , w_2 są składowymi zmian prędkości w kierunkach osi związanych z samolotem, q_2 oznacza zmianę prędkości kątowej pochylenia samolotu wokół środka ciężkości.

Linę holowniczą potraktowano jako ciągnio idealnie wiotkie, ciężkie, sprężyste, obciążone siłami aerodynamicznymi [12].

Przyjęto, że amplitudy drgań linii holowniczej są proporcjonalne do przesunięć statycznych [16].

Jak wynika z [12] hol ma silny wpływ na wahania fugoidalne, natomiast w niewielkim stopniu wpływa na oscylacje szybkie szybowca. Założenie upraszczające, traktujące linę jako element o jednym stopniu swobody, jest uzasadnione, gdyż uwzględnia podstawową postać drgań linii.

Przez f_i oznaczono zmianę pionową położenia środka geometrycznego linii względem układu x_3 , z_3 , związanego z niezakłóconym przepływem przy stałym położeniu samolotu holującego i szybowca.

5.1. Względna zmiana przemieszczenia linii. Znajomość względnej zmiany przemieszczenia środka linii f wyrażonej za pomocą współrzędnych uogólnionych jest niezbędna do określenia energii kinetycznej i potencjalnej linii oraz pracy wykonanej przez siły aerodynamiczne działające na linę.

Poniżej określono całkowitą zmianę położenia środka linii f_3 , wywołaną zmianami położenia szybowca x'_1 , z'_1 i ϑ_1 , samolotu x'_2 , z'_2 i ϑ_2 oraz zmianę strzałki ugięcia linii f_1 .

Przed wystąpieniem zakłóceń współrzędne końców linii (rys. 4) wyrażają się wzorami poniżej podanymi. Mianowicie współrzędne zaczepu szybowca w układzie x_3 , z_3 :

$$(5.2) \quad (x_3)_{110} = -(x_3)_{10} + k_{z1}; \quad (z_3)_{110} = -(z_3)_{10} + h_{z1};$$

współrzędne zaczepu samolotu w układzie x_3 , z_3 :

$$(5.3) \quad (x_3)_{120} = -(x_3)_{20} - k_{z2}; \quad (z_3)_{120} = -(z_3)_{20} + h_{z2}.$$

Odległości poziomą x_1 i pionową z_1 między końcami linii (rys. 1 i rys. 4) przed zakłóceniem otrzymamy korzystając z (5.2) i (5.3):

$$(5.4) \quad x_1 = (x_3)_{110} - (x_3)_{120}, \quad z_1 = (z_3)_{110} - (z_3)_{120}.$$

Po wystąpieniu zakłóceń wzory na współrzędne końców linii przyjmą postać: współrzędne zaczepu szybowca

$$(5.5) \quad \begin{aligned} (x_3)_{111} &= -(x_3)_{10} - x'_1 + k_{z1} \cos \vartheta_1 + h_{z1} \sin \vartheta_1, \\ (z_3)_{111} &= -(z_3)_{10} - z'_1 - k_{z1} \sin \vartheta_1 + h_{z1} \cos \vartheta_1, \end{aligned}$$

współrzędne zaczepu samolotu

$$(5.6) \quad \begin{aligned} (x_3)_{l21} &= -(x_3)_{20} - x'_2 - k_{z2} \cos \vartheta_2 + h_{z2} \sin \vartheta_2, \\ (z_3)_{l21} &= -(z_3)_{20} - z'_2 + k_{z2} \sin \vartheta_2 + h_{z2} \cos \vartheta_2. \end{aligned}$$

Korzystając z (5.5), (5.6) i założenia, że kąty ϑ_1 i ϑ_2 są małe, otrzymano odległości między końcami liny po zakłóceniu: poziomą x_3 i pionową z_3

$$(5.7) \quad x_3 = (x_3)_{l11} - (x_3)_{l21} \approx x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2,$$

$$(5.8) \quad z_3 = (z_3)_{l11} - (z_3)_{l21} \approx z_1 - z'_1 + z'_2 - k_{z1} \vartheta_1 - k_{z2} \vartheta_2.$$

Ugięcie liny f zawieszanej poziomo [6] i [7] wyraża się wzorem przed zakłóceniem

$$(5.9) \quad f_1 = \frac{q x_1^2}{8 X_1},$$

po zakłóceniu

$$(5.10) \quad f_3 = \frac{q x_3^2}{8 X_1},$$

gdzie $X_1 = P_{x1}$ jest składową poziomą siły na zaczepie szybowca równą oporowi szybowca (2.6).

Całkowitą zmianę położenia liny otrzyma się w postaci następującej korzystając przy tym z (5.2), (5.3), (5.5), (5.6), (5.9) i (5.10)

$$(5.11) \quad f_3 = \frac{1}{2} [-(z_3)_{l11} - (z_3)_{l21} + (z_3)_{l10} + (z_3)_{l20}] + f_2 - f_1 + f_1.$$

Względną zmianę przemieszczenia f otrzyma się z (5.11) po uwzględnieniu (5.7) i (5.8) i podzieleniu przez (5.9)

$$(5.12) \quad f = \frac{8 X_1}{q x_1^2} \left[f_1 - \frac{q x_1^2}{8 X_1} + \frac{1}{2} (z'_1 + z'_2 + k_{z1} \vartheta_1 - k_{z2} \vartheta_2) + \right. \\ \left. + \frac{q}{8 X_1} (x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2)^2 \right].$$

5.2. Energia kinetyczna zespołu holowniczego. Energia kinetyczna zespołu holowniczego, występująca w równaniu (5.1), wyrażona przez współrzędne uogólnione ma postać:

$$(5.13) \quad T = T_s + T_H + T_l,$$

gdzie T_s jest energią kinetyczną szybowca holowanego, T_H energią kinetyczną samolotu holującego, T_l energią kinetyczną liny holowniczej.

Energia kinetyczna szybowca holowanego T_s [19] wyrażona przez współrzędne uogólnione

$$(5.14) \quad T_s = \frac{1}{2} J_1 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{Q_1}{g} [(\dot{x}'_1)^2 + (\dot{z}'_1)^2].$$

Energia kinetyczna samolotu holującego T_H [19] wyrażona przez współrzędne uogólnione

$$(5.15) \quad T_H = \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} [(\dot{x}_2')^2 + (\dot{z}_2')^2],$$

gdzie J_1, J_2 oznaczają momenty bezwładności szybowca i samolotu względem osi poprzecznej [3, 4, 15] Q_1, Q_2 ciężar całkowity w locie szybowca i samolotu.

Energię kinetyczną liny określono [18] przyjmując, że przemieszczenie jest proporcjonalne do ugięcia statycznego liny u_l [6, 7]

$$(5.16) \quad u_l = fy$$

gdzie

$$(5.17) \quad y = \frac{4f_1(x_1-x)x}{x_1^2} + \frac{z_1}{x_1}x.$$

Energię kinetyczną liny określono za pomocą współrzędnych uogólnionych po uwzględnieniu (5.16) i przedstawiono w postaci:

$$(5.18) \quad T_l = \frac{qf^2}{2g} \int_0^{x_1} y^2 dx = f^2 L_T,$$

gdzie L_T jest stałym współczynnikiem zależnym od ciężaru jednostkowego liny q , jej konfiguracji (x_1 i z_1) oraz oporu aerodynamicznego szybowca holowanego X_1 i ma postać

$$(5.19) \quad L_T = \frac{qx_1}{6g} \left(z_1^2 + \frac{3}{4} \frac{qx_1^2 z_1}{X_1} + \frac{1}{40} \frac{q^2 x_1^4}{X_1^2} \right).$$

Występującą w (5.18) pochodną względem zmiany położenia liny otrzymano przez różniczkowanie względem czasu (5.12).

5.3. Energia potencjalna zespołu holowniczego. Energia potencjalna zespołu holowniczego występująca w równaniu (5.1) ma postać

$$(5.20) \quad V = V_s + V_H + V_l + V_{lS},$$

gdzie V_s oznacza energię potencjalną szybowca holowanego, V_H energię potencjalną samolotu holującego, V_l energię potencjalną liny holowniczej, wywołaną pionowym przemieszczeniem, V_{lS} energię potencjalną liny holowniczej, wywołaną sprężystym wydłużeniem.

Energia potencjalna szybowca holowanego wyrażona przez współrzędne uogólnione wyraża się wzorem:

$$(5.21) \quad V_s = -Q_1[(z_3)_{10} + z_1'].$$

Energia potencjalna samolotu holującego wyrażona przez współrzędne uogólnione:

$$(5.22) \quad V_H = -Q_2[(z_3)_{20} + z_2'].$$

Energię potencjalną liny holowniczej [18] stosując (5.17) otrzymano w postaci wyrażonej:

$$(5.23) \quad V_l = -qf \int_0^{x_1} y dx = f L_V,$$

gdzie L_V jest stałym współczynnikiem zależnym od tych samych czynników co L_T we wzorze (5.19)

$$(5.24) \quad L_V = -\frac{1}{2} q x_1 \left(z_1 + \frac{q x_1^2}{6 X_1} \right).$$

Energię potencjalną liny holowniczej pochodzącą od jej sprężystego wydłużenia obliczymy z zależności

$$(5.25) \quad V_{is} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \lambda T^2 dl.$$

Naciąg liny T występujący w (5.25) zależny od składowej poziomej X i kąta pochylenia liny φ [6], [7] jest następujący:

$$(5.26) \quad T = \frac{X}{\cos \varphi}.$$

Element długości liny wyrażonej przez promień krzywizny i kąt pochylenia ma postać (rys. 5)

$$(5.27) \quad dl = r d\varphi,$$

gdzie z zależności geometrycznych

$$(5.28) \quad r = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}$$

różniczkując dwukrotnie (5.17) względem x otrzymamy

$$(5.29) \quad y'' = -\frac{8f_1}{x_1^2}.$$

Jak wynika z geometrii

$$(5.30) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Podstawiając zależności (5.26)–(5.29) do (5.25) po przekształceniach otrzymamy wyrażenie na energię sprężystą liny w postaci całkowej:

$$(5.31) \quad V_{is} = -\frac{1}{16} \frac{x_1^2 \lambda X^2}{f_1} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^5 \varphi} = X^2 L_S,$$

gdzie L_S jest stałym współczynnikiem:

$$(5.32) \quad L_S = -\frac{\lambda X_1}{8q} \left[\frac{\sin \varphi_1}{\cos^4 \varphi_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\cos^4 \varphi_2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \right) + \frac{3}{4} \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right].$$

Siła X , występująca we wzorze (5.31), jest zależna od współrzędnych uogólnionych. Korzystając z zależności na pochodne «linowe» otrzymano po przekształceniu

$$(5.33) \quad X = X_1 + X_{x_1}^1 x_1' - X_{x_2}^1 x_2' - X_{z_1}^1 z_1' + X_{z_2}^1 z_2' + \\ - (X_{x_1}^1 h_{z_1} + X_{z_1}^1 k_{z_1}) \vartheta_1 + (X_{x_2}^1 h_{z_2} - X_{z_2}^1 k_{z_2}) \vartheta_2.$$

Znając składową poziomą naciągu liny X określoną za pomocą współrzędnych uogólnionych (5.33) oraz korzystając ze wzoru na L_S (5.32) z (5.31) można obliczyć energię sprężystą liny.

