MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 5 (1967)

MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH TYPU COSSERATÓW

W. BARAŃSKI (ŁÓDŹ), K. WILMAŃSKI, CZ. WOŹNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W większości zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych zakłada się, że każdy punkt materialny ośrodka posiada trzy stopnie swobody oraz że gęstość energii wewnętrznej zależy tylko od pierwszych pochodnych wektora przemieszczenia. Stan naprężenia jest wówczas jednoznacznie określony symetrycznym tensorem naprężenia. Ośrodek ciągły, w którym nie jest spełnione co najmniej jedno z powyższych założeń, nazwijmy ośrodkiem typu Cosseratów.

Praca zawiera przegląd zagadnień dotyczących mechaniki ośrodków tego typu. Omówiono w niej szczegółowo dwa podstawowe kierunki rozwojowe. Pierwszy z nich polega na uogólnieniu kinematyki ciała (punkt materialny ma więcej niż trzy stopnie swobody). Drugi kierunek postuluje występowanie wyższych gradientów przemieszczenia w wyrażeniu dla gęstości energii wewnętrznej. Zarówno pierwsze jak i drugie podejście prowadzą do niesymetrycznego tensora naprężenia. Ponadto pojawia się wtedy tensor naprężeń momentowych; wystąpić mogą również tzw. tensory hipernaprężeń.

Pierwsze wzmianki o możliwości występowania naprężeń momentowych można znaleźć już w pracy VOIGTA [1887]. Natomiast pierwszy model ciała z bardziej złożoną kinematyką wprowadzili bracia COSSERATOWIE [1909]. W modelu przez nich proponowanym każdy element materialny ośrodka ma sześć stopni swobody podobnie jak ciało sztywne. Do tego modelu bracia COSSERATOWIE doszli uogólniając opis ruchu jednowymiarowego modelu pręta i dwuwymiarowego modelu powłoki na przypadek kontinuum trójwymiarowego. Poza tym w ich pracy podano zasady zachowania wraz z warunkami niezmienniczości gęstości energii względem ruchów euklidesowych. Wykazano również równoważność zasad zachowania z odpowiednimi warunkami niezmienniczości. Szczegółowy opis kontinuum omawianego przez E. i F. COSSERATÓW podano dalej w p. 2.

Do pracy E. i F. COSSERATÓW współcześnie im nawiązywały tylko cztery prace. F. KLEIN [1918] i E. NOETHER [1918] rozpatrywali wspomniane wyżej twierdzenie o równoważności zasad zachowania i warunków niezmienniczości względem ruchów euklidesowych. Poza tym ukazały się prace E. HELLINGERA [1914] i K. HEUNA [1914] nie wnoszące do teorii kontinuum COSSERATÓW żadnych nowych elementów.

Postulat o wystąpieniu w gęstości działania również gradientu odkształcenia drugiego rzędu wprowadził po raz pierwszy T. J. JARAMILLO [1929], ale wzmianki na ten temat można znaleźć w pracach A. L. CAUCHY'EGO [1851] i A. J. C. B. DE SAINT-VENANTA [1869]. W ten sposób dochodzi się do pojęcia tzw. materiału nieprostego drugiego rzędu. Teorię materiałów tego typu omówimy szczegółowo w p. 3.

W 1944 r. ukazała się praca E. REISSNERA omawiająca możliwości niesymetrii tensora naprężenia. Jednak przeprowadzone przez niego rozumowanie okazało się błędne. Dalsze prace z tej dziedziny pojawiły się w latach pięćdziesiątych. Można tu wymienić opracowania Y. LE CORRE'A [1953, 1954, 1955, 1956, 1958], J. LAVALA [1957] oraz R. TIFFENA, A. C. STEVENSONA [1956]. W pracach tych (z wyjątkiem ostatniej) usiłowano wykazać pojawienie się niesymetrii tensora naprężenia poprzez analizę stanu energetycznego siatki krystalicznej. Y. LE CORRE i J. LAVAL dopuszczali działanie momentów masowych. Gęstość energii odkształcenia wyrażali wzorem $W = \frac{1}{2} A_{ijkl} w_{i,j} w_{k,l}$, gdzie $w_{i,j}$ jest gradientem odkształcenia, a A_{ijkl} afinorem sprężystości. Afinor ten różni się od klasycznego niesymetrią względem wskaźników i i j. W konsekwencji tensor naprężeń siłowych

$$t_{ij} = A_{ijkl} w_{k,l}$$

nie był symetryczny i zależał w sposób jawny do rotacji kierunków głównych odkształcenia. Ta sprzeczność w porównaniu z klasyczną mechaniką ośrodka ciągłego była krytykowana przez N. JOELA i W. A. WOOSTERA [1957, 1958], E. S. RAJAGOPALA [1960] oraz R. S. KRISHNANA i E. S. RAJAGOPALA [1961]. Inercję obrotową do równań mechaniki wprowadził S. BODASZEWSKI [1953] opierając się na pojęciu tzw. naprężenia wrotnego, zaproponowanego przez W. BURZYŃSKIEGO [1949]. Należy zaznaczyć, że większość cytowanych wyżej autorów nie znała pracy braci COSSERATÓW, podstawowej dla tego kierunku.

Nawrót do koncepcji ośrodka Cosseratów nastąpił w pracach J. L. ERICKSENA i C. TRUESDELLA [1958] oraz C. TRUESDELLA i R. A. TOUPINA [1960]. Uogólnili oni model Cosseratów wprowadzając model tzw. ciała zorientowanego. W tym samym czasie ukazały się nie wnoszące zasadniczo nowych elementów prace F. A. MC. CLINTOCKA, P. A. ANDRE'A, K. R. SCHWERDTA i R. E. STOECKLEY'A [1958], F. A. MC. CLINTOCKA [1960]. W. GÜNTHER [1958] zauważył podobieństwo kontinuum Cosseratów i ciała z kontynualnym rozkładem dyslokacji. Tej samej grupy zagadnień dotyczą prace E. KRÖNERA [1958, 1959, 1960, 1962, 1963], M. MIŞICU [1965, 1966] i C. TEODOSIU [1964, 1965].

Szereg rozwiązań szczegółowych zwłaszcza dla tzw. ośrodka ze «związanymi» obrotami (punkt materialny ma tylko trzy stopnie swobody, por. p. 3) podali H. SCHAEFER [1962], R. D. MINDLIN [1963], O. HOFFMAN [1964], M. SOKOŁOWSKI [1965], G. N. SAWIN i A. N. GUZ [1966]. W oparciu o ten sam model próbowano wyjaśnić niektóre zagadnienia koncentracji naprężeń. Pierwsze rozwiązania w tym zakresie podał R. D. MINDLIN [1963], a następnie J. L. BLEUSTEIN [1966], T. S. COOK i V. WEITSMAN [1966], R. J. HARTRANFT i G. C. SIH [1965], R. MUKI i E. STERNBERG [1965], J. N. NIEMISZ [1965, 1966], G. N. SAWIN [1965] oraz V. WEITSMAN [1965, 1966].

Ostatnio J. SCHIJVE [1966] opublikował materiały z własnych prac doświadczalnych, w których określał wartość stałej materiałowej l wprowadzonej przez MINDLINA w ośrodku izotropowym ze «związanymi obrotami».

Ciecz typu Cosseratów opisał J. L. ERICKSEN [1960, 1961, 1962, a, b, c, d]. Prace te zawierają również interpretację kontinuum Cosseratów jako ciągłego modelu wysokich polimerów. Poza tym zagadnienie ośrodka ciekłego z naprężeniami momentowymi rozważali E. L. AERO, A. N. BUŁUGIN i E. W. KUWSZYŃSKI [1965], A. C. ERINGEN [1964] i P. N. KALONI [1965].

Niesymetrię tensora naprężeń w modelu ciągłym opisującym wysiłki przestrzennej ramy o siatce prostokątnej wykazał S. KALISKI [1963]. Zagadnienie naprężeń momentowych w prętach zginanych omówili L. P. WINOKUROW, N. J. DIEREWIANKO [1966]. Teoria naprężeń momentowych wyłoniła się również w zagadnieniach pól sprzężonych: R. C. DIXON, A. C. ERINGEN [1965], S. KALISKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA [1962]. M. MIŞICU [1963, 1964, a, b, 1965, d] rozpatrzył szereg zagadnień szczegółowych z zakresu lepkosprężystości, plastyczności, lepko-elasto-plastyczności ośrodka Cosseratów ze «związanymi obrotami». P. D. KELLY [1964] podał dla tego ośrodka teorię dyfuzji. Kierunku reprezentowanego powyższymi pracami, jako wychodzącego poza zakres teorii mechanicznych, nie będziemy dalej omawiać.

W ostatnich latach ukazał się szereg prac uogólniających koncepcję Cosseratów. R. A. TOUPIN [1964] zaproponował model tzw. ciała z mikrostrukturą, dla którego podał zasady zachowania oraz warunki niezmienniczości. Mikrostruktura wprowadzona przez R. A. TOUPINA jest opisana układem tzw. wektorów kierunkowych (ang. director). Zagadnieniem tym zajmiemy się szczegółowo w p. 4. A. E. GREEN, R. S. RIVILN [1964b] uogólnili kinematykę ośrodka ciągłego przyjmując oprócz klasycznego pola wektora przemieszczenia również tzw. wielobiegunowe przemieszczenia. Zagadnienie to omówimy w p. 5, gdzie wykażemy, że podejścia R. A. TOUPINA oraz A. E. GREENA, R. S. RIVLINA są równoważne.

Poza powyższymi kierunkami w ostatnich latach zbudowano teorię ośrodka z mikrostrukturą konstrukcyjną. Doprowadziło to do powstania koncepcji tzw. ośrodka włóknistego. Przegląd prac z tego zakresu podamy w p. 7.

