

FALE POWIERZCHNIOWE W OŚRODKU Z NAPRĘŻENIAMI MOMENTOWYMI

CZESŁAW RYMARZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przeprowadzone eksperymenty [1] wykazały, że teoria sprężystości nie jest w stanie opisać dostatecznie poprawnie zjawisk w miejscach, gdzie występują duże gradienty naprężeń (obszary ich koncentracji). Przepuszczalnie zaczyna się tam przejawiać dyskretna polikrystaliczna struktura materii. Stąd też rozbieżności między opisem teoretycznym i eksperymentem będą tym większe, im bardziej gruboziarnisty będzie badany materiał.

Zmusza to do poszukiwania innych metod opisu tych zjawisk, wśród których dominującą rolę odgrywają nadal metody fenomenologiczne, posługujące się pojęciem ośrodka ciągłego. Lepszy opis teoretyczny zjawisk można uzyskać drogą wzbogacenia oddziaływań wewnętrznych w ośrodku kontynuualnym. Przez wyróżniony myślowo przekrój przenosi się nie tylko siła, ale i moment powierzchniowy, co powoduje istnienie naprężeń momentowych w ośrodku. Były one stosowane uprzednio w teorii powłok. Do teorii ośrodka ciągłego wprowadzili je bracia Cosseraci w 1909 r. Wprowadzenie tensora napięć momentowych do opisu stanu mechanicznego kontinuum powoduje niesymetrię tensora napięć oraz zmusza do rozważania wzbogaconego obrazu stanu deformacji przez uwzględnienie w równaniach konstytutywnych wyższych gradientów deformacji, gradientów obrotu lub wprowadzenie dodatkowych lokalnych stopni swobody. Ta rozwinięta struktura deformacji jest w stanie lepiej modelować rzeczywiste własności materii i uchwycić efekty dodatkowych oddziaływań o postaci sił niecentralnych.

Różnorodne materiały mogą przy tym wymagać rozmaicie określonego stanu deformacji, który będzie dobrze opisywał ich własności mechaniczne. Zagadnieniom tym poświęcono wiele prac [2–6].

W przedstawionej pracy będziemy opierać się głównie na metodzie podanej przez KOITERA [3] i rozszerzonej na zagadnienia dynamiczne termosprężone przez NOWACKIEGO [7]. Metoda powyższa posługuje się pojęciem ośrodka ciągłego o trzech geometrycznych stopniach swobody przy uwzględnieniu w równaniach stanu gradientów obrotu wyrażalnych przez rotację wektora przemieszczeń. Wprowadza się nowe wielkości mechaniczne takie, jak wektor sił momentowych Y , wektor momentów powierzchniowych g oraz tensor naprężeń momentowych μ_{ij} .

Celem tej pracy jest zbadanie w oparciu o wyżej wymienione prace zagadnień związanych z falami powierzchniowymi w tak określonym ośrodku (rodzaj ośrodka Cosseratów). Badania takie są szczególnie cenne dla zagadnień propagacji fal bardzo krótkich (ultradźwięki), gdyż wówczas mogą pojawić się nowe efekty związane z rzeczywistą budową ziarnistą materii.

Autor zdaje sobie sprawę z faktu, że sens tak określonego ośrodka, w którym naprężenia momentowe są równoważone tylko przez orbitalny moment pędu i przez niesymetryczną część tensora napięć, może budzić wątpliwości. Jednak wyżej określony ośrodek Cosseratów nie wykazuje cech wewnętrznej sprzeczności, jeżeli chodzi o zasady zachowania, może więc być rozpatrywany jako jeden z możliwych modeli ośrodków w celu dostarczenia materiału do porównania z innymi typami ośrodków.

W punkcie 2 przedstawiono w sposób zwięzły najważniejsze relacje opisujące stany dynamiczne rozważanego ośrodka. W punkcie 3 określa się obszary istnienia fal powierzchniowych i wyznacza się podstawowe równania dyspersyjne. W punkcie 4 przeprowadza się analizę uzyskanych wyników liczbowych i formułuje się szereg wniosków dotyczących badanego ośrodka. W zakończeniu podaje się perspektywy wykorzystania otrzymanych wyników przy dalszych badaniach ośrodków Cosseratów.

