

## ROZWIĄZANIA OSOBLIWE W OGÓLNEJ TEORII PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

RYSZARD GANOWICZ (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

W pracy niniejszej podane zostaną rozwiązania nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej kolejno siłą skupioną oraz momentem skupionym. Rozwiązania takie nazywać będziemy w dalszym ciągu pracy rozwiązaniami osobliwymi. Analogiczne rozwiązania znane są w teorii płyt cienkich [1, 2 i 3] oraz w teorii płyt Reissnera [4]. Zastosowanie ich jest bardzo szerokie. W zagadnieniach technicznych rozwiązania osobliwe są wykorzystywane przy budowaniu powierzchni wpływowych [5 i 6]. Znajdują one także zastosowanie przy rozpatrywaniu problemów nieciągłych warunków brzegowych teorii płyt. Poza tym w teorii sprężystości i w teorii płyt rozwiązania osobliwe są podstawą uzyskania związków całkowych między rozwiązaniami wewnątrz danego obszaru a wielkościami brzegowymi. Związki takie znane są w teorii sprężystości jako twierdzenie Somigliano. Otrzymuje się je w oparciu o rozwiązania osobliwe oraz w oparciu o twierdzenie o wzajemności. Podobne zresztą związki znane są w teorii funkcji harmonicznym [7]. Omówienie tych problemów dla płyt reissnerowskich i dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie podał autor w pracy [4].

W pracy niniejszej zajmiemy się ogólną teorią zginanych płyt trójwarstwowych podaną przez HOFFA [8]. W teorii tej przyjmuje się, że warstwy zewnętrzne tych płyt są jednakowe i spełniają wszystkie założenia teorii płyt cienkich. Natomiast odnośnie do warstwy środkowej zakłada się, że jest ona nieściśliwa i pracuje jedynie na naprężenia styczne  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$ . Z podanych wyżej założeń wynika, że przy zginaniu odkształcenia płyty trójwarstwowej są antysymetryczne względem jej powierzchni środkowej.

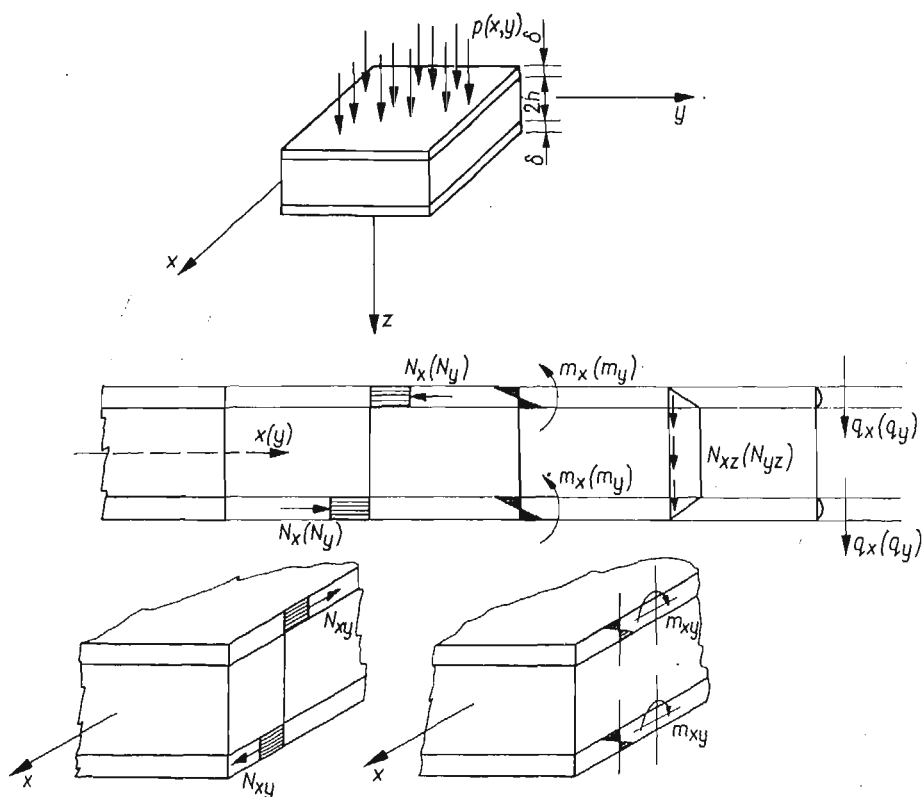
Rozwiązania otrzymane w niniejszej pracy są uogólnieniem wyników podanych przez autora dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie na ogólną teorię płyt trójwarstwowych [4 i 9].

### 2. Zasadnicze równania

Poniżej podamy związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami płyty trójwarstwowej oraz równania równowagi wyrażone przez przemieszczenia. Zależności te podamy w oparciu o pracę J. WACHOWIAKA i P. WILDEGO [10].