2. Ośrodek giroskopowy Cosseratów

2.1. Pojęcie podstawowe. W punkcie tym omówimy podstawowe związki i przeprowadzimy ich analizę dla pewnego «uogólnionego» ośrodka ciągłego wprowadzonego przez braci Cosseratów [1909]. Ośrodek ten nazywać będziemy ośrodkiem giroskopowym Cosseratów lub w skrócie ośrodkiem Cosseratów.

Przyjmujemy, że każda cząstka materialna X ośrodka Cosseratów B wyposażona jest w trzy ortonormalne wektory d_α ($\alpha = \mathrm{I, II, III}$) zwane dalej wektorami kierunkowymi. Aby opisać konfigurację cząstki $X \in B$ ciała Cosseratów, należy podać zarówno jej położenie x w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa E_3, jak i usytuowanie ortonormalnych wektorów kierunkowych d_α. Inaczej mówiąc każda cząstka ciała Cosseratów ma sześć stopni swobody (trzy przesunięcia i trzy obroty). Ruch ciała Cosseratów można opisać związkami

$$x_i = x_i(X, t), \quad d_{\alpha i} = d_{\alpha i}(X, t), \tag{2.1}$$

w których parametr t oznacza czas, x_i są współrzędnymi kartezjańskimi punktu x, natomiast $d_{\alpha i}$ są składowymi wektorów kierunkowych d_α.

2.2. Ruch sztywny. Niech

$$x_i^* = x_i^*(X, t^*), \quad d_{\alpha i}^* = d_{\alpha i}^*(X, t^*),$$

oraz

$$x_i = x_i(X, t), \quad d_{\alpha i} = d_{\alpha i}(X, t)$$

będą dwoma ruchami ciała Cosseratów. Będziemy o nich mówili, że różnią się o ruch sztywny, jeżeli zachodzą związki:

$$
\begin{aligned}
x_i^*(X, t^*) &= R_{ij} x_j(X, t) + S_i, \\
d_{\alpha i}^*(X, t^*) &= R_{ij} d_{\alpha j}(X, t), \qquad (2.2)\\
t^* &= t + c,
\end{aligned}
$$

gdzie R_{ij} jest dowolnym tensorem ortogonalnym oraz S_i dowolnym wektorem. Zbiór przekształceń (2.2) ma własności grupy. R. A. TOUPIN [1964] nazywa ją grupą przemieszczeń euklidesowych. Grupa infinitezymalnych przemieszczeń euklidesowych dana związkami:

$$
\begin{aligned}
x_i^*(X, t^*) &= x_i(X, t) + [\Omega_{ij} x_j(X, t) + S_i] d\lambda, \\
d_{\alpha i}^*(X, t^*) &= d_{\alpha i}(X, t) + \Omega_{ij} d_{\alpha j}(X, t) d\lambda, \qquad (2.3)\\
t^* &= t + c d\lambda, \quad \Omega_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

jest podgrupą grupy przemieszczeń euklidesowych. Wielkości niezmiennicze względem grupy infinitezymalnych przemieszczeń euklidesowych są również niezmiennicze względem grupy przemieszczeń euklidesowych (por. np. PONTRIAGIN, *Grupy topologiczne*, W-wa 1961). W dalszym ciągu będziemy zakładali, że pewne wielkości występujące w teorii ciała Cosseratów są niezmiennicze względem zdefiniowanej powyższej grupy przemieszczeń euklidesowych.

2.3. Zasada Hamiltona dla ciała sprężystego Cosseratów. Bracia COSSERATOWIE [1909] rozważania swoje oparli na zasadzie Hamiltona. Przyjęli oni, że wielkość działania ma postać

$$
A(P \cdot I) = \int_I \int_{X_t(P)} j^{-1} L(x_i, t, d_{\alpha i}, \dot{x}_i, \dot{d}_{\alpha i}, x_{i,K}, d_{\alpha i,K}, X) dv\, dt, \qquad (2.4)
$$

gdzie I jest przedziałem czasu $[t_1, t_2]$, $j = \det x^i_{;K}$ jest jakobianem odwzorowania $X \to x$, L — gęstością działania, natomiast $X_t(P)$ jest obszarem przestrzeni Euklidesa E_3 zajętym przez część $P \subset B$ ciała Cosseratów. Dla ośrodka Cosseratów dopuszczalne są jedynie wariacje $\delta d_{\alpha i}$ wektorów kierunkowych, spełniające warunek:

$$
d_{\alpha j} \delta d_{\alpha i} + d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j} = \delta(d_{\alpha i} d_{\alpha j}) = 0. \qquad (2.5)
$$

Warunek ten oznacza, że wektory kierunkowe w każdej chwili tworzą bazę ortonormalną. Zasada Hamiltona dla ciała sprężystego Cosseratów [wariacje $\delta d_{\alpha i}$ spełniają związek (2.5)] ma postać:

$$
\begin{aligned}
\delta A(P \cdot I) + \int_I \int_{X_t(P)} (f_i \delta x_i + \tilde{l}_{ij} d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j}) dv\, dt + \int_I \int_{X_t(\partial P)} (t_i \delta x_i + \tilde{h}_{ij} d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j}) da\, dt - \\
- \int_{X_t(P)} \varrho (p_i \delta x_i + \tilde{q}_{ij} d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j}) dv \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

gdzie f_i i t_i są odpowiednio gęstościami sił objętościowych i powierzchniowych, p_i jest gęstością pędu, ϱ jest gęstością materiału, wielkości $\tilde{l}_{ij}, \tilde{h}_{ij}$ i $\tilde{q}_{ij}$ nazywamy kolejno gęstościami momentów objętościowych i powierzchniowych oraz lokalną gęstością krętu. Nadkreślenia oznaczają, że dany tensor jest antysymetryczny. Jeżeli w równaniach (2.4) i (2.6) pominiemy wektory kierunkowe $d_{\alpha i}$, to otrzymamy zasadę Hamiltona znaną z klasycznej teorii sprężystości. Warunkami koniecznymi i dostatecznymi spełnienia równania wariacyjnego (2.6) dla dowolnych różniczkowalnych wariacji δx_i, $\delta d_{\alpha i}$, ograniczonych zależnością (2.5), są warunki początkowe

$$\varrho p_i = j^{-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad \varrho \tilde{q}_{ij} = j^{-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_{\alpha[i}} d_{\alpha j]}, \tag{2.7}$$

warunki brzegowe

$$t_{ji}n_j - t_i = 0, \quad \tilde{h}_{kji}n_k - \tilde{h}_{ji} = 0 \tag{2.8}$$

oraz równania ruchu

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + f_i &= \varrho \dot{p}_i - j^{-1}L_{,i}, \\ \tilde{h}_{kji,k} + t_{[ji]} + \tilde{l}_{ji} &= \varrho \dot{\tilde{q}}_{ji} - j^{-1}K_{[ji]} + \varrho p_{[i}\dot{x}_{j]}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Występujący w powyższych równaniach tensor t_{ij} zdefiniowany wzorem:

$$t_{ji} = -j^{-1}x_{j,K}\frac{\partial L}{\partial x_{i,K}} \tag{2.10}$$

jest tensorem naprężeń Cauchy'ego. Tensor o składowych

$$\tilde{h}_{kij} = -j^{-1}x_{k,K}\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha[j,K}} d_{\alpha i]} \tag{2.11}$$

jest tzw. tensorem naprężeń momentowych. Wielkość K_{ij} występująca w równaniach (2.9) jest zdefiniowana wzorem

$$K_{ij} = x_i L_{,j} + d_{\alpha i}\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha j}} + \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \dot{d}_{\alpha i}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_{\alpha j}} + x_{i,K}\frac{\partial L}{\partial x_{j,K}} + d_{\alpha i,K}\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha j,K}}. \tag{2.12}$$

Równania (2.8) i (2.9) bywają nazywane warunkami brzegowymi oraz równaniami ruchu Cosseratów. Równanie $(2.9)_2$ wskazuje na to, że tensor naprężeń Cauchy'ego t_{ij} nie jest tu symetryczny.

2.4. Warunki niezmienniczości i zasady zachowania. Za E. i F. COSSERATAMI będziemy postulowali niezmienniczość gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Można wykazać, że warunki konieczne i dostateczne niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych mają postać

$$L_{,i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad K_{[ij]} = 0. \tag{2.13}$$

Rozpatrując zasadę Hamiltona (2.6) dla poniższych dopuszczalnych kombinacji wariacji zmiennych niezależnych

1. $dx_i = S_i, \quad \delta d_{\alpha i} = 0, \quad \dot{S}_i = 0;$

2. $dx_i = \Omega_{ij}x_j, \quad \delta d_{\alpha i} = \Omega_{ij}d_{\alpha j}, \quad \dot{\Omega}_{ij} = \Omega_{(ij)} = 0;$

3. $\delta x_i = \dot{x}_i, \quad \delta d_{\alpha i} = 2d_{\alpha j}\tilde{\omega}_{ji},$

gdzie

$$\tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}d_{\alpha i}\dot{d}_{\alpha j} \tag{2.14}$$

otrzymamy następujące równania:

$$\int\limits_{X_t(P)} \varrho p_i dv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} f_i dv\, dt - \int\limits_I \int\limits_{X_t(\partial P)} t_i da\, dt = \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} j^{-1} L_{,i} dv\, dt, \tag{2.15}$$

$$\int\limits_{X_t(P)} \varrho (p_{[i} x_{j]} + \tilde{q}_{ji}) dv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} (f_{[i} x_{j]} + \tilde{l}_{ji}) dv\, dt - $$
$$- \int\limits_I \int\limits_{X_t(\partial P)} (t_{[i} x_{j]} + \tilde{h}_{ji}) da\, dt = \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} j^{-1} K_{[ji]} dv\, dt, \tag{2.16}$$

$$\int\limits_{X_t(P)} E dv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} (f_i \dot{x}_i + 2\tilde{l}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) dv\, dt - $$
$$- \int\limits_I \int\limits_{X_t(\partial P)} (t_i \dot{x}_i + 2\tilde{h}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) da\, dt = - \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} j^{-1} \frac{\partial L}{\partial t} dv\, dt. \tag{2.17}$$