2. Podstawy teorii termosprężonych procesów dynamicznych

Zasady zachowania pędu i momentu pędu w rozważanym ośrodku Cosseratów wyrażają się następująco:

$$(2.1) \quad \sigma_{ji,j} + \rho X_i - \rho \ddot{u}_i = 0,$$

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + \rho Y_i = 0;$$

μ_{ij} oznacza tensor napięć momentowych, Y_i wektor sił momentowych, pozostałe wielkości mają takie samo znaczenie jak w klasycznym ośrodku sprężystym.

Tensor napięć jest obecnie tensorem niesymetrycznym. Jednak jego część antysymetryczna wyraża się w oparciu o (2.2) następująco:

$$(2.3) \quad r_{mn} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} (\mu_{ji,j} + \rho Y_i).$$

Po uwzględnieniu (2.3) równanie ruchu (zachowania pędu) przyjmuje postać:

$$(2.4) \quad s_{mn,m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} [m_{ji,jm} + (\rho Y_i)_{,m}] + \rho X_n - \rho \ddot{u}_n = 0,$$

gdzie m_{ij} oznacza część dewiatorową tensora naprężeń momentowych, s_{mn} część symetryczną tensora naprężeń.

Pochodna gęstości energii wewnętrznej wyraża się następująco:

$$(2.5) \quad \dot{U} = s_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ij} \dot{\kappa}_{ij} - q_{i,i},$$

gdzie

$$\dot{\kappa}_{ij} = \dot{\omega}_{i,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \dot{u}_{n,mj}.$$

Gęstość energii wewnętrznej zależy tutaj od gradientów obrotu κ_{ij} , co jest konsekwencją przyjętego modelu.

Funkcja energii swobodnej dla ośrodka izotropowego ma następującą postać:

$$(2.6) \quad F = \mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} (\gamma_{kk})^2 + \mu' \kappa_{ij} \kappa_{ij} + \mu'' \kappa_{ij} \kappa_{ji} - \beta \gamma_{kk} \theta - \frac{m}{2} \theta^2.$$

Wynikają stąd równania konstytutywne dla rozważanego ośrodka:

$$(2.7) \quad s_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda(\gamma_{kk} - \beta\theta)\delta_{ij}, \quad m_{ij} = 4\mu l^2(\alpha_{ij} + \eta\kappa_{ji}),$$

gdzie β jest stałą sprzężenia termomechanicznego, λ , μ stałe Lamégo, l , η nowe stałe materiałowe.

Po wstawieniu równań konstytutywnych do równania ruchu otrzymujemy układ równań w przemieszczeniach:

$$(2.8) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{i,ji} - \mu l^2(u_{i,jj} - u_{j,ij})_{,kk} + X_i - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}Y_{k,j} = \ddot{u}_i + \beta\theta_{,i}.$$

W rozważanym ośrodku można postawić pięć niezależnych warunków brzegowych:

$$(2.9) \quad \left[s_{hl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{hkl}(m_{jk,j} - m_{(nn),k} + Y_k) \right] n_h = \bar{p}_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$(2.10) \quad m_{jh}n_j - m_{(nn)}n_h = \bar{g}_h.$$

Poza tym powinien być również spełniony warunek konturowy na konturach ograniczających gładkie części powierzchni⁽¹⁾:

$$(2.11) \quad Q = \frac{1}{2} [m_{(nn)+} - m_{(nn)-}].$$

Przedstawione relacje pozwolą zbadać własności fal powierzchniowych.

3. Fale powierzchniowe w półprzestrzeni

Jak wiadomo, rozwiązanie zadania polega na określeniu rozwiązań szczególnych równań ruchu (2.8) malejących w kierunku osi x_3 niezależnych od x_2 (fala płaska) oraz spełniających jednorodne warunki naprężeniowe (2.9), (2.10) na płaszczyźnie $x_3 = 0$ (rys. 1). Należy również zbadać warunki gwarantujące istnienie tego typu rozwiązań.