Siły wewnętrzne dla omawianych płyt podamy za wyżej wymienionymi autorami rozkładając je na siły tarczowe i na siły płytowe w warstwach zewnętrznych oraz na siły tnące w wypełnieniu.

Siły wewnętrzne określimy przez przemieszczenia następująco: (rys. 1)



Rys. 1

siły tarczowe

$$(2.1.1) \quad N_x = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$N_{xy} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

siły płytowe

$$(2.1.2) \quad m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w;$$

siły tnące w wypełnieniu

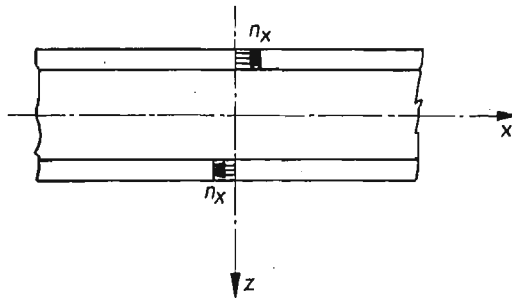
$$(2.1.3) \quad N_{xz} = G_w(2h+\delta) \left( \frac{u}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$N_{yz} = G_w(2h+\delta) \left( \frac{v}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 E, \nu & \text{ stałe materiałowe warstw zewnętrznych,} \\
 G_w = G_{xz} = G_{yz} & \text{ moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej,} \\
 D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} & \text{ sztywność na zginanie warstw zewnętrznych,} \\
 w & \text{ ugięcie płyty, jednakowe dla wszystkich warstw,} \\
 u, v & \text{ przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej (równe co do bezwzględnej} \\
 & \text{ wartości przemieszczeniom w płaszczyźnie środkowej warstwy górnej, lecz przeciwnie} \\
 & \text{ do nich skierowane).}
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pracy zajmiemy się płytami trójwarstwowymi poddanymi działaniu obciążenia normalnego  $p(x, y)$  oraz obciążonymi siłami  $n_x(x, y)$ ,  $n_y(x, y)$  w warstwach zewnętrznych (rys. 2). Założymy, że te ostatnie są równomiernie rozłożone na grubości



Rys. 2

warstw zewnętrznych i są przeciwnie skierowane w obu tych warstwach. Działanie tych sił odpowiada więc działaniu na całą płytę momentów zginających, rozłożonych w obszarze płyty.

Postępując podobnie jak w wyżej wymienionej pracy [10] otrzymamy następujący układ równań dla płyty poddanej działaniu obciążenia  $p(x, y)$ ,  $n_x(x, y)$  i  $n_y(x, y)$ :

(2.2)

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{D(1-\nu^2)}{E\delta} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{G_w(2h+\delta)^2 (1-\nu^2)}{4E\delta h} \nabla^2 \right] w - \frac{G_w(2h+\delta) (1-\nu^2)}{2E\delta h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1-\nu^2}{2E\delta} p, \\
 & - \frac{G_w(2h+\delta) (1-\nu^2)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial x} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{G_w(1-\nu^2)}{E\delta h} \right] u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1-\nu^2}{E\delta} n_x, \\
 & - \frac{G_w(2h+\delta) (1-\nu^2)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{G_w(1-\nu^2)}{E\delta h} \right] v = \frac{1-\nu^2}{E\delta} n_y.
 \end{aligned}$$

Powyższy układ trzech równań różniczkowych można sprowadzić do równań na trzy funkcje przemieszczeń [10 i 11]:

$$(2.3) \quad \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] \left[ 1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right] \nabla^2 \nabla^2 F_i = \frac{q_i}{D_z}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$q_1 = p(x, y), \quad q_2 = 2n_x(x, y), \quad q_3 = 2n_y(x, y),$$

$$D_z = \frac{E\delta(2h+\delta)^2}{2(1-\nu^2)} + 2D \quad \text{oznacza sztywność całkowitą płyty trójwarstwowej,}$$

$$\kappa = \frac{E\delta h}{G_w(1-\nu^2)} \quad \text{współczynnik podatności wypełnienia.}$$

Natomiast przemieszczenia wyznaczyć można ze związków

$$(2.4) \quad \begin{aligned} w &= (1-\kappa\nabla^2) \left[ 1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_1 - \frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_2 - \\ &\quad - \frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ 1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_3, \\ u &= -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_1 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \left\{ \nabla^2 \left[ 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] \right\} F_2 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] F_3 - \frac{Dh}{G_w} \nabla^2 \nabla^2 \left[ 1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F_2 - \\ &\quad - \frac{Dh}{G_w} \frac{1+\nu}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 F_3, \\ v &= -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ 1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_1 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] F_2 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \left\{ \nabla^2 \left[ 1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ 1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] \right\} F_3 - \frac{Dh}{G_w} \frac{1+\nu}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 F_2 - \\ &\quad - \frac{Dh}{G_w} \nabla^2 \nabla^2 \left[ 1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] F_3. \end{aligned}$$

Łatwo zauważymy, że jeżeli przyjmiemy, iż warstwy zewnętrzne płyty trójwarstwowej nie mają sztywności na zginanie ( $D = 0$ ), to zależności powyższe uproszczą się do zależności podanych przez autora w poprzednio cytowanej pracy [4].