W równaniach tych

$$E = \varrho (p_i \dot{x}_i + 2\tilde{q}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) - j^{-1} L$$

jest gęstością całkowitej energii wewnętrznej. Z uwagi na warunki (2.13) wyrażenia po lewych stronach równań (2.15)–(2.17) są równe zeru. Zatem

$$\int\limits_{X_t(P)} \varrho p_i dv \Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} f_i dv\, dt + \int\limits_I \int\limits_{X_t(\partial P)} t_i da\, dt, \tag{2.18}$$

$$\int\limits_{X_t(P)} \varrho (p_{[i} x_{j]} + \tilde{q}_{ji}) dv \Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} (f_{[i} x_{j]} + \tilde{l}_{ji}) dv\, dt + \int\limits_I \int\limits_{X_t(\partial P)} (t_{[i} x_{j]} + \tilde{h}_j) da\, dt, \tag{2.19}$$

$$\int\limits_{X_t(P)} E dv \Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} (f_i \dot{x}_i + 2\tilde{l}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) dv\, dt + \int\limits_I \int\limits_{X_t(P)} (t_i \dot{x}_i + 2\tilde{h}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) da\, dt. \tag{2.20}$$

Otrzymane związki nazywamy kolejno zasadami zachowania pędu, krętu i energii mechanicznej dla ciał typu Cosseratów. Z drugiej strony można wykazać, że zasady zachowania pędu (2.18), krętu (2.19) i energii mechanicznej (2.20) są równoważne warunkom (2.13) niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Z całkowych zasad zachowania pędu i krętu można otrzymać warunki brzegowe (2.8) oraz równania ruchu (2.9).

2.5. Pseudotensor naprężeń momentowych. Zwróćmy uwagę, że prawie wszystkie wielkości wprowadzone w poprzednich punktach tego rozdziału, nie występujące w klasycznej teorii sprężystości, są tensorami antysymetrycznymi. Mianowicie tensory gęstości momentów powierzchniowych $\tilde{h}_{ij}$, gęstości momentów objętościowych $\tilde{l}_{ij}$, lokalnej gęstości krętu $\tilde{q}_{ij}$, naprężeń momentowych $\tilde{h}_{kij}$ oraz tensor $\tilde{\omega}_{ij}$ prędkości obrotu wektorów kierunkowych są antysymetryczne względem indeksów ij. Każdy z nich może być jednoznacznie przedstawiony przy pomocy pseudowektora bądź też pseudotensora. Dla przykładu tensor naprężeń momentowych $\tilde{h}_{kij}$ można przedstawić w następującej postaci:

$$\tilde{h}_{kij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijl} m_{kl}, \tag{2.21}$$

gdzie m_{kl} jest tzw. pseudotensorem naprężeń momentowych, natomiast ε_{ijl} jest trójwektorem Ricciego. Związek odwrotny do (2.21) ma postać

$$m_{kl} = \tilde{h}_{kij}\varepsilon_{ijl}. \tag{2.22}$$

Nasuwając na równania $(2.8)_2$ i $(2.9)_2$ trójwektor Ricciego ε_{ijl} otrzymamy równoważną postać równań ruchu i warunków brzegowych Cosseratów

$$m_{kl,k}+t_{j.}\varepsilon_{jil}+l_l = \varrho q_l+\varrho p_j\dot{x}_i\varepsilon_{ijl}, \quad m_{kl}n_k-m_k = 0, \tag{2.23}$$

gdzie występujące pseudowektory momentów objętościowych l_l, momentów powierzchniowych m_k oraz lokalnej gęstości krętu q_k są zdefiniowane analogicznie jak (2.22). W podobny sposób można przekształcić zasady zachowania krętu i energii mechanicznej:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{X_t(P)} \varrho(p_jx_i\varepsilon_{ijl}+q_l)dv\Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{I}\int\limits_{X_t(P)} (f_jx_i\varepsilon_{ijl}+l_l)dv\,dt+\int\limits_{I}\int\limits_{X_t(P)} (t_jx_i\varepsilon_{ijl}+m_l)da\,dt,\\
&\int\limits_{X_t(P)} Edv\Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{I}\int\limits_{X_t(P)} (f_i\dot{x}_i+l_i\omega_i)dv\,dt+\int\limits_{I}\int\limits_{X_t(\partial P)} (t_i\dot{x}_i+m_i\omega_i)da\,dt,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

gdzie ω_i jest pseudowektorem prędkości obrotu bazy wektorów kierunkowych d_α.

Przedstawiona w tym rozdziale teoria ciała sprężystego Cosseratów została oparta na podstawowej pracy Toupina [1964], aczkolwiek zawiera głównie idee braci Cosseratów. Z prac dotyczących podstaw teorii można wymienić elementarne liniowe ujęcia KUWSZYŃSKIEGO i AERO [1963] oraz PALMOWA [1964 a]. Zagadnienie całkowania zlinearyzowanego podstawowego układu równań zostało poruszone w pracach GÜNTHERA [1958], AERO i KUWSZYŃSKIEGO [1964] oraz SANDRU [1966]. GÜNTHER [1958] wykazał analogię statyczno-geometryczną w liniowej teorii ośrodków typu Cosseratów i wykorzystał ją do zbudowania funkcji naprężeń. AERO i KUWSZYŃSKI [1964] przedstawili rozwiązanie układu równań przemieszczeniowych w postaci sumy dwóch funkcji wektorowych, z których jedna jest rozwiązaniem układu równania Lamégo. SANDRU [1966] przedstawił rozwiązanie typu Galerkina oraz Papkowicza-Neubera. Rozwiązał również kilka zagadnień szczególnych. Płaskie zagadnienie koncentracji naprężeń rozpatrywał PALMOW [1964], który wykazał, że zagadnienia płaskiego stanu naprężenia dla ośrodków Cosseratów i dla tzw. ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami (por. p. 3) są sobie równoważne.

Szczególną odmianę teorii Cosseratów zbudował WESOŁOWSKI [1965]. Założył on, że momenty powierzchniowe wykonują pracę na sumie obrotów bazy wektorów kierunkowych i obrotów elementów powierzchniowych. Z przeprowadzonych rozważań wynika jednak, że momenty powierzchniowe pracują tylko na obrotach baz wektorowych.

3. Materiały nieproste drugiego rzędu

3.1. Sprężyste materiały nieproste. W klasycznej teorii sprężystości gęstość energii odkształcenia zależy od pierwszego gradientu odkształcenia $x_{i,\alpha}$. Jednak nie ma formalnych przeszkód do wprowadzenia wyższych gradientów jako dodatkowych argumentów gęstości energii. Zaproponowali to po raz pierwszy A. L. CAUCHY [1851] i A. J. C. B. DE SAINT-VENANT [1869]. Powyższe zagadnienie omawiał również J. T. JARAMILLO [1929]. We wszystkich wymienionych pracach stan naprężenia był opisywany symetrycznym tensorem naprężeń Cauchy'ego. Teoria materiałów zawierająca wyższe gradienty odkształcenia i uwzględniająca powstawanie naprężeń momentowych została podana przez R. TIFFENA i A. C. STEVENSONA [1956]. Jednak zarówno w tej pracy, jak i w monografii C. TRUESDELLA i R. A. TOUPINA [1960] nie zwrócono uwagi na fakt, że część naprężeń momentowych nie wyraża się przez gęstość działania. Powyższe spostrzeżenie, dokonane przez R. D. MINDLINA, zostało uwzględnione w pracy R. A. TOUPINA [1962]. W pracy tej przyjęto, że gęstość działania zależy od pierwszego i drugiego gradientu odkształcenia. W pracach R. A. TOUPINA [1964] oraz C. TRUESDELLA i W. NOLLA [1965] podano zasady zachowania dla tej teorii w zestawieniu z równaniami ośrodka Cosseratów.

Materiał, dla którego gęstość energii odkształcenia zależy od drugiego gradientu odkształcenia, będziemy dalej nazywać materiałem nieprostym drugiego rzędu (R. A. TOUPIN [1964]). Przez analogię do powyższej definicji można również wprowadzić materiały nieproste rzędu N (tj. materiały, dla których gęstość energii zależy od N-go gradientu odkształcenia).

Poniżej podamy podstawowe równania opisujące materiał nieprosty rzędu drugiego. W następnym podpunkcie omówimy pewien przypadek szczególny tego materiału, pokrywający się z pewnym typem ośrodka Cosseratów. Ograniczymy się do zagadnień trójwymiarowych. Powłoki z materiału nieprostego drugiego rzędu zostały opisane w pracy H. COHENA i C. N. DE SILVY [1966]. Zawiera ona kinematykę takich powłok, podstawowy układ równań otrzymany z zasady wariacyjnej oraz podział zagadnień na membranowe i zgięciowe. Omówiono tam również izotropową powłokę z materiału nieprostego drugiego rzędu.

Zgodnie z przytoczoną powyżej definicją materiału nieprostego drugiego rzędu energię sprężystą dla pewnego obszaru P tego materiału wyrazimy wzorem:

$$E(P) = \int_P \mathcal{L}(x_{i,\alpha}; x_{i,\alpha\beta}; X_\alpha)dV, \tag{3.1}$$

gdzie $x_{i,\alpha}$ oznacza gradient odkształcenia, $x_{i,\alpha\beta}$ — gradient gradientu odkształcenia.