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań wyrażmy warunki brzegowe w przemieszczeniach.

Ponieważ w rozważanym przypadku $n = (0, 0, 1)$, stąd

$$(3.1) \quad m_{(nn)} = m_{ij}n_jn_i = m_{33}. \quad (\text{nie sumować}).$$

Zauważmy następnie, że tensor dewiator jest w tym przypadku tensorem antysymetrycznym, co wynika z własności tensora Ricciego oraz z poniższej zależności:

$$(3.2) \quad m_{ij} = 4\mu l^2(\varepsilon_{jkl}u_{l,ki} + \eta\varepsilon_{ikl}u_{l,kj}).$$

Przyjmując następnie w myśl założenia o falach powierzchniowych $Y_k = 0$ otrzymamy z (2.9)

$$(3.3) \quad \left(s_{hl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{hkl}m_{jk,j} \right) n_h = \bar{p}_l.$$

Po dokonaniu szeregu przekształceń i uwzględnieniu (3.2) związek (3.3) przyjmuje postać:

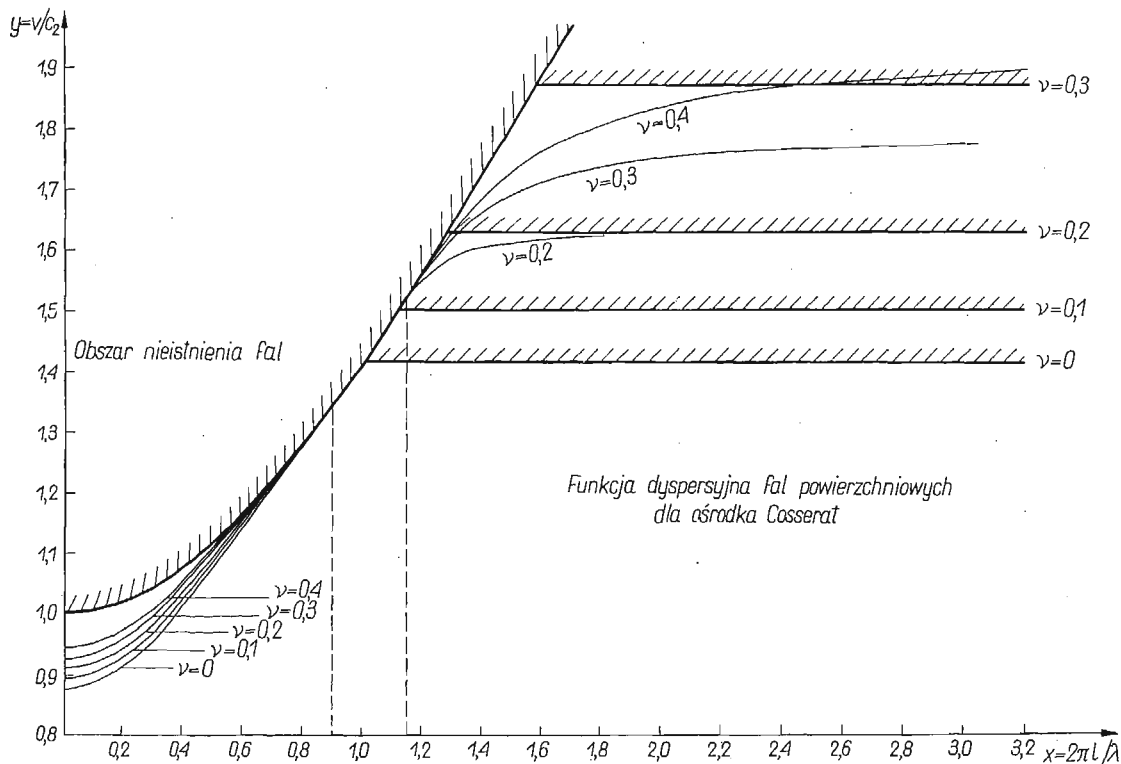
$$(3.4) \quad (s_{hl} + 2\mu l^2 u_{[h,l],j,j}) n_h = \bar{p}_l,$$