5.4. Siły uogólnione odpowiadające współrzędnym uogólnionym zespołu holowniczego. Siły uogólnione działające na przesunięciach uogólnionych występujące w równaniach Lagrange'a (5.1) przedstawiono w postaci

$$(5.34) \quad Q_j = Q_j' + Q_j'' + Q_j''',$$

gdzie Q_j' oznacza siły uogólnione pochodzące od zmiany sił i momentów aerodynamicznych działających na szybowiec i samolot holujący, Q_j'' siły uogólnione pochodzące od zmiany sił aerodynamicznych działających na linę holowniczą, Q_j''' siły uogólnione pochodzą od zmiany naciągu liny holowniczej.

Siły uogólnione, odpowiadające współrzędnym uogólnionym poszczególnych stopni swobody szybowca i samolotu holującego, przedstawiono korzystając z [3, 4, 12, 15] za pomocą pochodnych aerodynamicznych i pochodnych linowych.

$$(5.35) \quad \begin{aligned} Q_{x_1}' &= X_{u1} \dot{x}_1' + X_{w1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + X_{q1} \dot{\vartheta}_1, \\ Q_{x_2}' &= X_{u2} \dot{x}_2' + X_{w2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + X_{q2} \dot{\vartheta}_2, \\ Q_{z_1}' &= Z_{u1} \dot{x}_1' + Z_{w1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + Z_{q1} \dot{\vartheta}_1, \\ Q_{z_2}' &= Z_{u2} \dot{x}_2' + Z_{w2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + Z_{q2} \dot{\vartheta}_2, \\ Q_{\vartheta_1}' &= M_{u1} \dot{x}_1' + M_{w1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + M_{\dot{w}1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + M_{q1} \dot{\vartheta}_1, \\ Q_{\vartheta_2}' &= M_{u2} \dot{x}_2' + M_{w2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + M_{\dot{w}2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + M_{q2} \dot{\vartheta}_2 + M_{us} \dot{x}_2'. \end{aligned}$$

Pochodne «linowe» występujące w (5.35) są przedstawione w p. 8 niniejszej pracy. Pochodne aerodynamiczne dla szybowca i samolotu w locie swobodnym są wyprowadzone w pracach [3, 4, 15]. W punkcie 8 podano pochodne aerodynamiczne dla samolotu holującego w ostatecznej postaci.

Poniżej wyprowadzono siły uogólnione pochodzące od liny holowniczej.

Pracę przygotowaną wykonaną przez siły aerodynamiczne działające na linę holowniczą po uwzględnieniu (5.16) i zależności geometrycznej

$$(5.36) \quad dl = \frac{dx}{\cos \varphi},$$

wyrażono w postaci całkowej:

$$(5.37) \quad \delta W_P = - \left[\frac{1}{2} \rho U_1^2 d \int_0^{x_1} \frac{C_{z1}(\varphi)}{\cos \varphi} \left(\frac{4f_1 + z_1}{x_1} x - \frac{4f_1}{x_1^2} x^2 \right) dx \right] \delta f,$$

gdzie $C_{zi}(\varphi)$ jest funkcją określającą zmianę współczynnika siły nośnej linii w zależności od kąta pochylenia φ . Została ona wyprowadzona i omówiona w pracy [12]. Poniżej funkcję tę podano w formie ostatecznej:

$$(5.38) \quad C_{zi}(\varphi) = C_n \sin^2 \varphi \cos \varphi - C_t \cos^2 \varphi \sin \varphi,$$

gdzie $C_n = 1,15$, $C_t = 0,035$.

Pracę przygotowaną (5.37) przedstawiono w postaci

$$(5.39) \quad \delta W_P = \delta f \cdot L_P,$$

gdzie L_P jest współczynnikiem stałym. Można przedstawić go w formie całkowej korzystając z (5.38) i następujących zależności geometrycznych:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Po przekształceniach otrzymano

$$(5.40) \quad L_P = -\frac{1}{2} \rho U_1^2 d \int_0^{x_1} [C_n(k_1 - 2k_2 x) - C_t] \frac{(k_1 - 2k_2 x)(k_1 - k_2 x)}{1 + (k_1 - 2k_2 x)^2} x dx,$$

gdzie

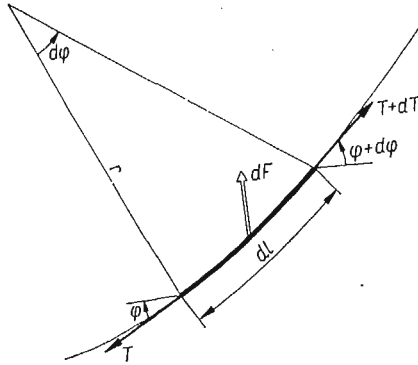
$$k_1 = \frac{q x_1}{2X_1} + \frac{z_1}{x_1}, \quad k_2 = \frac{q}{2X_1}, \quad U_1 = V.$$

Do wzoru (5.39) podstawiono wyrażenie na δf wyznaczone z (5.12) uzależnione od współrzędnych uogólnionych i uporządkowano go względem wariacji współrzędnych uogólnionych. Wyrażenia występujące przy wariacjach współrzędnych uogólnionych są siłami uogólnionymi i mają następującą postać:

$$(5.41) \quad \begin{aligned} Q'_{x_1} &= -Q'_{x_2} = -\frac{2L_P}{x_1^2} (x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2), \\ Q'_{z_1} &= Q'_{z_2} = \frac{4X_1}{q x_1^2} L_P, \\ Q'_{\vartheta_1} &= \frac{L_P}{x_1^2} \left[\frac{4X_1}{q} k_{z1} + 2(x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2) h_{z1} \right], \\ Q'_{\vartheta_2} &= -\frac{L_P}{x_1^2} \left[\frac{4X_1}{q} k_{z2} + 2(x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2) h_{z2} \right], \\ Q'_{f1} &= \frac{8X_1}{q x_1^2} L_P. \end{aligned}$$

Siły uogólnione, pochodzące od naciągu liny, obliczono określając pracę przygotowaną wykonaną przez te siły na przesunięciach uogólnionych. Rozpatrzone elementarną siłę dF działającą na element liny dl (rys. 5) i otrzymano równanie równowagi sił:

$$dF = (T+dT)\sin(\varphi+d\varphi) - T\sin\varphi.$$



Rys. 5. Siły naciągu działające na element liny holowniczej

Po pominięciu w powyższym równaniu małych wyższego rzędu otrzymano

$$(5.42) \quad dF = T\cos\varphi d\varphi + dT\sin\varphi.$$

Z zależności (5.27) otrzymano

$$(5.43) \quad d\varphi = \frac{y'' dl}{[1+(y')^2]^{3/2}}.$$

Uzależniono naciąg liny T od składowej poziomej X :

$$T = \frac{X}{\cos\varphi}.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymano zmianę naciągu liny dT w postaci

$$(5.44) \quad dT = X \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi.$$

Podstawiając do (5.42) zależności (5.43), (5.44) i (5.30) po przekształceniach otrzymano

$$(5.45) \quad dF = Xy'' dx.$$

Pracę przygotowaną obliczono korzystając z (5.16), (5.29) i (5.45):

$$(5.46) \quad \delta W_N = - \left[X \frac{8f_1}{x_1^2} \int_0^{x_1} \left(\frac{4f_1+z_1}{x_1} x - \frac{4f_1}{x_1^2} x^2 \right) dx \right] \delta f$$

i przedstawiono w postaci

$$(5.47) \quad \delta W_N = X L_N \delta f,$$

gdzie L_N jest stałym współczynnikiem zależnym od konfiguracji, obciążenia i charakterystyki liny

$$(5.48) \quad L_N = -\frac{qx_1}{6X_1} \left(\frac{qx_1^2}{2X_1} + 3z_1 \right).$$

Jeżeli do (5.47) podstawimy zależność δf wyznaczoną z (5.12) i (5.34) oraz uporządkujemy się względem współrzędnych uogólnionych, to współczynniki występujące przy nich będą poszukiwanymi siłami uogólnionymi Q_j''' analogicznie do (5.41).

5.5. Różniczkowe równania ruchu zespołu hołowniczego. Różniczkowe równania ruchu zespołu hołowniczego otrzymano przez rozwinięcie równań Lagrange'a II rodzaju (5.1). Równania wyprowadzono różniczkując zgodnie z (5.1) energię kinetyczną układu (podpunkt 5.2) i energię potencjalną (podpunkt 5.3) oraz dodając siły uogólnione (podpunkt 5.4). Po zlinearyzowaniu otrzymano układ siedmiu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami.