Nadmienimy ponadto, że przypadek układu równań jednorodnych (2.3) został przedyskutowany w poprzednio cytowanej pracy [10].

### 3. Obciążenie siłą skupioną

Zajmiemy się nieograniczoną płytą trójwarstwową obciążoną siłą skupioną prostopadle do powierzchni środkowej. Obciążenie dla tego przypadku przedstawimy następująco:  $p(x, y) = P\delta(x)\delta(y)$ ,  $n_x(x, y) = n_y(x, y) = 0$ .

Wobec tego, że mamy do czynienia z płytą nieograniczoną, interesować nas będzie całka szczególna układu równań (2.3). Przyjmiemy więc  $F_2 = F_3 = 0$ . Układ równań (2.3) i zależności (2.4) uproszcza się w tym przypadku do postaci:

$$(3.1) \quad D_z \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] \left[ 1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right] \nabla^2 \nabla^2 F_1 = P \delta(x) \delta(y),$$

$$w = (1 - \kappa \nabla^2) \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] F_1, \quad u = -\frac{2h + \delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] F_1,$$

$$v = -\frac{2h + \delta}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] F_1.$$

Łatwo zauważyć, że w związkach powyższych można wyłączyć operator [10]

$$\left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] F_1 = U.$$

Ostatecznie otrzymamy więc następujące równanie

$$(3.2) \quad D_z \left( 1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 U = P \delta(x) \delta(y).$$

oraz związki między przemieszczeniami  $w$ ,  $u$ ,  $v$  a funkcją przemieszczeń  $U$

$$(3.3) \quad w = (1 - \kappa \nabla^2) U, \quad u = -\frac{2h + \delta}{2} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = -\frac{2h + \delta}{2} \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Przejdziemy teraz do rozwiązania naszego problemu. Wykonajmy na równaniu (3.2) nieskończoną podwójną transformację Fouriera [12]:

$$(3.4) \quad N^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi, \zeta) e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\xi d\zeta,$$

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

Biorąc pod uwagę, że  $p^*(\alpha, \beta) = P/2\pi$ , otrzymamy następujące wyrażenie na transformatę funkcji przemieszczeń:

$$(3.5) \quad U^*(\alpha, \beta) = \frac{P}{2\pi D_z} \frac{1}{\left[ 1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2) \right] (\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Po wykorzystaniu zależności (3.4) funkcję przemieszczeń  $U(x, y)$  przedstawimy w postaci całkowej:

$$(3.6) \quad U(x, y) = \frac{P}{4\pi^2 D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{\left[ 1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2) \right] (\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta.$$

Aby przedstawić rozwiązanie  $U(x, y)$  (3.6) w postaci wyraźnej, będziemy musieli obliczyć całkę występującą po prawej stronie powyższego wyrażenia. Przekształćmy tę całkę następująco:

$$(3.7) \quad U(x, y) = \frac{P}{4\pi^2 D_z} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta - \kappa \frac{2D}{D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta + \right. \\ \left. + \frac{4D^2 \kappa^2}{D_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta \right].$$

Dwie pierwsze całki, występujące po prawej stronie wyrażenia (3.7), nie istnieją jako całki niewłaściwe, nie można też wydzielić z nich wartości głównej według Cauchy'ego. Należy je rozumieć w sensie części skończonej [13, 14 i 4].

Wydzieleniem części skończonej całek rozbieżnych tego samego typu zajmował się autor w cytowanej poprzednio pracy [4]. Ażeby nie rozszerzać niniejszego opracowania, podamy poniżej jedynie końcowe wyniki tych obliczeń.

$$(3.8) \quad \text{p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta = \pi \frac{x^2 + y^2}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta = -2\pi \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ostatnią całkę występującą po prawej stronie wyrażenia (3.7) łatwo obliczymy jako całkę niewłaściwą:

$$R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\beta.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że [15]

$$(3.9) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\beta = \frac{D_z}{4\kappa D} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2}} \exp \left[ -y \sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2} \right], \quad y > 0,$$

to otrzymamy

$$(3.10) \quad R_1 = \frac{D_z}{2\kappa D} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \exp \left[ -y \sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2} \right]}{\sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2}} d\alpha = \\ = \frac{\pi D_z}{\kappa D} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \exp \left[ -y \sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2} \right]}{\sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2}} d\alpha = \frac{\pi D_z}{\kappa D} K_0 \left( \gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

gdzie  $K_0(z)$  oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju,  $\gamma_1 = \sqrt{D_z/2\kappa D}$ .