⁽¹⁾ Przedstawione wyżej relacje są zawarte w [3, 7]. Umieszczono je tutaj w celu nadania pracy większej przejrzystości.

co po uwzględnieniu postaci równania konstytutywnego dla s_{hl} można zapisać następująco:

$$(3.5) \quad \lambda \delta_{hl} u_{k,k} + \mu [u_{(h,l)} + l^2 u_{[h,l],kk}] n_h = \bar{p}_l,$$

gdzie $u_{(h,l)}$, $u_{[h,l]}$ są częścią symetryczną i antysymetryczną tensora gradientów przemieszczeń. Widać stąd, że po założeniu $l = 0$, otrzyma się klasyczne warunki dla składowych wektora sił powierzchniowych.



Rys. 1

Ponieważ dla rozważanego przypadku mamy $n_h = \delta_{3h}$, zatem

$$(3.6) \quad \lambda \delta_{3l} u_{k,k} + \mu [u_{(3,l)} + l^2 u_{[3,l],kk}] = \bar{p}_l.$$

Widoczne jest, że dla składowej normalnej ($l = 3$) otrzymuje się zawsze warunki klasyczne ($u_{[3,3]} = 0$).

Równania dla składowych wektora momentów powierzchniowych po rozpisaniu i uwzględnieniu faktu, że $m_{(nn)} = 0$ przyjmują postać

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u_{3,23} - u_{2,33} + \eta (u_{2,11} - u_{1,21}) &= \frac{\bar{g}_1}{2\mu l^2}, \\ u_{1,33} - u_{3,13} + \eta (u_{1,22} - u_{2,12}) &= \frac{\bar{g}_2}{2\mu l^2}. \end{aligned}$$

Poszukiwanie rozwiązań dla fal powierzchniowych w postaci fal płaskich ($u_2 = 0$) powoduje automatyczne spełnienie jednego z równań ruchu, jednego z jednorodnych warunków brzegowych (3.6) (dla $l = 2$) oraz warunku jednorodnego (3.7)₁.

Z uwagi na rozważania procesów dynamicznych można przyjąć, że będą im towarzyszyły przemiany adiabatyczne, co z uwagi na brak wewnętrznych źródeł entropii prowadzi do jej zachowania:

$$(3.8) \quad \dot{s} = \beta_T \dot{\gamma}_{kk} + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \dot{\theta} = 0.$$

Stąd

$$\theta_{,i} = -\frac{\beta_T}{c_\varepsilon T_0} u_{k,ki}.$$

Pozwala to wyeliminować gradient temperatury z równań ruchu (2.8):

$$(3.9) \quad \mu_T u_{i,jj} + \lambda_s u_{j,ij} - \mu_T l^2 (u_{i,jj} - u_{j,ij})_{,kk} = \rho \ddot{u}_i,$$

gdzie μ_T , λ_T — stałe Lamégo dla procesu izotermicznego

$$(3.10) \quad \lambda_s = \lambda_T + \frac{\beta_T^2}{c_\varepsilon T_0}.$$

Po dokonaniu rozkładu wektora przemieszczeń otrzymujemy ogólnie

$$(3.10) \quad u_i = \Phi_{,i} + \varepsilon_{ijk} \Psi_{k,j}$$

oraz dla zagadnienia płaskiego

$$(3.10a) \quad u_1 = \Phi_{,1} + \Psi_{,3}, \quad u_3 = \Phi_{,3} - \Psi_{,1}.$$

Po podstawieniu (3.10a) do (3.9) otrzymuje się równanie rozprężone dla potencjałów Φ , Ψ :

$$(3.11) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_{1a}^2} \partial_t^2 \right) \Phi = 0, \quad \left[(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right] \Psi = 0,$$

gdzie

$$c_{1a}^2 = \frac{\lambda_s + 2\mu_T}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_T}{\rho}.$$

W myśl poczynionych założeń rozwiązania dla funkcji Φ , Ψ przewidujemy w postaci:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Phi &= A e^{-\alpha x_3 + i(kx_1 - \omega t)}, \\ \Psi &= B e^{-\beta x_3 + i(kx_1 - \omega t)}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu przewidywanych rozwiązań do równań (3.11) otrzymuje się następujące związki między parametrami.