Układ otrzymanych równań różniczkowych zapisano macierzowo w postaci

$$(5.49) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{ij}] && i = 1, 2, \dots, 7 \\ & && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kwadratową współczynników bezwładności,} \\ \mathbf{B} &= [b_{ij}] && i = 1, 2, \dots, 7 \\ & && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kwadratową współczynników tłumienia,} \\ \mathbf{C} &= [c_{ij}] && i = 1, 2, \dots, 7 \\ & && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kwadratową współczynników sztywności,} \\ \mathbf{D} &= [d_{ij}] && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kolumnową wyrazów wolnych.} \end{aligned}$$

$\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$ są macierzami kolumnowymi współrzędnych uogólnionych lub ich pochodnych względem czasu o postaci:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \\ \ddot{\bar{z}}_1 \\ \ddot{\bar{z}}_2 \\ \ddot{\bar{\theta}}_1 \\ \ddot{\bar{\theta}}_2 \\ \ddot{\bar{f}}_l \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{\theta}}_1 \\ \dot{\bar{\theta}}_2 \\ \dot{\bar{f}}_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{f}_l \end{bmatrix}.$$

Wyrazy macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ i \mathbf{D} w postaci bezwymiarowej podano w p. 8 niniejszej pracy.

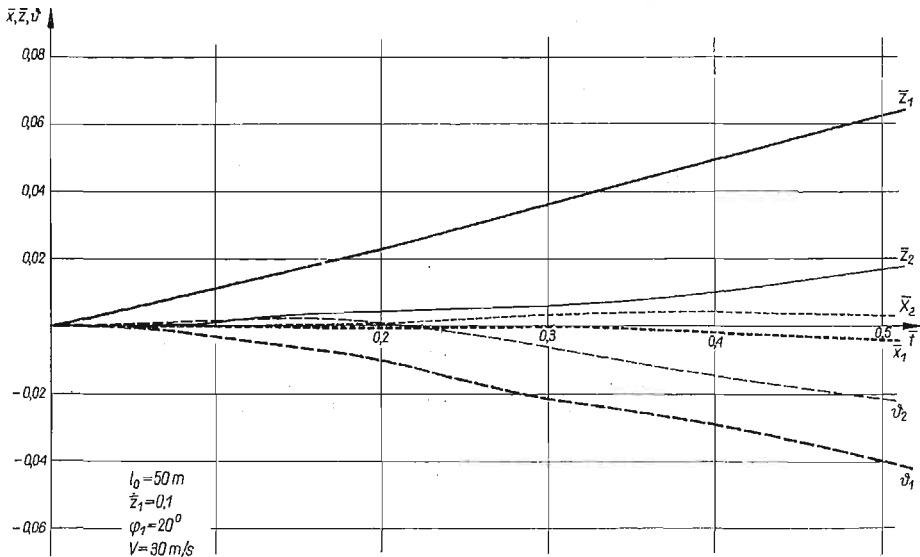
Przy przejściu do postaci bezwymiarowej wprowadzono zgodnie z [3, 4, 15] pojęcia stosowane w lotnictwie a ułatwiające przekształcenia i późniejszą analizę wyników:

$$\begin{aligned}\hat{t}_1 &= \frac{Q_1}{g \rho S_1 V} \text{ czas aerodynamiczny,} \\ \bar{t} &= \frac{t}{\hat{t}_1} \text{ czas betwymiary,} \\ \bar{x}_1 &= \frac{x'_1}{l_{H1}}, \quad \bar{z}_1 = \frac{z'_1}{l_{H1}} \text{ bezwymiarowe przesunięcie liniowe,} \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \frac{\dot{x}'_1}{V}, \quad \dot{\bar{z}}_2 = \frac{\dot{z}'_2}{V} \text{ bezwymiarowe prędkości liniowe,} \\ \ddot{\bar{x}}_1 &= \ddot{x}'_1 \frac{\hat{t}}{V}, \quad \ddot{\bar{z}}_2 = \ddot{z}'_2 \frac{\hat{t}}{V} \text{ bezwymiarowe przyspieszenie liniowe,} \\ \dot{\bar{\vartheta}}_1 &= \dot{\vartheta}_1 \hat{t} \text{ bezwymiarowa prędkość kątowna pochylania,} \\ \ddot{\bar{\vartheta}}_1 &= \ddot{\vartheta}_1 \hat{t}^2 \text{ bezwymiarowe przyspieszenie kątowne pochylania.}\end{aligned}$$

Znając wszystkie wyrazy macierzy **A**, **B**, **C**, **D** i składowe wektorów $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{x} , występujących w układzie równań różniczkowych (5.49), przystąpiono do ich rozwiązywania.

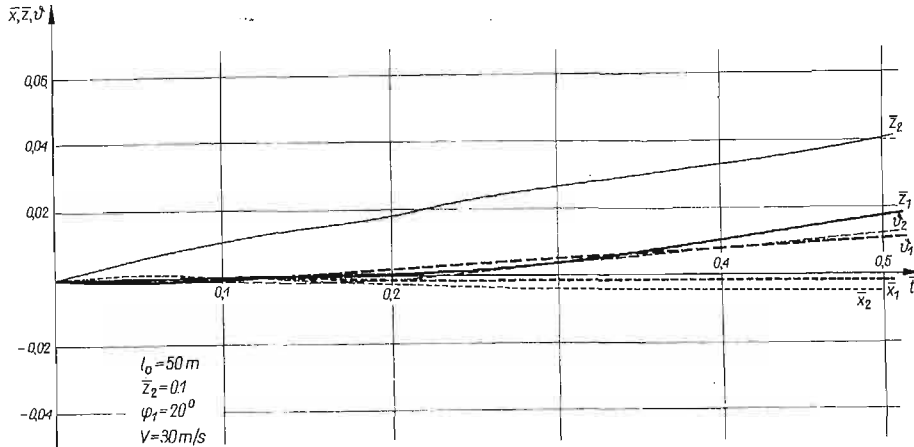
Dla szybowca i samolotu holującego o znanej charakterystyce [12, 20], scałkowano numerycznie układ równań (5.49) zadając warunki początkowe, będące zakłóceniem od ustalonego lotu na holu. Proces całkowania odbywał się metodą numeryczną Runge-Kutta-Gilla [16] dostosowaną do języka GIER-ALGOL III [11].

W celu określenia wzajemnego wpływu szybowca holowanego na samolot holujący scałkowano zlinearyzowany układ równań (5.49), dla którego istnieją wartości własne pozwalające określić częstości oscylacji i współczynniki ich tłumienia.



Rys. 6. Charakter zmian przesunięć i obrotów w funkcji czasu szybowca i samolotu holującego po zakłóceniu chwilową prędkością pionową $w_1 = 0,1$ działającą na szybowiec

Na szybowiec i samolot holujący, znajdujący się w ustalonym prostoliniowym locie na holu, została nadana chwilowa prędkość pionowa $\bar{w}_1 = \dot{z}_1 = 0,1$ i $\bar{w}_2 = \dot{z}_2 = 0,1$. Wykresy podają, jak pod wpływem powyższego zakłócenia zmieniają się w czasie przesunięcia liniowe i kątowe samolotu i szybowca holowanego (rys. 6 i rys. 7).



Rys. 7. Charakter zmian przesunięć i obrotów w funkcji czasu szybowca i samolotu holującego po zakłóceniu chwilową prędkością pionową $w_2 = 0,1$ działającą na samolot

Jak wynika z rys. 6 i rys. 7, w przypadku samolotu holującego o masie porównywalnej z masą szybowca holowanego występuje wzajemny wpływ ruchów samolotu na szybowiec holowany i odwrotnie. W takim przypadku nie można rozpręgnąć układu równań (5.49) na równania opisujące ruch szybowca i równania samolotu. Stosowanie kryteriów stateczności Routha-Hurwitza dla pełnego układu równań (5.49) jest trudne i bardzo pracowite.

Otrzymanie rozwiązania układu równań (5.49) w postaci zamkniętej jest bardzo kłopotliwe i często niemożliwe.

Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metody numeryczne obliczenia wartości własnych układu równań (5.49).

6. Obliczenie wartości własnych układu równań różniczkowych

Problem obliczania wartości własnych często występuje przy rozwiązywaniu układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

Układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu (5.49) przekształcono stosując zamianę zmiennych:

$$(6.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$$

Otrzymano układ równań w zapisie wektorowym w postaci:

$$(6.2) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} są macierzami kwadratowymi stopnia 7, których wyrazy wyprowadzono w p. 5 niniejszej pracy i podano w p. 8. Równanie (6.2) przekształcono na podstawie pracy [14] wprowadzając nowe zmienne \mathbf{p} określone wzorem

$$(6.3) \quad \mathbf{p} = \dot{\mathbf{y}}.$$

Układ (6.2) po wprowadzeniu (6.3) zapisano w postaci

$$(6.4) \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{C}\mathbf{y} = 0.$$

Rozwiązanie układu równań (6.3) i (6.4) o 14 niewiadomych \mathbf{y} i \mathbf{p} , jest kombinacją liniową rozwiązań typu

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}e^{\bar{\lambda}t}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{b}e^{\bar{\lambda}t},$$

gdzie

$$(6.5) \quad \bar{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

i na podstawie (6.3) i (6.4) daje to równanie

$$(6.6) \quad \mathbf{A}\bar{\lambda}\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{b} + \mathbf{C}\mathbf{a} = 0$$

Równania (6.5) i (6.6) można zapisać w postaci jednego równania macierzowego [14]

$$(6.7) \quad \bar{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Wprowadzając nowe oznaczenia macierzy w (6.7) otrzymano

$$(6.8) \quad \bar{\lambda}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{Q}\mathbf{z},$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \text{ macierz kwadratowa stopnia 14,}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \text{ macierz kwadratowa stopnia 14,}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ wektor o 14 składowych.}$$

Mnożąc lewostronnie układ równań (6.8) przez macierz \mathbf{P}^{-1} otrzymano

$$(6.9) \quad |\mathbf{R} - \bar{\lambda}\mathbf{I}| \mathbf{z} = 0,$$

gdzie

$$(6.10) \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}.$$

Wartości własne macierzy \mathbf{R} są tymi wartościami parametru $\bar{\lambda}$, dla których

$$(6.11) \quad |\mathbf{R} - \bar{\lambda}\mathbf{I}| = 0.$$

Macierz \mathbf{R} jest macierzą kwadratową w omawianym przypadku stopnia 14. Ze względu na występowanie sił aerodynamicznych macierz \mathbf{R} jest macierzą niesymetryczną.

Istniejące metody obliczania wartości własnych macierzy symetrycznych [14] nie mogą być zastosowane bezpośrednio do macierzy niesymetrycznych. Obliczanie wartości włas-

nych macierzy niesymetrycznych jest często kłopotliwe i nie daje tak zadowalających wyników jak dla macierzy symetrycznych.