O występującej we wzorze (3.1) gęstości energii wewnętrznej zakładamy, że jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych (p. 2.2). Musi ona wtedy spełniać warunek:

$$\mathcal{L}(x_{i,\alpha}; x_{i,\alpha\beta}; X_\alpha) = \mathcal{L}(R_{ij}x_{j,\alpha}; R_{ij}x_{j,\alpha\beta}; X_\alpha), \tag{3.2}$$

gdzie R_{ij} jest dowolnym tensorem ortogonalnym. A. R. TOUPIN [1964] wykazał, że aby warunek (3.2) był spełniony, gęstość $\mathcal{L}$ powinna dać się przedstawić w postaci:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta\gamma}, A_{\alpha\beta}, X_\alpha), \tag{3.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{2}(g_{ij}x_{i,\alpha}x_{j,\beta} - A_{\alpha\beta}), \\ K_{\alpha\beta\gamma} &\equiv x_{i,\alpha}x_{i,\beta\gamma} = E_{\alpha\beta,\gamma} + E_{\alpha\gamma,\beta} - E_{\gamma\beta,\alpha}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Funkcja $\mathcal{L}$ zależy więc dla sprężystych materiałów nieprostych drugiego rzędu od sześciu składowych klasycznego tensora odkształceń skończonych, materialnych gradientów tego tensora oraz współrzędnych materialnych X_α.

Równania ruchu i warunki brzegowe można otrzymać z odpowiedniego równania dla wariacji $\delta\mathcal{L}$. Rozwijając to równanie we współrzędnych przestrzennych, po pominięciu członów dynamicznych, otrzymuje się następujące równania równowagi:

$$t_{ij,i}+f_j = 0, \tag{3.5}$$

w których t_{ij} jest niesymetrycznym tensorem naprężenia, a f_j wektorem gęstości sił masowych. Tensor t_{ij} jest tu definiowany innym związkiem niż w p. 2, mianowicie

$$t_{ij} \equiv j^{-1}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha}} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha\beta}}\right)_{,\beta}\right] x_{j,\alpha}. \tag{3.6}$$

Warunki brzegowe otrzymane z tego samego równania wariacyjnego mają postać:

$$\begin{gathered} t_{ij}n_j - d_j h_{jik}n_k + h_{jik}(b_{jk} - b_{qq}n_j n_k) = t_i, \\ h_{jik}n_j n_k = m_i, \qquad X_\alpha \in \partial P, \end{gathered} \tag{3.7}$$

gdzie:

$$h_{jik} = j^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{j,\alpha\beta}} x_{i,\alpha}x_{k,\beta} \tag{3.8}$$

jest tzw. tensorem hipernaprężeń oraz m_i wektorem hipersił powierzchniowych, n_i jednostkowym wektorem normalnym do ∂P, b_{ij} drugim tensorem podstawowym powierzchni ∂P, $d_j h_{jik}$ diwergencją tensora h_{jik} na ∂P ($d_j \equiv \partial_j - n_j n_i \partial_i$).

Oprócz tego przy definiowaniu tensora naprężeń otrzymuje się zależność

$$h_{jik,k} + t_{ij} = \sqrt{\frac{A}{a}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha\beta}} x_{j,\alpha\beta}\right]. \tag{3.9}$$

Jak łatwo dostrzec, z równania (3.3) wynika symetria wyrażenia w nawiasie kwadratowym wzoru (3.9) względem wskaźników i, j. Lewa strona (3.9) musi więc spełniać dodatkowy związek

$$t_{[ij]} + h_{[ji]k,k} = 0,$$

który jest podobny do równań równowagi Cosseratów dla momentów [por. wzór $(2.9)_2$].

Pojęcie materiału nieprostego zostało rozszerzone w pracy Cz. WOŹNIAKA [1967, b] na zagadnienia termosprężystości. Wprowadzono tam pojęcie materiału «termicznie nieprostego», tj. materiału, w którym gęstość energii swobodnej φ (oraz pozostałe funkcje stanu) zależy nie tylko od gradientów odkształcenia i od temperatury, lecz również od gradientów temperatury. W cytowanej pracy (por. także p. 6.7) wyprowadzono podstawowy układ równań sprzężonej termosprężystości takich materiałów. W szczególnym przypadku materiału nieprostego drugiego rzędu energia swobodna φ zależy od parametrów mechanicznych $C_{\alpha\beta} = x_{k,\alpha}x_{k,\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma} = x_{k,\alpha}x_{k,\beta\gamma}$ oraz temperatury θ i jej gradientu $\theta_{,\alpha}$. Równanie stanu dla tensora naprężeń t_{lk} oraz tensora hipernaprężeń $t_{m\alpha k}$ mają postać

$$\begin{gathered} t_{lk} + (t_{m\alpha k,m} + \bar{f}_{\alpha k})x_{l,\alpha} = \varrho\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{k,\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma}} x_{k,\beta\gamma}\right) x_{l,\alpha}, \\ t_{l(\gamma|k|}X_{\beta),l} = \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma}} x_{k,\alpha}, \end{gathered} \tag{3.10}$$

w której $\bar{f}_{\alpha k}$ jest tensorem gęstości hipersił objętościowych (łącznie z siłami bezwładności). Równanie przewodnictwa cieplnego ma postać:

$$h_{i,i}+\varrho(c\dot{\theta}+c_\alpha\dot{\theta}_{,\alpha})+\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{\alpha\beta}\partial\theta}\theta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{\alpha\beta}\partial\theta_{,\delta}}\theta_{,\delta}\right)\dot{C}_{\alpha\beta}+ \tag{3.11}$$
$$+\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma}\partial\theta}\theta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma}\partial\theta_{,\delta}}\theta_{,\delta}\right)\dot{C}_{\alpha\beta\gamma}+\varrho h=0,$$

w której $h_i = h_i(\theta_{,i}/\theta)$ jest wektorem przepływu ciepła, h jest wydajnością źródeł ciepła oraz c i c_α są wielkościami charakteryzującymi pojemność cieplną ciała. Nadmieńmy jeszcze, że rozkład entropii w powyższym przypadku jest określany nie tylko polem skalarowym $\eta = -\partial\varphi/\partial\theta$, lecz również polem wektorowym $d_\alpha = -\partial\varphi/\partial\theta_{,\alpha}$.

Wiele prac omawia pewne szczególne zagadnienie materiału nieprostego. Jeśli założymy, że w kontinuum Cosseratów (por. p. 2) prędkość obrotu bazy wektorowej $\underset{a}{d}$ pokrywa się z prędkością obrotu elementu objętościowego ośrodka, to otrzymamy model ciała, który jest również przypadkiem szczególnym materiału nieprostego drugiego rzędu. Model ten R. A. TOUPIN [1964] nazywa ośrodkiem Cosseratów ze związanymi obrotami. C. TRUESDELL i W. NOLL [1964, § 96] taki materiał nazywają materiałem Grioli-Toupina. Zajmiemy się nim poniżej. Należy zaznaczyć, że oprócz materiału Grioli-Toupina możliwe są również inne przypadki szczególne materiału nieprostego drugiego rzędu, z których dwa przedstawiono w pracy Cz. WOŹNIAKA [1967, a].

3.2. Materiał Grioli-Toupina. Jak pamiętamy (p. 2) w ośrodku Cosseratów ortonormalna baza wektorowa $\underset{a}{d}$, zaczepiona w punkcie X, przemieszcza się tak jak punkt X, lecz może doznać obrotów niezależnych od ruchu punktu X. Poniżej rozpatrzymy przypadek, gdy prędkość obrotu bazy $\underset{a}{d}$ w punkcie X jest taka sama jak prędkość obrotu kierunków głównych odkształcenia w tym punkcie, to znaczy:

$$\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij},$$

gdzie ω_{ij} jest prędkością obrotu kierunków głównych odkształcenia ośrodka, a $\tilde{\omega}_{ij}$ — zdefiniowaną wzorem (2.15) prędkością obrotu wektorów kierunkowych. Gęstość całkowitej energii wewnętrznej wyraża się wtedy wzorem:

$$E = \frac{1}{2}\varrho\dot{x}^2+\mathcal{L}(x^i_{,\alpha}; x_{i,\alpha\beta}; X_\alpha). \tag{3.12}$$

W pracy R. A. TOUPINA [1964] wykazuje się, że dla takich materiałów naprężenia momentowe wyrażają się zależnością

$$h_{[i(j]k)} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{[j,\alpha\beta}} x_{i],\alpha}x_{k,\beta}, \tag{3.13}$$

przy czym $h_{[ijk]}$ pozostaje w rozpatrywanej teorii nieokreślone. Funkcja $\mathcal{L}$ powinna wtedy dodatkowo spełniać 10 następujących związków:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{(i\alpha\beta}} x_{j,\alpha}x_{k),\beta} = 0. \tag{3.14}$$

Warunki niezmienniczości $\mathcal{L}$ względem ruchów sztywnych można przedstawić następująco:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{[i,\alpha}} x_{j],\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{[i,\alpha\beta}} x_{j],\alpha\beta} = 0. \tag{3.15}$$

Ogólne rozwiązanie równań (3.14), (3.15) (wg R. A. TOUPINA [1962]) ma postać

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(E_{\alpha\beta}, K_{[\alpha\beta]\gamma}, X_\alpha). \tag{3.16}$$

Wyrażenie (3.16) świadczy o tym, że omówiony przypadek szczególny kontinuum Cosseratów jest jednocześnie przypadkiem szczególnym materiału nieprostego drugiego rzędu [por. wzór (3.3)].

Podstawowy układ równań dla ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami (materiał Grioli-Toupina) został podany w pracach G. GRIOLI [1960, 1962], w pracy R. A. TOUPINA [1962] oraz dla przypadku liniowego materiału hipersprężystego w pracach E. A. AERO i E. W. KUWSZYŃSKIEGO [1960, 1964]).