Z równania (3.11)₁

$$(3.13) \quad \alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_{1a}^2};$$

z równania (3.11)₂

$$(3.14) \quad (\beta^2 - k^2) [1 - l^2(\beta^2 - k^2)] + \frac{\omega^2}{c_2^2} = 0,$$

a po rozwiązaniu względem β^2 :

$$(3.15) \quad \beta_{1,2}^2 = k^2 + \frac{1}{2l^2} \pm \sqrt{\frac{1}{l^4} + \frac{4\omega^2}{c_2^2 l^2}}.$$

Jak widać, wartości $\beta_{1,2}^2$ będą zawsze rzeczywiste, co gwarantuje istnienie fal powierzchniowych monotonicznie zanikających z głębokością (w kierunku osi x_3).

Wymaganie, aby β_1, β_2 były liczbami rzeczywistymi, prowadzi do warunku

$$(3.16) \quad \frac{v}{c_2} \leq \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2},$$

gdzie $v = \omega/k$ oznacza prędkość fazową fal powierzchniowych, a λ długość fali. Nierówność powyższa oraz nierówność

$$(3.17) \quad \frac{v}{c_{1a}} \leq 1$$

wynikająca z (3.13) określają obszar istnienia fal powierzchniowych na płaszczyźnie $(v/c_2, l/\lambda)$.

Bliższą analizę tego obszaru przeprowadzimy w punkcie 4. Żądanie spełnienia jednorodnych naprężeniowych warunków brzegowych na płaszczyźnie $x_3 = 0$ prowadzi w oparciu o (3.6) i (3.7) do zależności dla funkcji Φ, Ψ :

$$(3.18) \quad \begin{aligned} (\lambda_s + 2\mu_T)\Phi_{,33} + \lambda_s\Phi_{,11} - 2\mu_T\Psi_{,13} &= 0, \\ 2\Phi_{,13} + \Psi_{,33} - \Phi_{,11} - l^2\nabla^2\nabla^2\Psi &= 0, \quad \nabla^2\Psi_{,3} = 0. \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że w warunki brzegowe nie wchodzi nigdzie stała materiałowa η , co ułatwia znacznie prowadzenie dalszych rozważań.

Warunek brzegowy konturowy (2.11) jest spełniony automatycznie ze względu na ciągłość wektora normalnego (gładkość powierzchni).

Po podstawieniu (3.12) do (3.18) otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych jednorodnych dla stałych dowolnych A, B_1, B_2 :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} [(\lambda_s + 2\mu)\alpha^2 - \lambda_s k^2]A + 2\mu ik\beta_1 B_1 + 2\mu ik\beta_2 B_2 &= 0, \\ -2ik\alpha A + [k^2 + \beta_1^2 - l^2(\beta_1^2 - k^2)^2]B_1 + [k^2 + \beta_2^2 - l^2(\beta_2^2 - k^2)^2]B_2 &= 0, \\ \beta_1(\beta_1^2 - k^2)B_1 + \beta_2(\beta_2^2 - k^2)B_2 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\mu_T = \mu$.