Wstawiając zależności (3.8) i (3.10) do związku (3.7) oraz wprowadzając jednostkę długości  $r_0$  otrzymamy poszukiwane rozwiązanie osobliwe funkcji przemieszczeń  $U(x, y)$

$$(3.11) \quad U(x, y) = \frac{P}{8\pi D_z} \left[ \frac{x^2 + y^2}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{2}{\gamma_1^2} \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{4}{\gamma_1^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right].$$

Reszta zadania jest już bardzo prosta. Znajdziemy teraz rozwiązania osobliwe przemieszczeń. Otrzymamy je wykorzystując rozwiązanie osobliwe  $U(x, y)$  (3.11) oraz zależności (3.3)

$$(3.12) \quad \begin{aligned} w &= \frac{P}{16\pi D_z} (x^2 + y^2) \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} - \frac{P\nu}{4\pi D_z} \left[ \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + 2 \right] + \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{P}{2\pi D_z} \times \\ &\quad \times \left[ \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0} + (1 - \gamma_1^2 \nu) K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\ u &= -\frac{P(2h + \delta)}{16\pi D_z} \left[ x \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + x \right] - \frac{P(2h + \delta)}{4\pi D_z \gamma_1^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\ v &= -\frac{P(2h + \delta)}{16\pi D_z} \left[ y \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + y \right] - \frac{P(2h + \delta)}{4\pi D_z \gamma_1^2} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli w zależnościach powyższych przyjmiemy  $D = 0$ ,  $2h/2h + \delta = 1$ , to otrzymamy podane przez autora we wcześniejszej pracy [9] rozwiązania osobliwe dla płyty trójwarstwowej o warstwach zewnętrznych pracujących jedynie na siły tarczowe.

Podamy jeszcze rozwiązania dla sił wewnętrznych w omawianym przypadku nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej siłą skupioną. Po wykorzystaniu rozwiązania dla funkcji przemieszczeń  $U(x, y)$  (3.11) oraz zależności (3.3) i (2.1) otrzymamy przykładowo

$$\begin{aligned} N_x &= -\frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{2h + \delta}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = -\frac{P}{8\pi(2h + \delta)} \frac{D_t}{D_z} \left[ \ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \cos^2 \varphi + 1 + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left( \ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \sin^2 \varphi + 1 \right) \right] - \frac{P}{2\pi(2h + \delta)} \frac{D_t}{D_z} \left\{ (\cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) K_0(\gamma_1 r) - \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \cos 2\varphi \left[ \frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) \right] \right\}, \\ N_{xy} &= -\frac{E\delta}{2(1 + \nu)} (2h + \delta) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{P}{8\pi(2h + \delta)} (1 - \nu) \frac{D_t}{D_z} \sin 2\varphi + \\ &\quad + \frac{P}{2\pi(2h + \delta)} (1 - \nu) \frac{D_t}{D_z} \sin 2\varphi \left[ \frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_1 r) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_x &= -D \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 U \right] = \\
 (3.13) \quad &= -\frac{P}{8\pi} \frac{D}{D_z} \left[ \ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \cos^2 \varphi + 1 + \nu \left( \ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \sin^2 \varphi + 1 \right) \right] + \\
 &+ \frac{P}{4\pi} \frac{D_t}{D_z} \left\{ (\cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) K_0(\gamma_1 r) - (1-\nu) \cos 2\varphi \left[ \frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1-\kappa \nabla^2) U = \\
 &= -\frac{P}{8\pi} (1-\nu) \frac{D}{D_z} \sin 2\varphi - \frac{P}{4\pi} (1-\nu) \frac{D_t}{D_z} \sin 2\varphi \left[ \frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_1 r) \right],
 \end{aligned}$$

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 (1-\kappa \nabla^2) U = -\frac{P}{2\pi} \frac{D}{D_z} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{P}{4\pi} \frac{D_t}{D_z} \gamma_1 \cos \varphi K_1(\gamma_1 r),$$

$$N_{xz} = -D_t \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 U = -\frac{P}{2\pi} \frac{D_t}{D_z} \frac{\cos \varphi}{r} + \frac{P}{2\pi} \frac{D_t}{D_z} \gamma_1 \cos \varphi K_1(\gamma_1 r),$$

gdzie oznaczono  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\sin \varphi = y/r$ ,  $\cos \varphi = x/r$

$$D_t = \frac{E \delta (2h + \delta)^2}{2(1-\nu^2)}.$$

Powyższe siły wewnętrzne nie mogą być porównywalne z odpowiednimi siłami wewnętrznymi znanymi w teorii płyt cienkich, ponieważ dotyczą one poszczególnych warstw. Porównywalne natomiast będą całkowite siły wewnętrzne, to znaczy siły wypadkowe dla całej płyty (rys. 3). Otrzymamy je z zależności

$$Q_x = N_{xz} + 2q_x = -\frac{P}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r},$$

$$(3.14) \quad M_x = N_x(2h + \delta) + 2m_x = -\frac{P}{8\pi} \left[ \ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \cos^2 \varphi + 1 + \nu \left( \ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \sin^2 \varphi + 1 \right) \right],$$

$$M_{xy} = N_{xy}(2h + \delta) + 2m_{xy} = -\frac{P}{8\pi} (1-\nu) \sin 2\varphi.$$

Jeżeli porównamy teraz otrzymane powyżej rozwiązania osobliwe wypadkowych sił wewnętrznych ze znanymi rozwiązaniami osobliwymi izotropowych płyt cienkich, to zauważymy, że są one identyczne. Zauważmy także, że powyższe wielkości (3.14) nie zależą od sztywności na zginanie warstw zewnętrznych  $D$ . Wobec tego przedstawiają one także rozwiązania osobliwe płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie (por. [9]).