Zasady zachowania masy, pędu, krętu i energii mechanicznej mają dla materiału Grioli-Toupina poniższą postać:

$$\begin{aligned} &J\varrho = \varrho_0, \qquad J \equiv \sqrt{\frac{a}{A}}\det x_{i,\alpha}, \\ &t_{ij,i} + f_j = \varrho \ddot{x}_j, \\ &m_{ij,i} + l_j + t_{kl}\varepsilon_{klj} = 0, \\ &\dot{\mathcal{L}} = t_{(ij)}\dot{x}_{j,i} + \frac{1}{2}\overset{(d)}{m}_{ij}\varepsilon_{mnj}\dot{x}_{n,ml}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Występujący we wzorach (3.17) tensor naprężeń momentowych m_{ij} został omówiony w p. 2 [por. wzór (2.21)], a $\overset{(d)}{m}_{ij}$ oznacza część dewiacyjną tego tensora.

Z równania $(3.17)_4$ R. D. MINDLIN i H. F. TIERSTEN ponownie wprowadzili równania konstytutywne, oparte na miarach odkształcenia R. A. TOUPINA $E_{\alpha\beta}$, $K_{[\alpha\beta]\gamma}$. Zamiast drugiej z tych miar w ich pracy wykorzystano tensor:

$$K_{\alpha\beta} \equiv -E_{\alpha\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu\beta}. \tag{3.18}$$

Równania konstytutywne dla hipersprężystych materiałów Grioli-Toupina mają wtedy postać:

$$\begin{aligned} t_{(ij)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha}x_{j,\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha\mu}x_{j,\nu}\varepsilon_{\mu\nu\beta}, \\ \overset{(d)}{m}_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\alpha\beta}} x_{i,\alpha}X_{\beta,j}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

W omawianej pracy oraz w pracy R. D. MINDLINA [1964] przeprowadzono linearyzację powyższych związków. Wtedy

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}a_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} + b_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varkappa_{kl} + \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \tag{3.20}$$

gdzie ε_{ij} oznacza klasyczny tensor małych odkształceń, a $\varkappa_{ij} \equiv \varepsilon_{il,n}\varepsilon_{nlj}$. W przypadku szczególnym izotropii materiału w związku (3.20) występują cztery niezależne stałe materiałowe. W. NOWACKI [1966] wprowadził dodatkowo wpływ klasycznego pola termicznego do równań konstytutywnych izotropowego materiału Grioli-Toupina. Gęstość energii ma wtedy postać:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E} = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{ii})^2+\mu'\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}+\mu''\varkappa_{ij}\varkappa_{ji}-\beta\gamma_{kk}\theta-\frac{m}{2}\theta^2,\\
&\beta \equiv \alpha_t(3\lambda+2\mu),
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

gdzie θ oznacza temperaturę odniesioną do temperatury stanu naturalnego, α_t współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej. Z dodatniej określoności formy (3.21) R. D. MINDLIN i H. F. TIERSTEN wyprowadzają następujące nierówności dla stałych materiałowych

$$
\mu > 0, \quad 3\lambda+2\mu > 0, \quad \mu' > 0, \quad -1 < \frac{\mu''}{\mu'} < 1. \tag{3.22}
$$

Związki fizyczne dla omawianego materiału przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
&t_{(ij)} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu\varepsilon_{ij}+(\lambda\varepsilon_{kk}-\beta\theta)\delta_{ij},\\
&\overset{(d)}{m}_{ij} = 2\mu'\left(\varkappa_{ij}+\frac{\mu''}{\mu'}\varkappa_{ji}\right).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

W cytowanej pracy W. NOWACKIEGO [1966] znajduje się również przemieszczeniowy układ równań, dla którego przeprowadzano dyskusję własności poprzez formalne rozprzężenie. Funkcje Greena dla tego układu wyprowadził J. WYRWIŃSKI [1966].

Należy zwrócić uwagę na pewną osobliwość materiału Grioli-Toupina związaną z warunkami brzegowymi. Jak wykazali R. D. MINDLIN i H. F. TIERSTEN [1962] oraz W. T. KOITER [1964], w kontinuum ze związanymi obrotami można dać jedynie pięć warunków brzegowych [por. również wzór (3.6)]. Na przykład wyrażone w naprężeniach będą one miały postać:

$$
\begin{aligned}
&\left[t_{(ij)}+\frac{1}{2}\varepsilon_{jli}(\overset{(d)}{m}_{kl,k}-m_{(nn),l})\right]n_j = t_i-\frac{1}{2}\varepsilon_{jli}m_{(n),l}n_j,\\
&\overset{(d)}{m}_{ji}n_j-m_{nn}n_i = m_i-m_{(n)}n_i,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

gdzie $m_{(n)} \equiv m_i n_i$, $m_{(nn)} \equiv \overset{(d)}{m}_{ji}n_j n_i$.

Można dostrzec, że wzór $(3.24)_1$ opisuje trzy składowe wektora gęstości siły, a wzór $(3.24)_2$ dwie składowe (styczne do brzegu) wektora gęstości momentu.

Cytowana wyżej praca W. T. KOITERA zawiera również warunki na krawędzi dwu płatów gładkich powierzchni brzegowej w kontinuum z materiału Grioli-Toupina, wprowadzone po raz pierwszy w innym ujęciu przez R. A. TOUPINA [1962].

Opracowanie R. D. MINDLINA i H. F. TIERSTENA [1964] obok podstaw liniowej teorii materiału Grioli-Toupina zawiera również analizę ruchu falowego, którą przeprowadzono przy pomocy funkcji przemieszczeń. Jeśli u jest wektorem przemieszczenia, to powyższe funkcje wprowadza się następująco:

$$
u = \operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}H, \quad \operatorname{div}H = 0. \tag{3.25}
$$

Po podstawieniu do układu równań przemieszczeniowych otrzymamy

$$c_1^2\nabla^2\varphi = \ddot{\varphi}, \quad c_2^2(1-l^2\nabla^2)\nabla^2 H = \ddot{H}, \tag{3.26}$$

gdzie

$$c_2^2 \equiv \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}, \quad c_2^2 \equiv \frac{\mu}{\varrho}, \quad l^2 \equiv \frac{\mu'}{\mu}. \tag{3.27}$$

Układ równań (3.26) został wykorzystany do konstrukcji rozwiązań szczegółowych w pracach R. D. MINDLINA [1963 b, 1964], G. N. SAWINA [1965], G. N. SAWINA i A. N. GUZA [1966], W. A. PALMOWA [1964 a, b]. W pierwszej z wyżej cytowanych prac R. D. MINDLINA oraz w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZA rozwiązania oparto na wprowadzonej funkcji zmiennej zespolonej.

Na zakończenie należy wspomnieć o wyprowadzonych w pracy W. F. KOITERA [1964] twierdzeniach o minimum energii potencjalnej i minimum pracy dodatkowej, które pozwalają zastosować przybliżone metody rozwiązań.

4. Ciała z mikrostrukturą

4.1. Podstawowe pojęcie i definicje. W punkcie tym rozważać będziemy pewien uogólniony model ośrodka wprowadzony przez R. A. TOUPINA [1964], który będziemy nazywać ciałem z mikrostrukturą([1]) i oznaczać symbolem B. Elementami ciała B są punkty materialne X, przy czym każdemu punktowi $X \in B$ przyporządkowujemy układ zaczepionych w nim n wektorów $d_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n)$. Wektory $d_\mathfrak{a}$ nazwijmy wektorami kierunkowymi.

Powyższa definicja ciała z mikrostrukturą jest jedną z możliwych koncepcji uogólnienia klasycznej definicji ciała (W. NOLL [1958]). Szczególnym przypadkiem ciała z mikrostrukturą jest ośrodek Cosseratów omówiony w p. 2. Nie będziemy tu zajmować się związkiem pomiędzy zdefiniowanym powyższym modelem ciała z mikrostrukturą a rzeczywistym ciałem z mikrostrukturą.

Przegląd zagadnień dotyczących ciała z mikrostrukturą oprzemy przede wszystkim na podstawowej pracy R. A. TOUPINA [1964] jako najbardziej reprezentatywnej dla tej problematyki([2]).

4.2. Kinematyka. Niech x oznacza punkt trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa E, w którym w chwili t znajduje się punkt materialny X ciała B. Ruch ciała z mikrostrukturą możemy wtedy opisać związkami:

$$x = x(X, t), \quad d_\mathfrak{a} = d_\mathfrak{a}(X, t) \tag{4.1}$$

bądź wprowadzając kartezjańskie współrzędne materialne $X_K (K = 1, 2, 3)$ w B oraz przestrzenne x_k $(k = 1, 2, 3)$ w E można je przedstawić w równoważnej postaci

$$x_k = x_k(X_K, t), \quad d_{\mathfrak{a}k} = d_{\mathfrak{a}k}(X_K, t). \tag{4.2}$$

([1]) Według wcześniejszej nomenklatury jest ono nazywane ciałem zorientowanym (ang. oriented body). Koncepcja ciała zorientowanego pochodzi od J. L. ERICKSENA i C. TRUESDELLA [1958]. Była ona pierwotnie zastosowana do opisu kinematyki i statyki prętów i powłok, a następnie uogólniona przez C. TRUESDELLA [1960, § 61] na przypadek ciała trójwymiarowego.

([2]) Zwięzłe omówienie pracy R. A. TOUPINA [1964] przedstawili C. TRUESDELL i W. NOLL [1965, § 98].