Wymaganie istnienia nietrywialnych rozwiązań powyższego układu prowadzi do żądania zerowania się jego wyznacznika

$$(3.20) \quad D = \begin{vmatrix} (\lambda_s + 2\mu)\alpha^2 - \lambda_s k^2 & 2\mu ik\beta_1 & 2\mu ik\beta_2 \\ -2ik\alpha & k^2 + \beta_1^2 - l^2(\beta_1^2 - k^2)^2 & k^2 + \beta_2^2 - l^2(\beta_2^2 - k^2)^2 \\ 0 & \beta_1(\beta_1^2 - k^2) & \beta_2(\beta_2^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu wyznacznika względem ostatniego wiersza i dokonaniu szeregu przekształceń otrzymujemy

$$(3.21) \quad \left[2\mu k^2 - (\lambda_s + 2\mu) \frac{\omega^2}{c_{1a}^2} \right] \left[2k^2 + \frac{1}{4l^2} (1-p^2) \right] [\beta_2(1-p) - \beta_1(1+p)] = -8\mu k^2 \alpha p \beta_1 \beta_2,$$

gdzie

$$p = \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 l^2}{c_2^2}};$$

stąd po dalszych przekształceniach dochodzimy do zależności

$$(3.22) \quad \left[2 - \left(\frac{v}{c_2} \right)^2 \right]^4 \left[\left(1 + \frac{2\omega^2 l^2}{c_2^2} \right) \left(k^2 l^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{2\omega^2 l^2}{c_2^2} + \right. \\ \left. + 2\beta_1 \beta_2 \frac{\omega^2 l^2}{c_2^2} \right] = 16 \left(1 + \frac{4\omega^2 l^2}{c_2^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c_{1a}^2} \right) \left[k^2 l^2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_2^2 k^2} \right]$$

lub po wprowadzeniu oznaczeń $v/c_2 = y$, $kl = 2\pi l/\lambda = x$

$$(3.23) \quad [2 - y^2]^4 [1 + 2y^2 x^4 + x^2 + 3x^2 y^2 + 2x^2 y^2 \sqrt{x^2 + 1 - y^2}] = \\ = 16(1 + 4x^2 y^2)(1 - \gamma y^2)(x^2 + 1 - y^2),$$

gdzie $\gamma = \mu/(\lambda_s + 2\mu)$.

Jeżeli w (3.23) przyjąć $l = 0$ ($x = 0$), otrzymuje się równanie charakterystyczne dla klasycznych fal Rayleigha:

$$(3.24) \quad (2 - y^2)^4 = 16(1 - \gamma y^2)(1 - y^2).$$

Z równania (3.23) można określić przebieg zależności opisującej własności dyspersyjne rozważanego ośrodka.

Jak widzimy, fale powierzchniowe w rozważanym ośrodku ulegają dyspersji. Jest to wynikiem paraboliczności układu równań w przemieszczeniach (3.9), która wiąże się z niejednakowym rzędem pochodnych czasowych i przestrzennych.

Gdyby wprowadzić w ośrodku dodatkowe stopnie swobody, uwzględniające własności dynamiczne cząstek przy obrocie, wówczas uzyskano by układ równań hiperbolicznych.

Należy stwierdzić, że w pracy [8] uzyskano również rozwiązania charakteryzujące się dyspersją przy uwzględnieniu w funkcji gęstości działania drugich gradientów deformacji. Należy przypuszczać, że wszystkie ośrodki z rozwiniętą strukturą deformacyjną będą wykazywały cechy dyspersyjne.

Wyznamy jeszcze pole przemieszczeń towarzyszące falom powierzchniowym. Na podstawie (3.10a) i (3.12)

$$(3.25) \quad u_1 = \operatorname{Re} [A i k e^{-\alpha x_3 + i\varphi} + B_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} + B_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}], \\ u_3 = \operatorname{Re} [-A \alpha e^{-\alpha x_3 + i\varphi} + B_1 i k e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} + B_2 i k e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}],$$

gdzie $\varphi = kx_1 - \omega t$.