Nadmienimy, że rozwiązanie osobliwe siły poprzecznej  $Q_x$  (3.14) łatwo otrzymać z warunku równowagi sił pionowych dla płyty kołowej wyciętej z płyty nieograniczonej

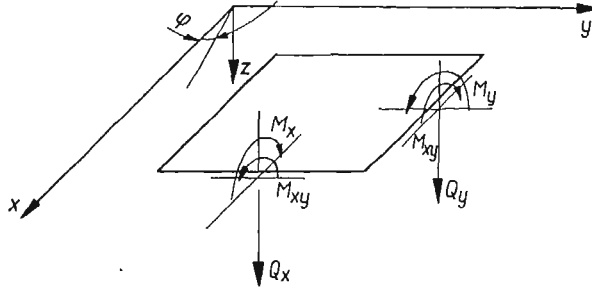


w ten sposób, że punkt przyłożenia siły skupionej pokryje się ze środkiem płyty kołowej. Wykorzystując kołową symetrię otrzymamy

$$(3.15) \quad Q_r = -\frac{P}{2\pi r},$$

a stąd

$$(3.16) \quad Q_x = -\frac{P}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad Q_y = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r}.$$



Rys. 3

Natomiast jeżeli chodzi o identyczność pozostałych wypadkowych wielkości statycznych (3.14) z odpowiednimi wielkościami znanymi w teorii płyt cienkich, to wynik ten, zdaniem autora, jest interesujący.

Oczywiście dla analizy stanu naprężenia płyty potrzebna jest znajomość sił wewnętrznych dotyczących poszczególnych warstw (3.13). Rozwiązania osobliwe sił wewnętrznych dotyczących poszczególnych warstw zawierają natomiast człony osobliwe, które w sposób istotny różnią je od znanych rozwiązań osobliwych teorii płyt cienkich.

Na zakończenie niniejszego rozdziału zanalizujemy jeszcze zachowanie się otrzymanych przez nas rozwiązań osobliwych ugięcia  $w$  (3.12), siły poprzecznej w warstwach zewnętrznych  $q_x$  oraz siły tnącej w wypełnieniu  $N_{xz}$  (3.13) przy  $r \rightarrow 0$ .

Jeżeli weźmiemy pod uwagę to, że dla dostatecznie małej wartości argumentu obowiązują następujące wzory asymptotyczne:

$$(3.17) \quad K_0(\gamma_1 r) \approx -\ln \gamma_1 r, \quad K_1(\gamma_1 r) \approx \frac{1}{\gamma_1 r},$$

to dla  $r \rightarrow 0$  otrzymamy

$$(3.18) \quad w \approx \frac{P}{2\pi D_z} \kappa \left[ \left( 1 - \frac{2D}{D_z} \right) \ln \gamma_1 r_0 - 1 \right],$$

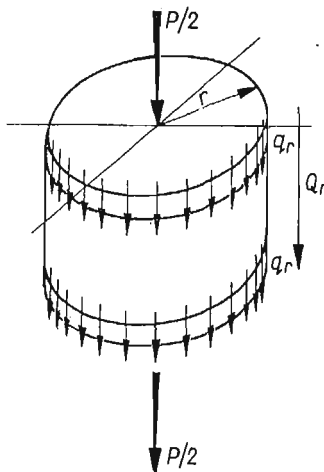
$$q_x \approx -\frac{P}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad q_y \approx -\frac{P}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad q_r \approx -\frac{P}{4\pi} \frac{1}{r},$$

$$N_{xz} \approx 0, \quad N_{yz} \approx 0.$$

Okazuje się więc, że ugięcie w punkcie przyłożenia siły skupionej, podobnie jak w teorii płyt cienkich, jest skończone. Poza tym łatwo zauważymy (3.18), że dla  $r \rightarrow 0$  siła skupiona  $P$  jest zrównoważona tylko przez siły poprzeczne w warstwach zewnętrznych (rys. 4)

$$(3.19) \quad 2q_x \approx Q_x, \quad 2q_r \approx Q_r = -\frac{P}{2\pi r}.$$

Oznacza to, że siła skupiona obciąża w pierwszym rzędzie warstwy zewnętrzne, a dopiero następnie jest przekazywana na całą płytę. Wnioski powyższe są oczywiste z fizycznego punktu widzenia i potwierdzają prawidłowość rozwiązań otrzymanych w niniejszej pracy.