Wartości własne macierzy niesymetrycznej **R** wyznaczono opierając się na pracach [8 i 9].

Macierz **R** doprowadzono do dolnej macierzy trójkątnej Λ_1 za pomocą macierzy ortogonalnej τ_1 , otrzymanej w wyniku pomnożenia prawostronnego elementarnych macierzy obrotu T_{ij}

$$(6.12) \quad \Lambda_1 = R_1 \tau_1,$$

gdzie

$$R_1 = R, \\ \tau_1 = T_{12} T_{13} \dots T_{23} \dots T_{ij},$$

przy czym

$$(6.13) \quad T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & c \dots \dots \dots s \dots \dots & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & 1 & & \\ & & & s \dots \dots \dots c \dots \dots & & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & & & \vdots & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & i & & & & & & j \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz T_{ij} (6.13) różni się od macierzy jednostkowej **I** elementami *c* i *s* określonymi przez (6.14):

$$(6.14) \quad c = \frac{r_{ii}}{\sqrt{r_{ii}^2 + r_{ij}^2}}, \quad s = \frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{ii}^2 + r_{ij}^2}},$$

Jeżeli otrzymaną macierz trójkątną dolną Λ_1 (6.12) pomnoży się lewostronnie przez macierz transponowaną τ_1' , otrzyma się macierz R_2 równoważną macierzy danej **R**:

$$(6.15) \quad R_2 = \tau_1' \Lambda_1.$$

Stosując powyższe operacje nad kolejno otrzymanymi macierzami **R**₁, **R**₂, **R**₃ ... **R**_k według następującego algorytmu

$$(6.16) \quad \begin{array}{ll} R_1 = R & \Lambda_1 = R_1 \tau_1, \\ R_2 = \tau_1' \Lambda_1, & \Lambda_2 = R_2 \tau_2, \\ \dots & \dots \\ R_k = \tau_{k-1}' \Lambda_{k-1}, & \Lambda_k = R_k \tau_k, \\ \dots & \dots \end{array}$$

to przy dostatecznie dużej ilości iteracji *k* macierz niesymetryczną kwadratową **R** sprowadzimy do macierzy **R**_k o postaci:

- w przypadku wartości własnych rzeczywistych do macierzy trójkątnej dolnej,
- w przypadku wartości własnych zespolonych do macierzy quasi-trójkątnej dolnej.

Wyznaczenie wartości własnych macierzy quasi-trójkątnej dolnej sprowadza się do rozwiązania szeregu równań algebraicznych kwadratowych.

Macierzy \mathbf{R}_k w zależności od rozkładu wartości własnych może być macierzą quasi-trójkątną dolną nieregularną. Ilość iteracji k zależna jest od wyrazów macierzy \mathbf{R} i jej stopnia. W trakcie prowadzenia obliczeń celowe jest zmniejszanie stopnia macierzy przez rozprzęganie na macierze mniejsze, z których bezpośrednio można wyznaczać wartości własne. Przy stosowaniu powyższej metody wyznaczania wartości własnych zmniejszenie stopnia macierzy o 2 powoduje skrócenie czasu jednej iteracji o połowę. Ilość iteracji może dochodzić w niektórych przypadkach do 1000 nawet dla macierzy czwartego stopnia. Numeryczne wyznaczanie wartości własnych macierzy niesymetrycznych wyższych stopni jest możliwe na szybko liczących cyfrowych maszynach elektronicznych. Dokładne omówienie i wyprowadzenie powyższej metody obliczania wartości własnych zawarte jest w pracach [8, 9].

Kryterium polegające na stabilizacji podwyznaczników macierzy \mathbf{A}_k [8], mające świadczyć o zakończeniu procesu iteracji macierzy quasi-trójkątnej \mathbf{R}_k , nie jest spełnione w przypadku dowolnej macierzy i nie może być stosowane.

Wygodne jest ułożenie programu obliczeń w ten sposób, by następowało zerowanie odpowiednich wyrazów macierzy \mathbf{R} . Wymaga to jednak kontroli macierzy \mathbf{R}_k ze względu na możliwość stabilizacji macierzy o postaci quasi-trójkątnej innej niż założona. Prowadzenie procesu iteracji aż do momentu otrzymania macierzy \mathbf{R}_k w postaci założonej może bardzo zwiększyć ilość iteracji.

Wartości własne macierzy \mathbf{R} otrzymano w postaci

$$(6.17) \quad \bar{\lambda}_j = \bar{\xi}_j + i\bar{\eta}_j,$$

gdzie $\bar{\xi}_j = \hat{\xi}_j t$ jest bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia, $\bar{\eta}_j = \hat{\eta}_j t$ oznacza częstość oscylacji.

Lot zespołu holującego jest stateczny, jeżeli wszystkie współczynniki tłumienia (części rzeczywiste wartości własnych) są ujemne:

$$(6.18) \quad \bar{\xi}_j < 0,$$

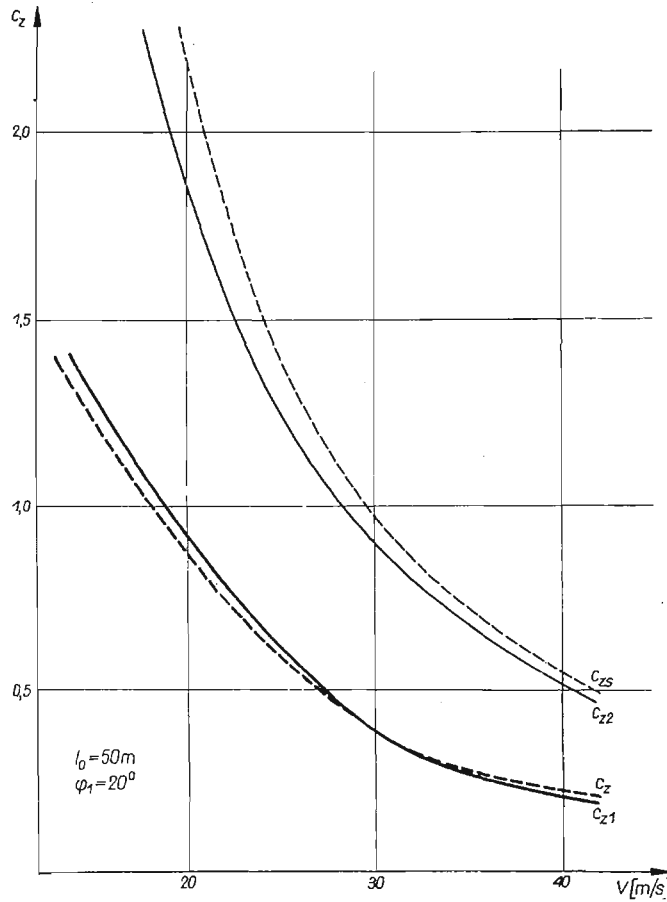
tzn. ruch jest tłumiony, samolot i szybowiec w locie na holu są stateczne dynamicznie.

7. Przykład liczbowy i wnioski

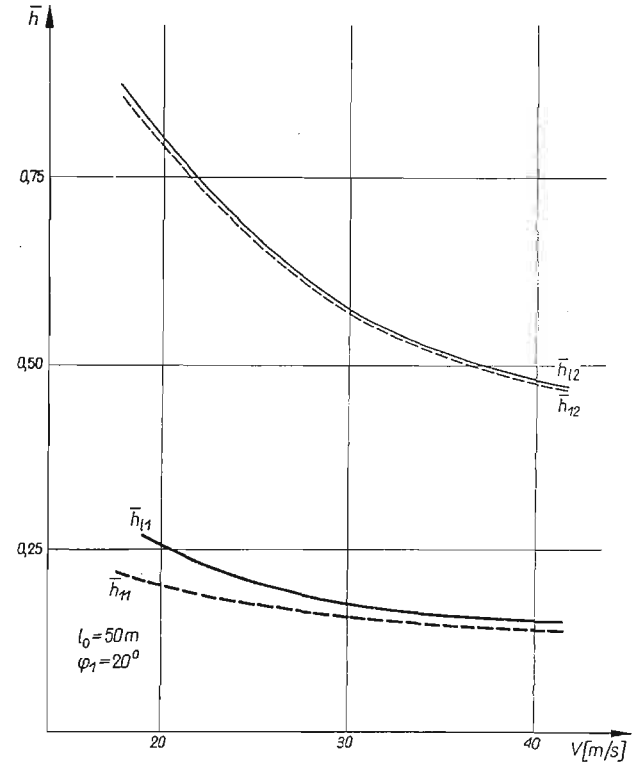
Obliczenia przykładowe przeprowadzono dla jednego z szybowców wyczynowych [12] i samolotu przystosowanego do holowania [20]. Obliczenia uwzględniają zmianę dwóch parametrów w locie na holu, zmianę prędkości holowania i zmianę położenia szybowca względem samolotu holującego. Do obliczeń przyjęto linię o długości $l_0 = 50$ m opisaną w (12) jako linię najczęściej używaną w eksploatacji.