Wykorzystując liniową zależność stałych B_1 , B_2 od stałej A otrzymujemy po szeregu przekształceń:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} u_1 &= A \operatorname{Re} [ik e^{-\alpha x_3 + i\varphi} - in_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} - in_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}], \\ u_3 &= A \operatorname{Re} [-\alpha e^{-\alpha x_3 + i\varphi} + n_1 k e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} + n_2 k e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.27) \quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{\frac{x}{2}(2-y^2)^2 - 2\tilde{\beta}_1 \sqrt{1-\gamma y^2}}{(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2)(2-y^2)}, \\ n_2 &= \frac{2\tilde{\beta}_1 \sqrt{1-\gamma y^2} - \frac{x}{2}(2-y^2)^2}{(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2)(2-y^2)}. \end{aligned}$$

Jeżeli w (3.26) przyjąć $l = 0$, otrzymuje się automatycznie wyrażenie na przemieszczenie dla fal Rayleigha.

4. Wyniki obliczeń i ich analiza

W oparciu o równanie (3.23) przeprowadzono na elektronicznej maszynie cyfrowej obliczenia funkcji dyspersyjnych dla liczb Poissona 0; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4 przy x zmieniającym się w przedziałach (0–3,5). Obliczono również krzywą stanowiącą granicę obszaru istnienia fal powierzchniowych. Całość obliczeń zilustrowano wykresem (rys. 1 na str. 339).

Jak wynika z uzyskanych wyników fale powierzchniowe nie istnieją dla całego zakresu zmiany liczb Poissona w pobliżu $x = 1$, tj. gdy długość fali staje się porównywalna z wymiarem charakterystycznym l (stała ośrodka).

Nieznamość dokładnego sensu fizycznego wielkości l oraz jej wartości liczbowej nie pozwala podać wnikliwszej interpretacji zaobserwowanego zjawiska. Istniejące w szeregu prac oszacowania l są sprzeczne. W [3] ocenia się ją jako wielkość makroskopową nie mającą w chwili obecnej wytłumaczenia na gruncie fizyki ciała stałego. W takim przypadku nie istniałyby pewne fale powierzchniowe z zakresu technicznie realizowanego, co jest zjawiskiem dość nieoczekiwanym. W pracy [4] wręcz przeciwnie przypisuje się l rozmiary mikroskopowe związane ze strukturą krystaliczną ciała. Rozważane zjawisko dotyczyłoby wówczas fal porównywalnych z rozmiarami sieci krystalicznej ciała.

Fale do zakresu kilkudziesięciu MHz, stanowiące bardzo małą część rozważanego zakresu, odznaczałyby się stosunkowo niewielką dyspersją i uwzględnienie dla nich efektów związanych z ośrodkiem Cosseratów nie miałyby praktycznego znaczenia. Jak wynika z [9], przeprowadzone badania statyczne przy zginaniu belek oraz badania stanów naprężeń wokół otworów o małych średnicach nie wykazały istnienia naprężeń momentowych. Powyższy fakt wskazywałby na to, że rzeczywiście l jest wielkością dość małą. Dlatego też uwzględnienie wpływu naprężeń momentowych miałyby znaczenie dla zagadnień dynamicznych w dziedzinie ultradźwięków o częstotliwości większej od kilkudziesięciu lub kilkuset MHz. Wtedy bowiem powinny dawać o sobie znać dodatkowe oddziaływania o dalekim zasięgu atomów sieci krystalicznej w materiale. Dlatego koncepcja, że l jest wielkością małą, wydaje się bardziej prawdopodobna.

Należy zauważyć ponadto, że dla $\nu = 0$ fale powierzchniowe nie istnieją począwszy od wartości $x = 0,8$. Bliższe badania wykazały jednak, że pierwiastki równania charakterystycznego leżą na linii $v/c_1 = 1$, stanowiącej brzeg obszaru istnienia fal powierzchniowych. Podobnie ma się sprawa z rozwiązaniem dla $\nu = 0,1$. Ogólnie więc istnienie fal powierzchniowych dla małych ν w tym zakresie jest dość problematyczne.