Niech $x_{k,K}$ oraz $d_{\mathfrak{a}k,K}$ oznaczają odpowiednio gradient odkształcenia oraz gradient odkształcenia mikrostruktury. Wprowadźmy następnie prawy tensor odkształcenia Cauchy'ego-Greena

$$a_{KL} \equiv x_{i,K} x_{i,L} \tag{4.3}$$

oraz tzw. tensor odkształcenia mikrostruktury

$$q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \equiv d_{i\mathfrak{a}} d_{i\mathfrak{b}}. \tag{4.4}$$

Wartości tych tensorów w chwili porównawczej $t = T$ oznaczmy odpowiednio

$$A_{KL}(X) \equiv a_{KL}(X, T), \quad Q_{\mathfrak{a}b}(X) \equiv q_{\mathfrak{a}b}(X, T). \tag{4.5}$$

4.3. Ruch sztywny. Ruchem sztywnym ciała z mikrostrukturą nazywać będziemy ruch, w którym związki (4.2) mają postać (por. 2.2)

$$x_i(X, t) = R_{iK}(t) X_K + V_i(t), \quad d_{\mathfrak{a}i}(X, t) = R_{iK}(t) D_{\mathfrak{a}K}(X), \tag{4.6}$$

gdzie R_{iK} jest tensorem ortogonalnym, natomiast

$$D_{\mathfrak{a}}(X) \equiv d_{\mathfrak{a}}(X, T) \tag{4.7}$$

są wektorami kierunkowymi w chwili porównawczej. Oznacza to, że ciało nie odkształca się w sensie klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych, a wektory kierunkowe są związane w sposób sztywny z ciałem. Warunki konieczne ruchu sztywnego wyrażają się wzorami:

$$a_{KL}(X, t) = A_{KL}(X), \quad q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(X, t) = Q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(X). \tag{4.8}$$

Według R. A. TOUPINA [1964] są to również warunki dostateczne. Nie trudno udowodnić, że stwierdzenie to nie jest prawdziwe. Na przykład dla

$$x_i(X, t) = R_{iK}(t) X_K + V_i(t), \quad d_{\mathfrak{a}i}(X, t) = S_{iK}(t) D_{\mathfrak{a}K}(X), \tag{4.9}$$

gdzie R_{iK} i S_{iK} są dwoma dowolnymi lecz różnymi od siebie tensorami ortogonalnymi, związki (4.6) nie są spełnione, podczas gdy warunki konieczne (4.8) zachodzą. Związki (4.3), (4.4) i (4.9) wskazują na to, że miary odkształcenia a_{KL} i $q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ nie opisują względnego obrotu mikrostruktury.

4.4. Zasada Hamiltona. Punktem wyjścia dalszych rozważań dotyczących ciała hipersprężystego z mikrostrukturą może być zasada wariacyjna Hamiltona. Zasadę tę R. A. TOUPIN [1964] przyjmuje w postaci

$$\delta A(P \cdot I) + \int_I \int_P (F_i \delta x_i + G_i^{\mathfrak{a}} \delta d_{\mathfrak{a}i}) dV dt + \\ + \int_I \int_{\partial P} (T_i \delta x_i + H_i^{\mathfrak{a}} \delta d_{\mathfrak{a}i}) dA\, dt - \int_P (P_i \delta x_i + Q_i^{\mathfrak{a}} \delta d_{\mathfrak{a}i}) dV \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{4.10}$$

gdzie A jest wielkością działania dopuszczającą istnienie gęstości działania: $L = L(x_i, t, d_{\mathfrak{a}i}, \dot{x}_i, \dot{d}_{\mathfrak{a}i}, x_{i,K}, d_{\mathfrak{a}i,K}, X)$, F_i, $G_i^{\mathfrak{a}}$ są uogólnionymi siłami objętościowymi, T_i, $H_i^{\mathfrak{a}}$ są uogólnionymi siłami powierzchniowymi, natomiast P_i, $Q_i^{\mathfrak{a}}$ są uogólnionymi pędami. Wszystkie te wielkości są odniesione względem jednostki objętości lub powierzchni konfiguracji porównawczej.

Z postaci gęstości działania wynika, że rozpatrywany materiał może być nazwany materiałem prostym z mikrostrukturą. Ogólną teorię materiału nieprostego z wektorami kierunkowymi, zbudowaną w oparciu o termodynamikę materiałów o zanikającej pamięci (B. D. COLEMAN [1964]) przedstawił S. ZAHORSKI [1967]. Wykazał on, że funkcjonał energii swobodnej może w ogólnym przypadku zależeć od pól uogólnionych sił objętościowych.

Postulowana przez TOUPINA zasada Hamiltona jest uogólnieniem zasady przyjętej we wcześniejszych pracach J. L. ERICKSENA [1961], [1962 b. c]. Równanie (4.10) jest bowiem ogólniejszą postacią równania podanego u J. L. ERICKSENA [1962, b], które w przyjętych w p. 2 niniejszej pracy oznaczeniach przyjmuje postać

$$(4.11)\qquad \delta \int\limits_{X_t(P)} L(\varrho, d_i d_{i,K})dv = \int\limits_{X_t(\partial P)} (t_i\delta x_i + h_i \delta d_i)da + \int\limits_{X_t(P)} \varrho(f_i \delta x_i + l_i \delta d_i)dv.$$

Powyższe równanie opisuje zachowanie się cieczy nielepkiej z jednym wektorem kierunkowym, zwanej przez J. L. ERICKSENA cieczą anizotropową.

4.5. Równania ruchu w opisie materiałowym. Warunkami koniecznymi i dostatecznymi spełnienia równania wariacyjnego (4.10) dla dowolnych różniczkowalnych wariacji δx_i, $\delta d_{\alpha i}$ pól zmiennych niezależnych są równania ruchu:

$$(4.12)\qquad \begin{aligned} &T_{Ki,K} + F_i - \dot{P}_i^* = -L_i, \\ &H^{\alpha}_{Ki,K} - G^{*\alpha}{}_i + G^{\alpha}{}_i - \dot{Q}^{*\alpha}{}_i = 0, \end{aligned} \qquad X \in P, \quad t \in I,$$

w których

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} &G^{*\alpha}{}_i \equiv -\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha i}}, \quad T_{Ki} \equiv -\frac{\partial L}{\partial x_{i,K}}, \quad H^{\alpha}_{Ki} \equiv -\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha i,K}}, \\ &P_i^* \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad Q_i^{*\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{d}_{\alpha i}}, \end{aligned}$$

oraz warunki brzegowe i początkowe:

$$(4.14)\qquad T_{Ki}N_K - T_i = 0, \quad H_K{}^{\alpha}{}_i N_K - H^{\alpha}{}_i = 0, \quad X \in \partial P, \quad t \in I,$$

$$(4.15)\qquad P_i^* - P_i = 0, \quad Q^{*\alpha}{}_i - Q^{\alpha}{}_i = 0, \quad X \in P, \quad t = t_1 \text{ lub } t = t_2.$$

W powyższych wzorach N_K jest jednostkowym wektorem zewnętrznie normalnym do brzegu $X_T(\partial P)$ obszaru $X_T(P)$ zajmowanego przez część P ciała B w chwili porównawczej T.

Z równań (4.12) i (4.14) wynika, że T_{Ki} i $H_K{}^{\alpha}{}_i$ mogą być nazwane uogólnionymi tensorami naprężeń Pioli-Kirchhoffa.

4.6. Grupa przemieszczeń euklidesowych. Będziemy mówili, że dwa ruchy $(x^*(X, t^*), d_\alpha^*(X, t^*)), (x(X, t), d_\alpha(X, t))$ danego ciała z mikrostrukturą różnią się o przemieszczenie euklidesowe, jeżeli zachodzą związki

$$(4.16)\qquad \begin{aligned} &x_i^*(X, t^*) = R_{ij}x_j(X, t) + S_i, \\ &d_{\alpha i}^*(X, t^*) = R_{ij}d_{\alpha j}(X, t), \quad t^* = t + c, \end{aligned}$$

gdzie R_{ij} jest tensorem ortogonalnym. Podstawowe właściwości zbioru przekształceń (4.16), zwanego grupą przemieszczeń euklidesowych, zostały wymienione w p. 2.2.

4.7. Warunki niezmienniczości i zasady zachowania. Analogicznie do pracy Cosseratów TOUPIN [1964] przyjmuje, że gęstość działania jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Podobnie jak w p. 2.4 pracy można wykazać, że zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad K_{[ij]} = 0, \tag{4.17}$$

gdzie tensor K_{ij} jest określony związkiem (2.12).

Rozpatrując zasadę Hamiltona (4.10) dla następujących kombinacji wariacji zmiennych niezależnych

1. $\delta x_i = S_i, \quad \delta d_{\alpha i} = 0, \quad \dot{S}_i = 0;$
2. $\delta x_i = \Omega_{ij} x_j, \quad \delta d_{\alpha i} = \Omega_{ij} d_{\alpha j}, \quad \dot{\Omega}_{ij} = \Omega_{(ij)} = 0;$
3. $\delta x_i = \dot{x}_i, \quad \delta d_{\alpha i} = \dot{d}_{\alpha i}$

otrzymujemy poniższe związki

$$\int_P P_i dV|_{t_1}^{t_2} - \int_I \int_P F_i dV dt - \int_I \int_{\partial P} T_i dA\, dt = \int_I \int_P \frac{\partial L}{\partial x_i} dV dt, \tag{4.18}$$

$$\int_P (P_{[i} x_{j]} + Q^\alpha{}_{[i} d_{\alpha j]}) dV|_{t_1}^{t_2} - \int_I \int_P (F_{[i} x_{j]} + G^\alpha{}_{[i} d_{\alpha j]}) dV dt -$$
$$- \int_I \int_{\partial P} (T_{[i} x_{j]} + H^\alpha{}_{[i} d_{\alpha j]}) dA\, dt = \int_I \int_P K_{[ji]} dV dt, \tag{4.19}$$

$$\int_P (P_i \dot{x}_i + Q^\alpha{}_i \dot{d}_{\alpha i} - L) dV|_{t_1}^{t_2} - \int_I \int_P (F_i \dot{x}_i + G^\alpha{}_i \dot{d}_{\alpha i}) dV dt -$$
$$- \int_I \int_{\partial P} (T_i \dot{x}_i + H^\alpha{}_i \dot{d}_{\alpha i}) dA\, dt = - \int_I \int_P \frac{\partial L}{\partial t} dV dt. \tag{4.20}$$