Rys. 4

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że ze względu na założoną względem płaszczyzny środkowej antysymetrię odkształceń płyty, obciążenie siłą skupioną  $P$  należy rozumieć jako obciążenie dwiema siłami skupionymi  $1/2 P$ , przyłożonymi na górnej i dolnej powierzchni płyty równocześnie (rys. 4).

#### 4. Obciążenie momentem skupionym

Pierwszą trudnością, jaką napotykamy przy rozwiązaniu tego problemu, jest definicja pojęcia momentu skupionego w teorii płyt trójwarstwowych. Zagadnienie to omawiał autor w poprzedniej pracy dotyczącej płyt trójwarstwowych [4]. Przypomnijmy tu tylko to, że jednym ze sposobów zdefiniowania momentu skupionego jest przyjęcie, że obciążenie to odpowiada granicy obciążenia dwiema siłami skupionymi przeciwnie skierowanymi, gdy odległość ich zmierza do zera:  $M = \lim_{e \rightarrow 0} Pe$ .

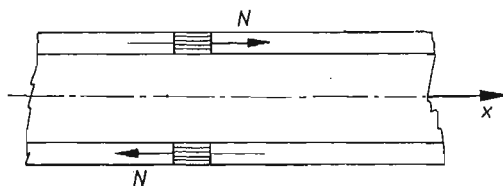
Jak wiadomo, rozwiązanie dla takiego obciążenia otrzymuje się przez różniczkowanie rozwiązania otrzymanego dla obciążenia siłą skupioną. Wobec tego nie wnosi ono zasadniczych nowości do rozwiązania podanego w punkcie 3 niniejszej pracy.

Ciekawsze natomiast jest obciążenie momentem skupionym zdefiniowanym jako para sił poziomych przyłożonych w warstwach zewnętrznych płyty trójwarstwowej (rys. 5). Rozwiązanie płyty obciążonej tak zdefiniowanym momentem jest bardziej złożone od poprzednio omówionego i może być podstawą uzyskania związków całkowych między przemieszczeniami  $u, v$  wewnątrz danego obszaru a wielkościami brzegowymi [4].

Poniżej zajmiemy się nieograniczoną płytą poddaną działaniu momentu skupionego zdefiniowanego jako para sił przyłożonych w warstwach skrajnych. Założymy, że siły

te są równomiernie rozłożone na grubości warstw zewnętrznych. Obciążenie tego typu omówione zostało w punkcie 2 niniejszej pracy i uwidocznione jest w postaci obciążeń  $n_x$  i  $n_y$  w równaniach (2.2) i (2.3).

Przyjmujemy do rozwiązania obciążenie momentem skupionym  $M_x = n_x(2h + \delta) = N\delta(x)\delta(y)$  ( $2h + \delta$ ).



Rys. 5

Podobnie jak przy rozwiązywaniu płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną interesować nas będzie całka szczególna układu równań (2.3) przy  $q_1 = q_3 = 0$ ,  $q_2 = 2N\delta(x)\delta(y)$ . Przyjmujemy więc  $F_1 = F_3 = 0$ , a na funkcję przemieszczeń  $F_2$  otrzymamy równanie różniczkowe

$$(4.1) \quad D_z \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] \left[ 1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right] \nabla^2 \nabla^2 F_2 = 2N \delta(x) \delta(y).$$

Natomiast przemieszczenia  $u$ ,  $v$ ,  $w$  można będzie wyznaczyć z zależności (2.4)

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{2h + \delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] F_2, \\ u &= \frac{(2h + \delta)^2}{4} \left\{ \nabla^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \kappa (1 + \nu) \nabla^2 \right] \right\} F_2 - \\ &\quad - \frac{Dh}{G_w} \nabla^2 \nabla^2 \left[ 1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F_2, \\ v &= \frac{(2h + \delta)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ 1 + \frac{1}{2} \kappa (1 + \nu) \nabla^2 \right] F_2 - \frac{Dh}{G_w} \frac{1 + \nu}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 F_2. \end{aligned}$$

Wykonamy teraz podwójną nieskończoną transformację Fouriera (3.4) równania (4.1), a po wykonaniu retransformacji otrzymamy poszukiwaną funkcję  $F_2$  w postaci

$$(4.3) \quad F_2(x, y) = \frac{N}{2\pi^2 D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 \left[ 1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) (\alpha^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta.$$