Na rys. 9–16 liniami cienkimi naniesiono zmianę parametrów odnoszących się do samolotu holującego, a linie grube dotyczą szybowca holowanego. W przypadku rys. 9, 10, 13 i 14 linie ciągłe charakteryzują lot na holu, a linie przerywane lot swobodny w warunkach równoważnych lotowi na holu. Na rys. 11, 12, 15 i 16 naniesiono liniami ciągłymi zmianę współczynników tłumienia ($\bar{\xi}$), a liniami przerywanymi zmianę częstości

[369]



Rys. 8. Zmiana współczynników siły nośnej w funkcji prędkości szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego



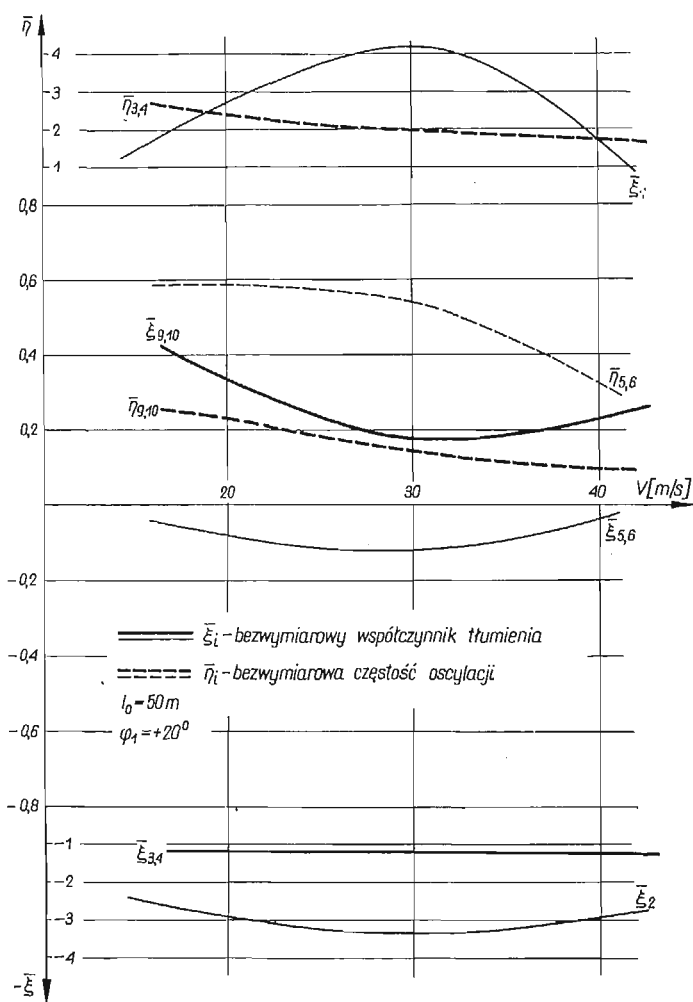
Rys. 9. Zmiana zapasu «stateczności statycznej» w funkcji prędkości szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego

oscylacji ($\bar{\eta}$) w funkcji parametrów holowania. Wszystkie obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER według programów w języku GIER-ALGOL III.

7.1. Wpływ prędkości holowania na stateczność szybowca w locie na holu i stateczność samolotu holującego. Obliczenia numeryczne wykonano przy stałej długości liny $l_0 = 50$ m i kącie holu $\varphi_1 = 20^\circ$ dla szeregu prędkości holowania.

Korzystając z prac [4, 12] określono współczynnik siły nośnej szybowca w locie swobodnym C_z i w locie na holu C_{z1} , następnie z (3.13) obliczono współczynnik siły nośnej samolotu holującego C_{z2} . Zmiany tych współczynników w funkcji prędkości przedstawiono na rys. 8.

Wraz ze wzrostem prędkości występuje zmniejszenie współczynników siły nośnej samolotu holującego i szybowca oraz różnicy między współczynnikami w locie swobodnym C_z i C_{zs} a współczynnikami odpowiadającymi lotowi na holu C_{z1} i C_{z2} .



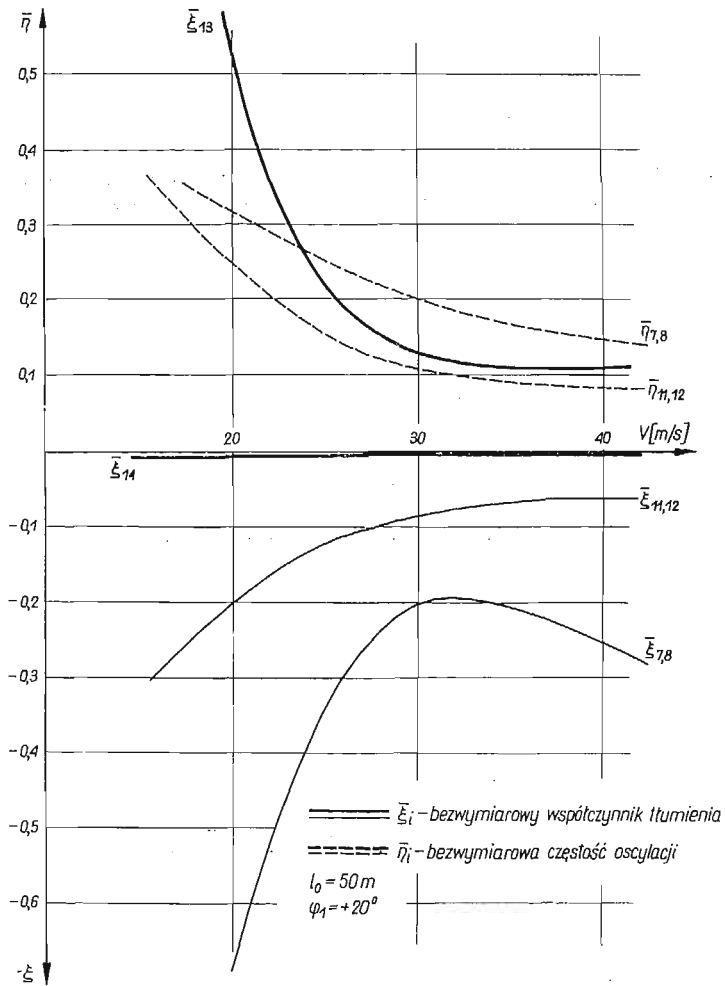
Rys. 10. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)

W locie na holu osiągnięcie C_{zmax} przez szybowiec występuje na prędkości większej niż w locie swobodnym (rys. 8), powoduje to «przepadnięcie» szybowca na prędkości większej od prędkości minimalnej V_{min} lotu swobodnego.

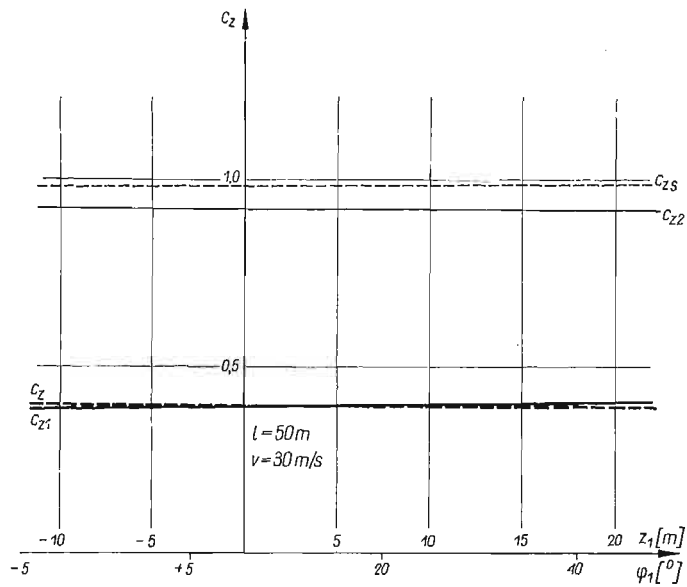
Zmianę zapasu stateczności statycznej szybowca \bar{h}_{h1} i samolotu \bar{h}_{h2} w funkcji prędkości przedstawiono na rys. 9. W locie holowanym występuje niewielki wzrost zapasu stateczności statycznej \bar{h}_{h1} i \bar{h}_{h2} w stosunku do zapasów \bar{h}_{h1} i \bar{h}_{h2} odpowiadających lotowi swobodnemu (rys. 9).

Wzrost stateczności statycznej w locie na holu nie może świadczyć o wzroście stateczności dynamicznej.

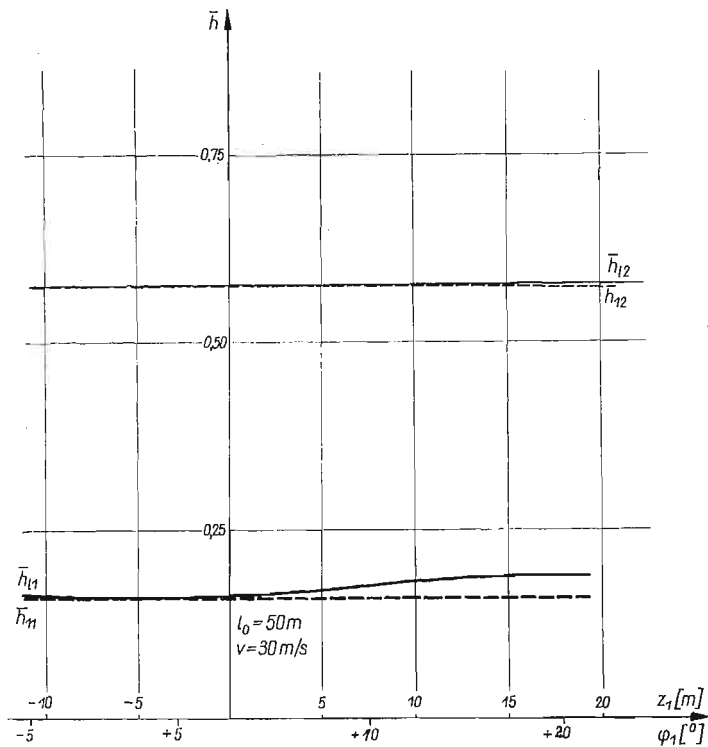
Wartości własne o postaci (6.17) obliczono numerycznie według algorytmu (6.16). Zmianę wartości własnych w funkcji prędkości przedstawiono na rys. 10 i 11. Jak widzimy, kryterium stateczności (6.18) nie jest spełnione. Lot na holu z trzymanym sterem jest



Rys. 11. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości, odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)



Rys. 12. Zmiana współczynników siły nośnej w funkcji położenia szybowca względem samolotu, szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego

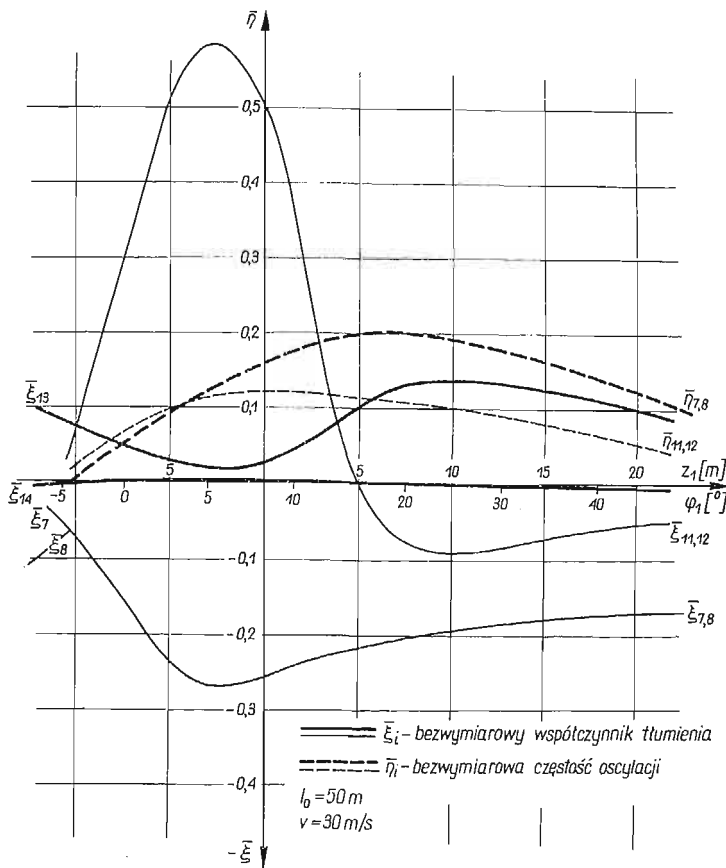


Rys. 13. Zmiana zapasu «stateczności statycznej» w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego, szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego

lotem niestatecznym, co potwierdza wyniki pracy [12]. Oscylacje szybkie szybowca holowanego $\eta_{3,4}$ i samolotu holującego $\eta_{5,6}$ są tłumione zawsze niezależnie od prędkości holowania $\bar{\xi}_{3,4} < 0$ i $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ (rys. 10 i 11).

Wahania fugoidalne samolotu holującego $\eta_{11,12}$ są w rozpatrywanym przypadku tłumione $\bar{\xi}_{11,12} < 0$, natomiast wahania szybowca holowanego $\eta_{9,10}$ wykazują słabą rozbieżność $\bar{\xi}_{9,10} > 0$ (rys. 10 i 11). Występuje niestateczność ruchów aperiodycznych zespołu holowniczego $\bar{\xi}_{13} > 0$ i $\bar{\xi}_1 > 0$ polegająca na pionowym przemieszczaniu się szybowca względem samolotu holującego. Ruchy te wymagają interwencji pilota.

7.2. Wpływ położenia szybowca względem samolotu holującego na stateczność. Szybowiec jest holowany na linii o długości $l_0 = 50$ m ze stałą prędkością $V = 30$ m/s. Szybowiec może przemieszczać się w płaszczyźnie pionowej względem linii lotu samolotu holującego.

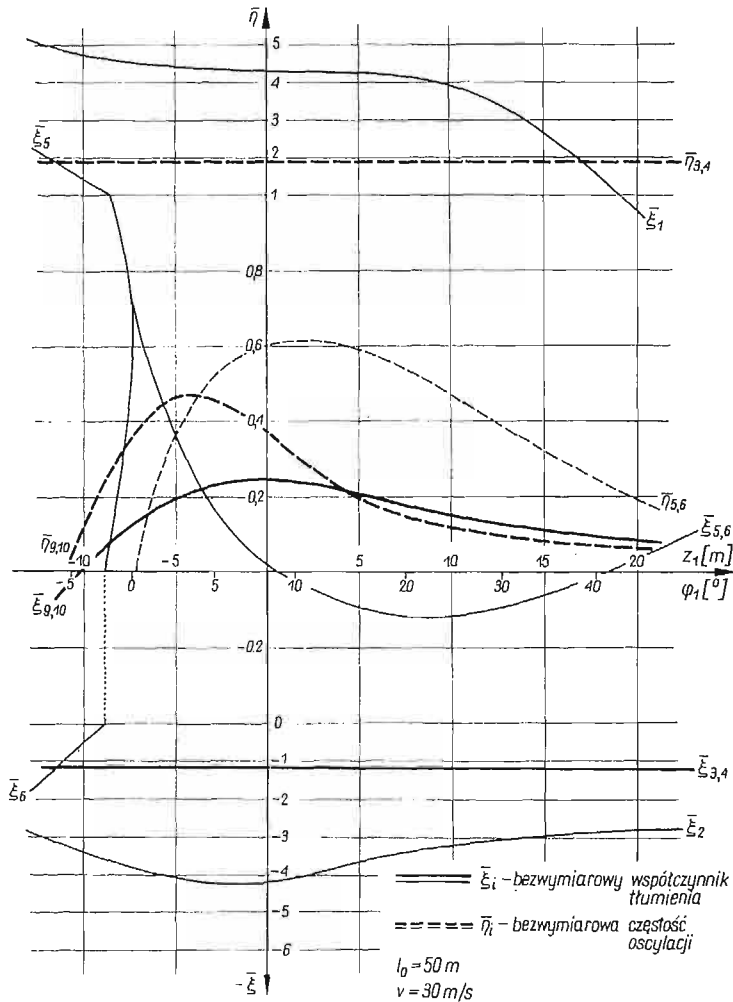


Rys. 14. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego, odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)

Z rysunku 12 wynika, że położenie szybowca względem samolotu praktycznie nie wpływa na zmianę współczynników siły nośnej szybowca C_{z1} i samolotu C_{z2} . Na rysunku 13 przedstawiono zmianę stateczności statycznej szybowca h_{h1} i samolotu h_{h2} w funkcji po-

łożenia szybowca względem linii lotu samolotu holującego. Położenie szybowca powyżej linii lotu powoduje niewielki wzrost zapasu stateczności statycznej.

Zmianę bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji ($\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$) w funkcji położenia szybowca względem samolotu przedstawiono na rys. 14 i 15. Położenie szybowca względem samolotu holującego ma bardzo duży wpływ na charakter ruchu, jaki wystąpi po zakłóceniu stanu równowagi.



Rys. 15. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego, odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)

Zmiana położenia szybowca nie wpływa na częstość oscylacji szybkich szybowca $\bar{\eta}_{3,4}$ i ich tłumienie $\bar{\xi}_{3,4} < 0$, natomiast ma wpływ na tłumienie wahań fugoidalnych $\bar{\xi}_{9,10}$ (rys. 15 i 14). Z rysunku 15 wynika że najkorzystniejsze położenie szybowca względem samolotu holującego jest takie, w którym szybowiec znajduje się w linii lotu z samolotem

holującym lub poniżej. W takim położeniu występuje zarówno tłumienie oscylacji szybkich $\bar{\xi}_{3,4} < 0$ jak i wahań fugoidalnych $\bar{\xi}_{9,10} < 0$.

7.3. Wnioski. Z powyższych rozważań wypływają wnioski dotyczące parametrów holowania.

1. W położeniu górnym szybowca względem samolotu holującego występuje możliwość wcześniejszego «przeciągnięcia» szybowca niż samolotu (rys. 8).

2. W locie na holu «przeciągnięcia» szybowca może wystąpić przy prędkości holowania większej od prędkości minimalnej w locie swobodnym, $V_{hmin} < V_{min}$ (rys. 8).

3. Większe prędkości holowania powodują zmniejszenie rozbieżności wahań fugoidalnych szybowca, tzn. wpływają ustateczniająco na holowany szybowiec (rys. 10).

4. Położenie szybowca względem samolotu holującego ma wpływ na wahanía fugoidalne szybowca i samolotu holującego (rys. 15). Korzystniejsze jest dla szybowca położenie poniżej linii lotu samolotu holującego, gdyż powoduje to tłumienie wahań fugoidalnych (rys. 15).

5. Lot na holu jest lotem niestatecznym matematycznie, występują wartości własne, których części rzeczywiste są dodatnie nawet przy większych prędkościach holowania (rys. 10, 11, 14 i 15). Pociąga to za sobą konieczność reakcji pilota na zakłócenia zewnętrzne.

Wnioski powyższe pokrywają się jakościowo i wykazują dużą zgodność ilościową z wnioskami wypływającymi z pracy [12], w której rozpatrzono uproszczoną stateczność dynamiczną podłużną szybowca holowanego przez samolot o nieskończonej masie.

8. Pochodne linowe, pochodne aerodynamiczne samolotu holującego i wyrazy macierzy A, B, C i D

8.1. Pochodne linowe. Pochodne linowe składowych poziomej i pionowej siły działającej na zaczep holowniczy szybowca holowanego mają postać:

$$X_{x_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + n \sin^3 \varphi_1 (z_1 - l_1 \sin \varphi_2)],$$

$$X_{z_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) + n \sin^3 \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_2 - x_1)],$$

$$Z_{x_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (z_1 - l_1 \sin \varphi_1)],$$

$$Z_{z_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (l_1 \cos \varphi_2 - x_1)],$$

gdzie

$$\delta = x_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + z_1 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) - l_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$n = \frac{1}{2} \rho V^2 d C_n,$$

$$l_1 = l_0 (1 + \lambda T_1),$$

wielkości x_1 , z_1 , l_1 , φ_1 i φ_2 są przedstawione na rys. 3.

Pochodne linowe składowych poziomej i pionowej siły działającej na zaczep holowniczy samolotu holującego względem przesunięcia poziomego i pionowego mają postać:

$$X_{x_2}^l = \frac{1}{\delta} [T_2 \cos \varphi_2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) + n \sin^3 \varphi_2 (z_1 - l_1 \sin \varphi_1)],$$

$$X_{z_2}^l = \frac{1}{\delta} [T_2 \cos \varphi_2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + n \sin^3 \varphi_2 (l_1 \cos \varphi_1 - x_1)],$$

$$Z'_{x_2} = \frac{1}{\delta} [T_2 \sin \varphi_2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) - (q + u \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2) (z_1 - l_1 \sin \varphi_1)],$$

$$Z'_{z_2} = \frac{1}{\delta} [T_2 \sin \varphi_2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) - (q + u \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2) (l_1 \cos \varphi_1 - x_1)].$$

8.2. Pochodne aerodynamiczne samolotu. Korzystając z [3, 4, 12, 15, 20] w niniejszej pracy podano w formie ostatecznej pochodne aerodynamiczne dla samolotu holującego, stosowane w zakresie małych prędkości (ściśliwości powietrza nie uwzględniono).