Z warunków niezmienniczości (4.17) gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych wynika, że prawe strony równań (4.18)–(4.20) są równe zeru. Zatem lewe strony są również równe zeru, skąd wynika

$$\int_P P_i dV|_{t_1}^{t_2} = \int_I \int_P F_i dV dt + \int_I \int_{\partial P} T_i dA\, dt, \tag{4.21}$$

$$\int_P (P_{[i} x_{j]} + Q^\alpha{}_{[i} d_{\alpha j]}) dV|_{t_1}^{t_2} = \int_I \int_P (F_{[i} x_{j]} + G^\alpha{}_{[i} d_{\alpha j]}) dV dt +$$
$$+ \int_I \int_{\partial P} (T_{[i} x_{j]} + H^\alpha{}_{[i} d_{\alpha j]}) dA\, dt, \tag{4.22}$$

$$\int_P (P_i \dot{x}_i + Q^\alpha{}_i \dot{d}_{\alpha j} - L) dV|_{t_1}^{t_2} = \int_I \int_P (F_i \dot{x}_i + G^\alpha{}_i \dot{d}_{\alpha i}) dV dt + \int_I \int_{\partial R} (T_i \dot{x}_i + H^\alpha{}_i \dot{d}_{\alpha i}) dA\, dt. \tag{4.23}$$

Warunki powyższe mogą być nazwane uogólnionymi zasadami zachowania pędu (4.21), krętu (4.22) i energii mechanicznej (4.23) dla ciała sprężystego z mikrostrukturą. Z drugiej strony można wykazać, że z tak określonych zasad zachowania pędu, krętu i energii mechanicznej wynikają warunki (4.17) niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Zatem za TOUPINEM [1964] można powiedzieć, że dla ciała sprężystego z mikrostrukturą zasady zachowania pędu, krętu i energii mechanicznej są równoważne warunkom niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych.

4.8. Energia kinetyczna i potencjał sprężysty. R. A. TOUPIN [1964] zakłada, że gęstość działania ma postać

$$L = T - W, \tag{4.24}$$

gdzie

$$T = \frac{1}{2}(\varrho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i + \nu^{\alpha b} \dot{d}_{\alpha i} \dot{d}_{bi}), \quad \nu^{[\alpha b]} = \dot{\nu}^{\alpha b} = 0, \quad \dot{\varrho}_0 = 0 \tag{4.25}$$

jest gęstością energii kinetycznej, natomiast

$$W = W(d^i_{\alpha}, x_{i,K}, d_{\alpha i,K}, X) \tag{4.26}$$

jest potencjałem sprężystym. Z (4.24) i (4.25) wynika, że gęstość energii kinetycznej jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych, wektor pędu

$$P_i = \varrho_0 \dot{x}_i$$

jest równoległy do prędkości x_0 i jest jej liniową funkcją, natomiast uogólniony pęd

$$Q^{\alpha}_i = \nu^{\alpha b} \dot{d}_{bi}$$

jest liniową funkcją prędkości zmiany wektorów kierunkowych.

4.9. Równania ruchu w opisie przestrzennym. Równania ruchu (4.12) oraz warunki brzegowe (4.14) w opisie przestrzennym mają postać

$$\begin{gathered} t_{ji,j} + f_i = \varrho \ddot{x}_i, \\ h_{kji,k} + t_{ji} + j^{-1} K_{ji} + l_{ji} = j^{-1} \dot{Q}_{ij} + \varrho \dot{x}_i \dot{x}_j, \end{gathered} \tag{4.27}$$

$$t_{ji} n_j - t_i = 0, \quad h_{kji} n_k - h_{ji} = 0, \tag{4.28}$$

gdzie $j = \det x_{k,K}$ jest jakobianem odwzorowania $X \to x$, n_k jest wektorem jednostkowym zewnętrznie normalnym do brzegu ciała w konfiguracji aktualnej,

$$t_{ji} \equiv j^{-1} T_{Ki} x_{j,K}, \quad h_{kji} \equiv j^{-1} H_K{}^{\alpha}{}_j x_{k,K} d_{\alpha i}$$

są odpowiednio tensorem naprężeń Cauchy'ego i tzw. tensorem hipernaprężeń (ang. hiperstresses),

$$t_i \equiv T_i \frac{dA}{da}, \quad h_{ij} \equiv H^{\alpha}{}_j d_{\alpha i} \frac{dA}{da},$$

są uogólnionymi siłami powierzchniowymi,

$$Q_{ij} = \nu^{\alpha b} d_{\alpha j} \dot{d}_{bi}$$

jest uogólnionym pędem, natomiast

$$\varrho = j^{-1} \varrho_0$$

jest gęstością materiału w chwili t.

Przedstawiony opis nie jest w ogólnym przypadku kompletny. Dla przykładu (4.12) zawiera $3(n+1)$ równań, podczas gdy (4.27) przedstawia tylko dwanaście równań. Podobnie wygląda liczba warunków brzegowych (4.14) i (4.28) oraz liczba niezależnych składowych uogólnionego tensora naprężenia. Powyższy opis jest kompletny jedynie w przypadku $n \leqslant 3$. Dla $n = 3$ równania (4.27) i (4.28) opisują ciało z mikrostrukturą doznającą jednorodnego odkształcenia, rozpatrzone w ujęciu liniowym przez R. D. MINDLINA [1964].

Biorąc część antysymetryczną równań $(4.27)_2$ i $(4.28)_2$ otrzymujemy równania ruchu

$$h_{k[ji],k}+t_{[ji]}+l_{[ji]} = j^{-1}\dot{Q}_{[ij]}$$

oraz warunki brzegowe Cosseratów

$$h_{k[ij]}n_k-h_{[ij]} = 0.$$

4.10. Miary odkształcenia. Wprowadzając miary odkształcenia R. A. TOUPIN [1964] wykorzystuje zasadę niezmienniczości. Mianowicie z (4.24), (4.25) i (4.26) wynika, że gęstość działania będzie niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych wtedy i tylko wtedy, gdy niezmienniczy będzie potencjał sprężysty. Można wykazać, korzystając np. z twierdzenia Cauchy'ego (C. TRUESDELL i W. NOLL [1965, § 11]), że zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy potencjał sprężysty jest funkcją następujących argumentów

$$\begin{aligned} a_{KL} &\equiv x_{i,K}x_{i,L}, \\ \Delta_{\alpha K} &\equiv x_{i,K}d_{\alpha i}, \\ \Delta_{\alpha KL} &\equiv x_{i,K}d_{\alpha i\,L}, \\ s &\equiv \operatorname{sign}\det x_{i,K}, \\ &X. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Zatem $a_{KL}, \Delta_{\alpha K}, \Delta_{\alpha KL}$ są miarami odkształcenia ośrodka z mikrostrukturą. Miarą odkształcenia jest również klasyczny tensor odkształcenia względnego

$$e_{KL} \equiv \frac{1}{2}(a_{KL}-A_{KL}) \tag{4.30}$$

oraz tzw. tensor odkształcenia mikrostruktury względem «makrostruktury»

$$\gamma_{\alpha K} \equiv -(\Delta_{\alpha K}-a_{KL}D_{\alpha L}). \tag{4.31}$$

W przypadku gdy wektory kierunkowe są wektorami materialnymi, tzn. gdy

$$d_{\alpha i} = x_{i,K}D_{\alpha K},$$

to wszystkie składowe tensora $\gamma_{\alpha K}$ są tożsamościowo równe zeru.

R. D. MINDLIN [1964] rozpatrzył liniową teorię ciała z mikrostrukturą doznającą jednorodnego odkształcenia. W przypadku $n = 3$ oraz $D_{\alpha K} = \delta_{\alpha K}$ zlinearyzowane miary odkształcenia $(4.29)_3$, (4.30) oraz (4.31) pokrywają się z miarami odkształcenia Mindlina:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha ji} &\approx \psi_{\alpha i,j} = \varkappa_{\alpha ij}, \\ e_{ij} &\approx u_{(i,j)}, \\ \gamma_{\alpha i} &\approx \psi_{\alpha i}+u_{i,\alpha}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

gdzie:

$$\psi_{\alpha i} = d_{\alpha i}-D_{\alpha i}$$

nazwane jest tensorem dystorsji, $\varkappa_{\alpha ij}$ jest tzw. gradientem mikro-odkształcenia, natomiast u_i jest wektorem przemieszczenia.

Teorię ciała z mikrostrukturą doznającą jednorodnego odkształcenia na innej drodze zbudowali A. ERINGEN i E. S. SUHUBI [1964 a], [1964 b] oraz A. ERINGEN [1964]. Intencją ich było wyprowadzenie wszystkich równań ośrodka w oparciu o założenie, że pojedyncza mikrostruktura jest klasycznym kontinuum. Jakkolwiek otrzymany układ równań podstawowych jest poprawny, to jednak pewne zastrzeżenia wzbudzają niektóre przekształcenia. Biegunowo-symetryczne zagadnienie koncentracji naprężeń w takim ciele rozpatrzył J. L. BLEUSTEIN [1966].

A. E. GREEN, P. M. NAGHDI i W. L. WAINRIGHT [1965] rozpatrzyli szczególny przypadek ciała dwuwymiarowego z jednym wektorem kierunkowym. Zbudowana przez nich teoria ma opisać zachowanie się cienkiej powłoki.