Całkę występującą po prawej stronie powyższego wyrażenia łatwo przekształcimy następująco:

$$(4.4) \quad F_2(x, y) = \frac{N}{2\pi^2 D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta - \frac{N \kappa}{2\pi^2 D_z} \left[ \frac{2D}{D_z} + \frac{1}{2} (1 - \nu) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha d\beta + \frac{N\kappa^2}{2\pi^2 D_z} \left(\frac{2D}{D_z}\right)^3 \frac{1}{\frac{2D}{D_z} - \frac{1}{2}(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2+\beta^2)} d\alpha d\beta - \\ & - \frac{N\kappa^2}{2\pi^2 D_z} \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^3 \frac{1}{\frac{2D}{D_z} - \frac{1}{2}(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{1 + \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Trzy pierwsze całki występujące w tym wyrażeniu omówiliśmy w rozdziale 3 niniejszej pracy. Natomiast czwartą całkę wyrażenia (4.4) obliczymy łatwo postępując podobnie jak przy obliczaniu całki (3.9). Otrzymamy dla niej wyrażenie

$$(4.5) \quad R_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{1 + \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2)} d\alpha d\beta = \frac{4\pi}{\kappa(1-\nu)} K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2+y^2}),$$

gdzie  $\gamma_2 = \sqrt{2/\kappa(1-\nu)}$ .

Wykorzystując zależności (3.8), (3.9), (3.10), (4.4), (4.5) oraz wprowadzając jednostkę długości  $r_0$  otrzymamy szukane rozwiązanie osobliwe dla funkcji przemieszczeń  $F_2(x, y)$

$$(4.6) \quad F_2(x, y) = \frac{N}{2\pi D_z} \left\{ \frac{x^2+y^2}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0} + 2 \frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \left[ \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2+y^2}) \right] \right\}.$$

Rozwiązania osobliwe przemieszczeń  $u, v, w$  otrzymamy wykonując na funkcji powyższej działania przepisane zależnościami (4.2)

$$(4.7) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{N(2h+\delta)}{4\pi D_z} \left\{ \frac{x}{2} \ln \frac{x^2+y^2}{r_0^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \left[ \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2\gamma_1 x}{\sqrt{x^2+y^2}} K_1(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) \right] \right\}, \\ u &= \frac{N(2h+\delta)^2}{8\pi D_z} \left\{ \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0} + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} + 2\kappa \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2+y^2}) \right] + \frac{2}{\gamma_1^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2\gamma_2^2 \kappa}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) \right\} - \frac{N(1-\nu^2)}{2\pi E \delta} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \left( 1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times \\ & \quad \times [K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) - K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2+y^2})], \\ v &= \frac{N(2h+\delta)^2}{8\pi D_z} \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} + \kappa \left[ 1 + \nu - (1-\nu) \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2+y^2} - 2\kappa \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \times \right. \\ & \quad \times \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2+y^2}) + \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_1^2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \left( 1 + \frac{1+\nu}{4} \frac{D_z}{D} \right) \times \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) \right] \right\} - \frac{N(1-\nu^2)}{4\pi E \delta} (1+\nu) \kappa \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \times \\ & \quad \times [K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2+y^2}) - K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2+y^2})], \end{aligned}$$

gdzie  $K_\nu(z)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju.

Jeżeli w wyrażeniach powyższych wykonamy przejście graniczne  $D \rightarrow 0$ , to otrzymamy przemieszczenia osobliwe dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie (por. [4]).

Przejdziemy teraz do wyznaczenia poszczególnych sił wewnętrznych dla nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej momentem skupionym.

Wykorzystując zależności (2.1) i (4.7) otrzymamy następujące wyrażenia dla sił płytowych w warstwach zewnętrznych:

$$\begin{aligned}
 q_x &= -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \frac{D}{D_z} \left[ \frac{\cos 2\varphi}{r^2} - \gamma_1 \frac{\cos 2\varphi}{r} K_1(\gamma_1 r) - \gamma_1^2 \cos^2 \varphi K_0(\gamma_1 r) \right], \\
 q_y &= -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \frac{D}{D_z} \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \left[ 1 - \gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r) \right], \\
 m_x &= \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{D}{D_z} \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r} [1 + \nu + 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] + \frac{2}{\gamma_1^2} (1-\nu) \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r)] - 2\gamma_1 (\cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) K_1(\gamma_1 r) \right\}, \\
 m_y &= \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{D}{D_z} \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r} [1 + \nu - 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] - \frac{2}{\gamma_1^2} (1-\nu) \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r)] - 2\gamma_1 (\sin^2 \varphi + \nu \cos^2 \varphi) K_1(\gamma_1 r) \right\}, \\
 m_{xy} &= -\frac{N(2h+\delta)}{4\pi} (1-\nu) \frac{D}{D_z} \sin \varphi \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{r} + \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \right. \\
 &\quad \left. - \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r)] + 2\gamma_1 \cos^2 \varphi K_1(\gamma_1 r) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Podamy jeszcze wzory dla sił wewnętrznych wypadkowych dla całego przekroju