Ogólnie rzecz biorąc przebieg krzywej dyspersyjnej można scharakteryzować następująco:

dla małych wartości x przyrost prędkości fazowej jest dość znaczny, co powoduje, że krzywa wychodzi z obszaru istnienia. Obszar ten ograniczony jest krzywą $\sqrt{1+x^2}$ oraz prostą $v/c_{1a} = 1$;

dla dużych wartości x przyrost prędkości fazowej jest znacznie mniejszy, co powoduje powrót krzywej w obszar i ustalenie się wartości asymptotycznej leżącej tym bliżej linii $v/c_1 = 1$, im mniejsza jest liczba Poissona.

Tak więc widzimy, że dla dużych x prędkość fal powierzchniowych w ośrodku Cosseratów może znacznie przewyższać prędkości fal poprzecznych. Można to tłumaczyć tym, że dla długich fal na skutek znacznego wpływu gradientu obrotów dominującą rolę w fali powierzchniowej zaczynają odgrywać fale podłużne, a wpływ fal poprzecznych zanika z powodu kompensującego działania fali «skrętnej», pochodzącej od naprężeń momentowych. Fakt ten tłumaczy również zjawisko rozszerzania się obszaru istnienia fali.

5. Zakończenie

Przeprowadzone rozważania mogą być traktowane jako wstęp do badań własności dynamicznych ośrodków o bardziej rozwiniętej strukturze deformacyjnej, w szczególności ośrodków z dodatkowymi stopniami swobody. Weryfikacja poprawności przyjętych założeń o ośrodku, o którym wspomniano we wstępie, może być przeprowadzona w przyszłości w oparciu o wyniki badań nad dynamiką bardzo krótkich fal lub w oparciu o wyniki teorii zajmujących się badaniem krystalicznej struktury materii.

Na zakończenie autor tą drogą chciałby złożyć gorące podziękowanie dr D. ROGULI za szereg cennych uwag dotyczących merytorycznej strony problemu.

Literatura cytowana w tekście

1. R. E. PATERSON, *Notch-sensitivity. Metal fatigue* (ed. by G. SINES and J. L. WAISMAN) New York-Toronto-London 1959, 293–306.
2. E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Théorie de corps déformables*, Paris 1909.
3. W. T. KOTTER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proc. Kon. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Nr 1, 17–29, 30–34.
4. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress concentration*, Experimental Mechanics, 3, 1963, 1–7.
5. E. KRÖNER, International J. Engen Sci., 1, 1963, 261.
6. S. KALISKI, *O pewnym modelu ośrodka ciągłego z istotnie niesymetrycznym tensorem napięć*, Biul. WAT 4(116), 1962, 104–117.
7. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 14 (1967).
8. T. J. JARAMILLO, *A generalization of the energy function of elasticity theory*, Diss. Univ. of Chicago 1929.
9. J. SCHIJVE, *Note on couple-stresses*, J. Mech. and Phys. Solids, 2, 14 (1966).

Р е з ю м е

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В работе исследуются свойства поверхностных волн в среде с моментными напряжениями, благодаря которым можно учесть дополнительное взаимодействие частиц материала в областях со значительной концентрацией напряжений или в зонах, где существенно велики градиенты перемещений (диапазон коротких волн в динамических задачах).

Рассматривается среда с тремя локальными степенями свободы и с обогащенным описанием деформаций в виде градиентов вращения выражаемых через ротацию вектора перемещений (разновидность среды Коссера). Определены диапазоны существования поверхностных волн и исследованы дисперсионные свойства волн. Проведен анализ полученных числовых результатов.

S u m m a r y

SURFACE WAVES IN A MEDIUM WITH COUPLE-STRESSES

The properties of surface waves in a medium with couple stresses are investigated. Introduction of the couple stresses into the analysis enables us to take into consideration the additional interaction between particles occurring in the regions of high stress concentration or great displacement gradient (the range of short waves in dynamic problems).

A medium with three local degrees of freedom is considered, including as the additional elements of deformation the gradient of rotation expressed by rotation of the displacement vector (a special kind of the Cosserat medium). The regions of existence of surface waves are defined, and their dispersion properties are investigated. An analysis of numerical results is also presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 października 1966 r.