Pochodne aerodynamiczne sił i momentów aerodynamicznych względem zmian prędkości w postaci wymiarowej są następujące:

$$X_{u_2} = -\rho S_2 V \left[C_{x_2} + \frac{m_{H_1}}{2} (C_{x_2} + \bar{C}_{x_1}) \right],$$

$$X_{w_2} = \frac{1}{2} \rho S_2 V \left(C_{z_2} - \frac{\partial C_{x_2}}{\partial \alpha_2} \right),$$

$$Z_{u_2} = -\rho S_2 V C_{z_2},$$

$$Z_{w_2} = -\frac{1}{2} \rho S_2 V (C_{x_2} + a_{18}),$$

$$M_{u_2} = \rho S_2 V \left[C_{m_2} l_{a_2} - \frac{m_{H_1} z_{H_1}}{2} (C_{x_2} + \bar{C}_{x_1}) \right].$$

Pochodne aerodynamiczne sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot holujący względem zmian kątowej prędkości pochylania mają postać:

$$X_{q_2} = \rho S_2 V l_{H_2} \left[0,6 \frac{S_{H_2}}{S_2} \left(C_{x_{H_2}} - \frac{\partial C_{x_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \right) + \frac{1}{2 S_2 l_{H_2}} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \left(C_{z_2} - \frac{\partial C_{x_2}}{\partial \alpha_2} \right) l_{x_2} dy \right],$$

$$Z_{q_2} = -\rho S_2 V l_{H_2} \left[0,6 \frac{S_{H_2}}{S_2} \left(C_{x_{H_2}} + \frac{\partial C_{z_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \right) + \frac{1}{2 S l_{H_2}} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \left(0,75 - \frac{l_{K_2}}{l_2} \right) \frac{dC_z}{d\alpha} l_2^2 dy \right],$$

$$M_{q_2} = -\rho S_2 V l_{H_2}^2 \left\{ 0,6 \frac{S_{H_2}}{S_2} \left(C_{x_{H_2}} + \frac{\partial C_{z_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \right) - \frac{1}{S l_{H_2}^2} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \left[\frac{1}{8} \frac{dC_z}{d\alpha} \left(1 - 2 \frac{l_{K_2}}{l_2} \right)^2 + \frac{1}{32} \left(2\pi - \frac{dC_z}{d\alpha} \right) \right] l_2^2 dy \right\}.$$

Pochodna aerodynamiczna momentu pochylającego samolotu holującego względem prędkości zmiany kąta natarcia:

$$M_{\dot{w}_2} = -\frac{1}{2} \rho S_{H_2} l_{H_2}^2 \frac{\partial C_{z_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \frac{d\epsilon_2}{d\alpha_2}.$$

Pochodna aerodynamiczna momentu pochylającego względem zmian prędkości pionowej zależy zarówno od własności aerodynamicznych samolotu holującego, jak również od konfiguracji i charakterystyki liny holowniczej

$$M_{w_2} = \frac{1}{2} \rho S_2 V l_{a_2} a_s \bar{h}_{h_2},$$

gdzie \bar{h}_{h_2} jest zapasem stateczności statycznej samolotu holującego określonej wzorem (3.4).

8.3. Wyrazy macierzy A, B, C i D. Poniżej podano w postaci bezwymiarowej współczynniki równań przedstawione w ostatecznej formie.

Wyrazy macierzy A — bezwymiarowe współczynniki bezwładności:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left(\frac{Q_1}{g} + \frac{8L_T}{x_1^2} \right) \frac{g}{Q_1}, & a_{12} = a_{21} &= -\frac{8L_T}{x_1^2} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{13} = a_{14} = -a_{23} = -a_{24} = a_{31} = -a_{32} = a_{41} = -a_{42} &= -\frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{15} = -a_{25} &= -\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{16} = -a_{26} &= \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{17} = -a_{27} = a_{71} = -a_{72} &= -\frac{32L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1}, & a_{22} &= \left(\frac{Q_2}{g} + \frac{8L_T}{x_1^2} \right) \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{33} = \left(\frac{Q_1}{g} + \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right) \frac{g}{Q_1}, & a_{34} = a_{43} &= \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{35} = a_{45} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{36} = a_{46} &= -\left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{37} = a_{47} = a_{73} = a_{74} = a_{77} &= \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{44} &= \left(\frac{Q_2}{g} + \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right) \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{51} = -a_{52} &= -\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{53} &= \left[\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} - M_{w1} \right] \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{54} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{55} &= \left[J_1 + \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right)^2 \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right] \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2 l_{H1}}, \\
 a_{56} = a_{65} &= -\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2 l_{H1}}, \\
 a_{57} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{61} = -a_{62} &= \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{63} &= -\left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{64} &= -\left[\left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} + M_{w2} \right] \frac{g}{Q_1 l_{H1}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{66} &= \left[J_2 + \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right)^2 \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right] \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2 l_{H1}}, \\
 a_{67} &= - \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{75} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{76} &= - \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_z \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}.
 \end{aligned}$$

Wyrazy macierzy **B** — bezwymiarowe współczynniki tłumienia:

$$\begin{aligned}
 &b_{12} = b_{14} = b_{16} = b_{17} = b_{21} = b_{23} = b_{25} = b_{27} = \\
 &= b_{32} = b_{34} = b_{36} = b_{37} = b_{41} = b_{43} = b_{45} = b_{47} = \\
 &= b_{52} = b_{54} = b_{56} = b_{57} = b_{61} = b_{63} = b_{65} = b_{67} = \\
 &= b_{71} = b_{72} = b_{73} = b_{74} = b_{75} = b_{76} = b_{77} = 0, \\
 &b_{11} = -X_{u1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{13} = -X_{w1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{15} = -X_{q1} \frac{g}{Q_1 V}, \\
 &b_{22} = -X_{u2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{24} = -X_{w2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{26} = -X_{q2} \frac{g}{Q_1 V}, \\
 &b_{31} = -Z_{u1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{33} = -Z_{w1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{35} = -Z_{q1} \frac{g}{Q_1 V}, \\
 &b_{42} = -Z_{u2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{44} = -Z_{w2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{46} = -Z_{q2} \frac{g}{Q_1 V}, \\
 &b_{51} = -M_{u1} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{53} = -M_{w1} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{55} = -(M_{w1} U_1 + M_{q1}) \frac{g}{Q_1 V l_{H1}}, \\
 &b_{62} = -M_{u2} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{64} = -M_{w2} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{66} = -(M_{w2} U_1 + M_{q2}) \frac{g}{Q_1 V l_{H1}},
 \end{aligned}$$

Wyrazy macierzy **C** — bezwymiarowe współczynniki sztywności:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \left\{ \frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_1 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x1}^l) L_N] + 2(X_{x1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{12} &= - \left\{ \frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_1 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x2}^l) L_N] + 2(X_{x1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{13} &= -c_{14} \frac{X_{z1}^l}{X_{z1}^l} = X_{z1}^l \left(-\frac{2L_N}{x_1} - 2X_{x1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{15} &= \left\{ -X_{w1} U_1 - \frac{2h_{z1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \frac{2}{x_1^2} [(X_{x1}^l x_1 - T_1 \cos \varphi_1) h_{z1} + \right. \\
 &\quad \left. + X_{z1}^l x_1 k_{z1}] L_N - 2X_{x1}^l (X_{x1}^l h_{z1} + X_{z1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{16} &= \left\{ \frac{2h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) + \frac{2}{x_1^2} [(X_{x2}^l x_1 - T_1 \cos \varphi_1) h_{z2} + \right. \\
 &\quad \left. - X_{z2}^l x_1 k_{z2}] L_N + 2X_{x1}^l (X_{x1}^l h_{z2} - X_{z1}^l k_{z2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{17} &= -c_{27} = \frac{16L_N X_1^2}{q x_1^3} \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{21} &= \left\{ -\frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_2 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x_1}^l) L_N] - 2(X_{x_1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{22} &= -\left\{ -\frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_1 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x_2}^l) L_N] - 2(X_{x_1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{23} &= -c_{24} \frac{X_{z_1}^l}{X_{z_2}^l} = X_{z_1}^l \left(\frac{2L_N}{x_1} + 2X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{25} &= \left\{ \frac{2h_{z_1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \frac{2}{x_1^2} [(T_1 \cos \varphi_1 - X_{x_1}^l x_1) h_{z_1} - X_{z_1}^l x_1 k_{z_1}] L_N + \right. \\
 &\quad \left. + 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_S \right\} \frac{1}{q S_1 V^2}, \\
 c_{26} &= \left\{ X_{w_2} U_1 - \frac{2h_{z_2}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \frac{2}{x_1^2} (X_{x_2}^l x_1 h_2 - \right. \\
 &\quad \left. - T_1 h_{z_2} \cos \varphi_1 - X_{z_2}^l x_1 k_{z_2}) L_N - 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_2} - X_{z_1}^l k_{z_2}) L_S \right\} \frac{1}{q S_1 V^2}, \\
 c_{31} &= -c_{32} = \left(-\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{x_1}^l L_N - 2X_{z_1}^l X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{33} &= \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_1}^l L_N + 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{34} &= -\left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_2}^l L_N + 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{35} &= \left[-Z_{w_1} U_1 + \frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_S \right] \frac{1}{q S_1 V^2}, \\
 c_{36} &= \left[-\frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_2}^l h_{z_2} - X_{z_2}^l k_{z_2}) L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_2} - X_{z_1}^l k_{z_2}) L_S \right] \frac{1}{q S_1 V^2}, \\
 c_{37} = c_{47} &= -\frac{32X_1^3}{q x_1^4} L_N \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{41} &= \left(-\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{x_1}^l L_N + 2X_{z_1}^l X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{42} &= -\left(-\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{x_2}^l L_N + 2X_{z_1}^l X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{43} &= \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_1}^l L_N - 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{44} &= -\left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_2}^l L_N - 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{q S_1 V^2}, \\
 c_{45} &= \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_S \right] \frac{1}{q S_1 V^2}, \\
 c_{46} &= \left[-Z_{w_2} U_1 - \frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_2}^l h_{z_2} - X_{z_2}^l k_{z_2}) L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_2} - X_{z_1}^l k_{z_2}) L_S \right] \frac{1}{q S_1 V^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{51} &= \left\{ -\frac{2h_{z1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{x_1}^l - \frac{2h_{z1}}{x_1^2} X_1 \right] L_N - \right. \\
&\quad \left. - 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{52} &= - \left\{ -\frac{2h_{z1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{x_2}^l - \frac{2h_{z1}}{x_1^2} X_1 \right] L_N - \right. \\
&\quad \left. - 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{53} &= \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{z_1}^l L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{54} &= - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{z_2}^l L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{55} &= - \left\{ -M_{w1} U_1 + \frac{2h_{z1}^2}{x_1^2} (L_V + L_P) + 2(X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1})^2 L_S - \right. \\
&\quad \left. - \left[2T_1 \cos \varphi_1 \frac{h_{z1}^2}{x_1^2} - \left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) \right] L_N \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}}, \\
c_{56} &= \left\{ -\frac{2h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) - 2(X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S + \right. \\
&\quad \left. + \left[2T_1 \cos \varphi_1 \frac{h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} - \left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) (X_{x_2}^l h_{z2} + X_{z_2}^l k_{z2}) \right] NT \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}}, \\
c_{57} &= -\frac{16X_1^2}{q x_1^3} \left(\frac{2X_1}{q x_1} k_{z1} + h_{z1} \right) L_N \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{61} &= \left\{ \frac{2h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) + \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) X_{x_1}^l - \frac{2h_{z2}}{x_1^2} X_1 \right] L_N + \right. \\
&\quad \left. + 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{62} &= - \left\{ \frac{2h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) + \left[X_{x_2}^l \left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) - \frac{2h_{z2}}{x_1^2} X_1 \right] L_N + \right. \\
&\quad \left. + 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{63} &= \left[-\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) X_{z_1}^l L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{64} &= - \left[-\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) X_{z_2}^l L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{65} &= \left\{ -\frac{2h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} X_1 \right] L_N - 2(X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}}, \\
c_{66} &= \left\{ -M_{w2} U_1 + \frac{2h_{z2}^2}{x_1^2} (L_V + L_P) + \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) (X_{x_2}^l h_{z2} - X_{z_2}^l k_{z2}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - T_1 \cos \varphi_1 \frac{h_{z2}^2}{x_1^2} \right] L_N + 2(X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2})^2 L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}},
\end{aligned}$$