$$\begin{aligned}
 Q_x &= N_{xz} + 2q_x = -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma_2 r K_1(\gamma_2 r)] + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi K_0(\gamma_2 r) \right\}, \\
 Q_y &= N_{yz} + 2q_y = -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma_2 r K_1(\gamma_2 r)] - \frac{1}{2} \gamma_2^2 \sin 2\varphi K_0(\gamma_2 r) \right\}, \\
 M_x &= N_x(2h+\delta) + 2m_x = \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r} [1 + \nu + 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] + \frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \nu (1 - \\
 &\quad - \nu) \cos \varphi \left\{ \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_2 r K_1(\gamma_2 r) - \gamma_2^2 r^2 K_0(\gamma_2 r)] + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi K_1(\gamma_2 r) \right\}, \\
 M_y &= N_y(2h+\delta) + 2m_y = \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r} [1 + \nu - 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] - \frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \nu (1 - \\
 &\quad - \nu) \cos \varphi \left\{ \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_2 r K_1(\gamma_2 r) - \gamma_2^2 r^2 K_0(\gamma_2 r)] + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi K_1(\gamma_2 r) \right\},
 \end{aligned}$$

$$M_{xy} = N_{xy}(2h + \delta) + 2m_{xy} = -\frac{N(2h + \delta)}{4\pi} (1 - \nu) \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{r} - \frac{N(2h + \delta)}{2\pi} \nu (1 - \nu) \sin \varphi \left\{ \frac{\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_2 r K_1(\gamma_2 r) - \gamma_2^2 r^2 K_0(\gamma_2 r)] + \frac{1}{2} \gamma_2^3 \cos 2\varphi K_1(\gamma_2 r) \right\}.$$

Pozostałe wielkości statyczne, to znaczy siły tarczowe  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  oraz siły tnące w wypełnieniu  $N_{xz}$  i  $N_{yz}$ , łatwo można otrzymać z podanych wyżej zależności (4.8) i (4.9) odejmując od siebie odpowiednie wyrażenia. Na przykład

$$N_{xz} = Q_x - 2q_x, \quad N_x = \frac{1}{2h + \delta} (M_x - 2m_x) \dots \text{itd.}$$

Zauważmy, że podobnie jak dla przypadku obciążenia siłą skupioną siły wewnętrzne wypadkowe dla całego przekroju płyty nie zależą od sztywności na zginanie warstw zewnętrznych  $D$ . Wobec powyższego są one identyczne z rozwiązaniami dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie. Rozwiązania dla takich płyt podał autor w poprzednio cytowanej pracy [4]. Łatwo sprawdzić, że są one identyczne z otrzymanymi w pracy niniejszej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. PUCHER, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing. Archiv., **12** (1941).
2. J. MOSSAKOWSKI, *Osobliwe rozwiązania w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. Stos., **3**, 6 (1954).
3. J. MOSSAKOWSKI, *Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., **1**, 7 (1955).
4. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mechanika Teoret. i Stos., **3**, 5 (1966).
5. A. PUCHER, *Einflussfelder elastischer Platten*, Springer Verlag, Wien 1951.
6. M. SUCHAR, *Computation by means of polynomials of influence surfaces for anisotropic plates with finite dimensions*, Arch. Mech. Stos., **5**, 10 (1958).
7. S. BERGMANN, M. SCHIFFER, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, Acad. Press, New York 1953.
8. N. J. HOFF, *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, NACA T. N., No. 2225, Nov. 1950.
9. R. GANOWICZ, *O pewnym rozwiązaniu płyty trójwarstwowej*, Rozpr. Inżyn., **3**, 14 (1966).
10. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte, prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Ładow., **1**, 12 (1966).
11. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, 1957.
12. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, Mc Graw-Hill, 1951.
13. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, 1923.
14. H. ZORSKI, *Plates with Discontinuous Supports*, Arch. Mech. Stos., **10** (1958).
15. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*, Москва 1963.

#### Резюме

#### ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Темой работы является исследование изотропных трехслойных пластин. Рассуждения основаны на теории предложенной Н. Дж. Хоффом, [8].

Даются решения задач о нагружении сосредоточенной силой неограниченной трехслойной пластины, а также о нагружении такой пластины сосредоточенным моментом возникающим от действия пары горизонтальных сил приложенных во внешних слоях.

Все решения получены в замкнутом виде. Они сравниваются с особыми решениями теории тонких пластин, а также с решениями теории трехслойных пластин, в которых внешние слои не обладают изгибной жесткостью.

#### S u m m a r y

#### SINGULAR SOLUTIONS IN THE GENERAL THEORY OF THREE-LAYER PLATES

Isotropic three-layer plates are considered in the paper, the solution being based upon the theory given by N. J. Hoff [8].

The solution of an infinite three-layer plate is derived in the case when the load consists of a concentrated force and a concentrated couple formed by horizontal forces acting in the outer layers. All results are given in a closed form.

The results given in the paper have been compared with the singular solutions of the theory of thin plates and the theory of three-layer plates in which the outer layers exhibit no bending rigidity.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 września 1966 r.*