$$c_{61} = \frac{16X_1^2}{q x_1^3} \left(\frac{2X_1}{q x_1} k_{z2} + h_{z2} \right) L_N \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{71} = -c_{72} \frac{X'_{x_1}}{X'_{x_2}} = -c_{73} \frac{X'_{x_1}}{X'_{z_2}} = c_{74} \frac{X'_{x_1}}{X'_{z_2}} = -\frac{8X_1}{q x_1^2} X'_{x_1} L_N \frac{l_{H1}}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{75} = \frac{8X_1}{q x_1^2} (X'_{x_1} h_{z1} + X'_{z_1} k_{z1}) L_N \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{76} = -\frac{8X_1}{q x_1^2} (X'_{x_2} h_{z2} - X'_{z_2} k_{z2}) L_N \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{77} = -\frac{64X_1^2}{q^2 x_1^4} L_N \frac{l_{H1}}{\rho S_1 V^2}.$$

Wyrazy macierzy **D** — bezwymiarowe wyrazy wolne:

$$d_1 = -d_2 = 2 \left[-\frac{1}{x_1} (L_V + L_P) + T_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{L_N}{x_1} + X'_{x_1} L_S \right) \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$d_3 = \left[-Q_1 + \frac{4X_1}{q x_1^2} (L_V + L_P - T_1 \cos \varphi_1 L_N) - 2T_1 \cos \varphi_1 X'_{z_1} L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$d_4 = \left[-Q_2 + \frac{4X_1}{q x_1^2} (L_V + L_P - T_1 \cos \varphi_1 L_N) + 2T_1 \cos \varphi_1 X'_{z_1} L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$d_5 = \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} L_V + \frac{2L_P}{q x_1^2} (2X_1 k_{z1} + q x_1 h_{z1}) + 2T_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{2X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{h_{z1}}{x_1} \right) L_N - \right. \\ \left. - 2T_1 \cos \varphi_1 (X'_{x_1} h_{z1} + X'_{z_1} k_{z1}) L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2 l_{H1}},$$

$$d_6 = \left[-\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} L_V - \frac{2L_P}{q x_1^2} (2X_1 k_{z2} + q x_1 h_{z2}) + 2T_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{2X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{h_{z2}}{x_1} \right) L_N + \right. \\ \left. + 2T_1 \cos \varphi_1 (X'_{x_1} h_{z2} - X'_{z_1} k_{z2}) L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2 l_{H1}},$$

$$d_7 = \frac{8X_1}{q x_1^2} (L_V + L_P - T_1 \cos \varphi_1 L_N) \frac{1}{\rho S_1 V^2}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. Э. И. БУРМАН, *Анализ влияния буксирного троса на картину флаттера планера*, Исследования по теории пластин и оболочек, Сборник II, Издательство Казанского Университета, 1964.
2. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected Researches on the Stability of Kites and Towed Gliders*, Reports and Memoranda Nr 2303, 1942.
3. В. ЕТКИН, *Dynamics of flight*, New York-London 1959.
4. W. FISZDON, *Mechanika Lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
5. F. JANIК, *O obciążeniach w locie holowanym*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa, Nr 11, Warszawa 1933.
6. В. К. КАЧУРИН, *Гибкие нити с малыми стрелками*, Москва 1956.
7. W. KACZURIN, *Teoria konstrukcji wiszących*, Arkady, Warszawa 1965.
8. В. Н. КУБЛАНОВСКАЯ, *О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений*, Доклады Академии Наук СССР, 136 (1961).

9. В. Н. КУБЛАНОВСКАЯ, *О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений*, Журнал вычислительной математики и математической физики, том I (1961).
10. В. Н. КУБЛАНОВСКАЯ, *Решение проблемы собственных значений для произвольной матрицы*, Труды математического института имени В. А. Стеклова, Издательство Академии Наук СССР, 14 (1962).
11. E. ŁUCZYWEK, *Analiza metody związków całkowych w zastosowaniu do badania opływu ciał tępych naddźwiękowym strumieniem gazu*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1965.
12. J. MARYNIAK, *Uproszczona stateczność podłużna szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret. Stos. 1, 5 (1967).
13. S. NEUMARK, *Equilibrium Configurations of Flying Cables of Captive Balloons, and Cable Derivatives for Stability Calculations*, Reports and Memoranda, Nr 3333. 1963.
14. *Nowoczesne metody numeryczne*, — Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
15. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолёта*, Москва 1957.
16. J. R. PESKIN, I. N. RABINOWICZ, *Fortran differential Equation Solution Package (Runge-Kutta)*, Princeton University, Technical Memorandum, Nr 75, 1959.
17. K. PETRIKAT, E. PIERUSCHKA, *Die Stabilitätsbedingungen des Fieseler-Deichselschepps*, Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung.
18. J. RŻYSKO, A. WILCZYŃSKI, *Uwzględnienie sprężystości podpór w procesie drgań zamocowanych na stale lin nośnych*, Prace Katedry Mechaniki Technicznej, Zeszyt 2-1965. Wydawnictwo Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Warszawskiej.
19. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960.
20. E. Mzyk, *Wejście w podmuch samolotu PZL — 104 Wilga 2*, Sprawozdanie Katedry Mechaniki Politechniki Warszawskiej Nr 48 (nie publikowane).

Резюме

ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАНЕРА В БУКСИРНОМ КОМПЛЕКСЕ

В работе рассматривается буксир жесткого планера жестким самолетом на тяжелом, гибком и упругом буксирном тросе, на который влияют аэродинамические силы. Буксирный комплекс (буксирующий самолет + буксирный трос + буксируемый планер) перед возмущением находился в горизонтальном, прямолинейном, установившемся полете. С использованием уравнений Лагранжа второго рода, выведены дифференциальные уравнения движения, представленные после линеаризации в линейной форме. Получена система семи дифференциальных обыкновенных уравнений второго рода с постоянными коэффициентами. Их решение приведено к проблеме определения собственных значений для произвольной матрицы, имеющей в рассматриваемом случае четырнадцатый порядок. На основе численных методов, для одного типа планера и буксирующего самолета, исследовано влияние положения планера относительно буксирующего самолета и скорости буксировки на устойчивость планера. Выводы:

1. Поскольку во время буксирного полета минимальная скорость планера может быть меньше чем минимальная скорость самолета, то следует определить безопасную скорость буксировки.
2. Большие скорости буксира гарантируют увеличение динамической устойчивости планера.
3. Более полезным положением планера является его положение по линии буксирующего самолета или ниже его.
4. Полет буксирного комплекса является математически неустойчивым. Даже для больших скоростей буксира выступают небольшие расхождения аperiodических движений, требующие интервенции пилота после внешних возмущений.

S u m m a r y

DYNAMIC LONGITUDINAL STABILITY OF A TOWED SAILPLANE

The problem of longitudinal dynamic stability of the rigid glider towed behind the rigid aircraft with heavy and flexible towing rope affected by aerodynamic forces, has been considered. Before the disturbance had occurred the aircraft as well as the glider performed horizontal, straightlinear, steady flight. Using the second kind Lagrange's equations, differential equations of motion have been derived. After the linearization had been performed, the system consisted of seven ordinary, second order differential equations with constant coefficients. The solution of the system consists in finding out the eigenvalues of asymmetric (arbitrary) matrices, which were of the fourteenth order in the case considered. By means of numerical calculations, the influence of the reciprocal location of the typical aircraft and the high-performance typical glider on the stability of the glider, has been investigated. The results are as follows:

1. Since it is possible to reach the critical angle of attack first at the glider and afterwards at the aircraft, the minimum towing velocity should be determined.
2. The stability of the glider increases with increasing the towing velocity.
3. The order to increase the stability, the glider should fly in the line of- or below the aircraft.
4. In all cases the towed glider is slightly unstable and even at higher velocities there exist some divergences of the aperiodic motions, calling the intervention of pilot.

KATEDRA MECHANIKI WYDZ. MEIL.
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 listopada 1966 r.