4.11. Ośrodek Cosseratów. R. A. TOUPIN [1964] wyjaśnił związki przedstawionej teorii z teorią braci Cosseratów (por. p. 2). Ośrodkiem Cosseratów jest kinematycznie równoważne ciało z trzema liniowo niezależnymi wektorami kierunkowymi przy dodatkowym założeniu

$$d_{\mathfrak{a}i}d_{\mathfrak{b}i} = q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \text{const}, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, 3 \tag{4.33}$$

oznaczającym, że wektory kierunkowe mogą w procesie odkształcenia doznać tylko sztywnego obrotu. Ograniczenie (4.33) jest równoważne warunkom

$$\delta d_{\mathfrak{a}(j}d^{\mathfrak{a}}{}_{i)} = 0. \tag{4.34}$$

lub

$$\dot{d}_{\mathfrak{a}(j}d^{\mathfrak{a}}{}_{i)} = 0, \tag{4.35}$$

gdzie $d^{\mathfrak{a}}{}_i$ jest bazą wzajemną względem bazy $d_{\mathfrak{a}i}$. Z równań (4.35) wynika, że zasada zachowania energii dla ciała sprężystego Cosseratów przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{X_t(P)} E dv = \int\limits_{X_t(P)} (f_i\dot{x}_i + 2l_{[ij]}\tilde{\omega}_{ij})dv + \int\limits_{X_t(\partial P)} (t_i\dot{x}_i + 2h_{[ij]}\tilde{\omega}_{ij})da, \tag{4.36}$$

gdzie

$$E \equiv \frac{1}{2}\varrho\dot{x}_i\dot{x}_i + \frac{1}{2}\frac{\varrho}{\varrho_0}\gamma^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\dot{d}_{\mathfrak{a}i}\dot{d}_{\mathfrak{b}i} + \frac{\varrho}{\varrho_0}W,$$

natomiast

$$\tilde{\omega}_{ij} \equiv \frac{1}{2}d^{\mathfrak{a}}{}_i\dot{d}_{\mathfrak{a}j}$$

jest tensorem prędkości rotacji bazy wektorów kierunkowych.

4.12. Ciecz anizotropowa Ericksena. J. L. ERICKSEN [1960, 1961, 1962 a, b, c, d] rozpatrzył ogólną teorię ośrodka ciągłego z jednym wektorem kierunkowym d_i. Punktem wyjścia jego rozważań były zasady zachowania przyjęte w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{X_t(P)} \varrho dv = 0, \tag{4.37}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{X_t(P)} \varrho\dot{d}_i dv = \int\limits_{X_t(\partial P)} h_i da + \int\limits_{X_t(P)} k_i dv, \tag{4.38}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{X_t(P)} \varrho\dot{x}_i dv = \int\limits_{X_t(\partial P)} t_i da + \int\limits_{X_t(P)} f_i dv, \tag{4.39}$$

$$(4.40)\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{X_t(P)} \varrho(x_{[i}\dot{x}_{j]}+d_{[i}\dot{d}_{j]})\,dv = \int\limits_{X_t(\partial P)} (x_{[i}t_{j]}+d_{[i}h_{j]})\,da + \int\limits_{X_t(P)} (x_{[i}f_{j]}+d_{[i}l_{j]})\,dv,$$

$$(4.41)\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{X_t(P)} \varrho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\dot{x}_i\dot{x}_i+\frac{1}{2}\dot{d}_i\dot{d}_i\right)dv =$$

$$= \int\limits_{X_t(\partial P)} (t_i\dot{x}_i+h_i\dot{d}_i-h)\,da + \int\limits_{X_t(P)} (f_i\dot{x}_i+l_i\dot{d}_i+q)\,dv,$$

gdzie ε jest gęstością energii wewnętrznej, h_j i l_j są uogólnionymi siłami powierzchniowymi i objętościowymi, h opisuje przepływ ciepła przez powierzchnię $X_t(\partial P)$, natomiast q jest wydajnością źródeł ciepła.

Zasady (4.37) i (4.39)–(4.41) są odpowiednio zasadami zachowania masy, pędu, krętu i energii, natomiast zasada (4.38) ma opisywać «lokalny ruch cząstki materialnej». Wydaje się jednak, że nie można jej postulować niezależnie od zasad zachowania pędu i krętu. Zauważmy jeszcze, że przyjmując w równaniach Toupina (4.21), (4.22) $d_{\alpha i} = (d_i)$ otrzymamy zasady zachowania pędu i krętu postulowane przez Ericksena. Następnie jeżeli w zasadzie zachowania energii (4.41) zatrzymamy tylko człony mechaniczne, to będzie ona równoważna równaniu (4.23) przy założeniach $d_{\alpha i} = (d_i)$, $\nu^{\alpha b} = (\varrho_0)$.

Pewne problemy szczególne dla cieczy anizotropowej rozpatrzył P. N. KALONI [1965]. C. TRUESDELL i W. NOLL [1965, §§ 127, 128, 129] zebrali najciekawsze dotychczasowe wyniki dotyczące równań konstytutywnych postulowanych dla cieczy anizotropowej.

5. Materiał prosty z wielobiegunowymi przemieszczeniami

5.1. Podstawowe określenia i definicje. Jak wiadomo, w klasycznej mechanice ośrodka ciągłego aktualne położenie cząstki materialnej X w przestrzeni euklidesowej wyznaczają jej trzy współrzędne przestrzenne x_i. Są one funkcjami czasu t i współrzędnych materialnych X_A cząstki ciała

$$(5.1)\qquad x_i = x_i(X_A, t).$$

Jeżeli przyjmiemy, że do określenia aktualnej konfiguracji cząstki ciała oprócz (5.1) należy podać ν pól tensorowych

$$(5.2)\qquad x_{i|B_\beta|} = x_{i|B_\beta|}(X_A, t), \qquad \beta = 1, 2, \ldots \nu,$$

gdzie oznaczono

$$x_{i|B_\beta|} \equiv x_{iB_1B_2\ldots B_\beta},$$

to ciało takie nazwiemy ciałem z wielobiegunowymi przemieszczeniami (ang. multipolar displacements). Nowe zmienne kinematyczne $x_{i|B_\beta|}$ zostały nazwane przez A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 b] 2^β-biegunowymi przemieszczeniami, zaś ich pochodna materialna

$$v_{i|B_\beta|} = \dot{x}_{i|B_\beta|}$$

została nazwana polem 2^β-biegunowych prędkości (ang. 2^β pole-displacement field, oraz odpowiednio 2^β — pole-velocity field).

Powyższą koncepcję uogólnionego ośrodka ciągłego wprowadzili A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b]. Zaproponowany przez A. E. GREENA i R. S. RIVLINA opis ruchu ciała jest w pewnym sensie równoważny opisowi R. A. TOUPINA [1964] (por. p. 4) ruchu ciała z mikrostrukturą. Mianowicie jeżeli w równaniach $(4.2)_2$ zamiast wektorów kierunkowych $d_{i\alpha}$ wprowadzimy odpowiednią liczbę pól tensorowych $x_{i|B_\beta|}$ w taki sposób, by liczba tych równań pokrywała się z liczbą równań (5.2), to opis Greena i Rivlina będzie odpowiadał opisowi Toupina. Równoważność opisów w szczególnym przypadku ciała z jednym wektorem kierunkowym została wykazana w inny sposób przez A. E. GREENA, P. M. NAGHDIEGO i R. S. RIVLINA [1965], a w przypadku ogólnym przez Cz. WOŹNIAKA [1967a] (por. p. 5.6).

Jakkolwiek opisy Greena, Rivlina oraz Toupina są kinematycznie równoważne, to jednak ze względu na bardziej ogólne podejście do zagadnienia przytoczymy w tym rozdziale najważniejsze rezultaty przedstawione w pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 b].

5.2. Ruch sztywny. W pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 b] przyjęto, że dwa ruchy $(x_i^* = x_i^*(X, t^*),\ x^*_{i|B_\beta|} = x^*_{i|B_\beta|}(X, t^*)),\ (x_i = x_i(X, t),\ x_{i|B_\beta|} = x_{i|B_\beta|}(X, t))$ ciał z wielobiegunowymi przemieszczeniami różnią o ruch sztywny, jeżeli zachodzą związki

$$
\begin{aligned}
x_i^*(X, t^*) &= c_i^*(t^*)+Q_{ij}(t)[x_j(X, t)-c_j(t)],\\
x^*_{i|B_\beta|}(X, t^*) &= Q_{ij}(t)x_{j|B_\beta|}(X, t), \quad \beta = 1, \ldots, \nu, \qquad (5.3)\\
t^* &= t+a,
\end{aligned}
$$

gdzie Q_{ij} jest tensorem ortogonalnym.

Różniczkując względem czasu związki (5.3) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
v_i^*(X, t^*) &= \dot{c}_i^*(t^*)+Q_{ij}(t)[v_j(t)-c_j(t)]+\Omega_{ij}(t)[x_j^*(X, t^*)-c_j^*(t^*)],\\
v^*_{i|B_\beta|}(X, t^*) &= Q_{ij}(t)v_{j|B_\beta|}(X, t)+\Omega_{ij}(t)x^*_{j|B_\beta|}(X, t^*),
\end{aligned} \qquad (5.4)
$$

gdzie

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \equiv \dot{Q}_{ik}Q_{jk}.$$

Z (5.4) wynika wprost

$$
\begin{aligned}
A^*_{ij} = Q_{ir}Q_{is}A_{rs}, &\quad \omega^*_{ij} = Q_{ir}Q_{js}\omega_{rs}+2\Omega_{ij},\\
A^*_{ii_1\ldots i_\mu} &= Q_{ij}Q_{i_1j_1}\ldots Q_{i_\mu j_\mu}A_{jj_1\ldots j_\mu}, \qquad (5.5)\\
B^*_{|B_\beta|:A|A_\alpha|} &= B_{|B_\beta|:A|A_\alpha|},
\end{aligned}
$$

gdzie oznaczono

$$
\begin{aligned}
A_{ij} \equiv 2v_{(i,j)}, &\quad \omega_{ij} \equiv 2v_{[i,j]},\\
A_{i|i_\mu|} &\equiv v_{i|i_\mu|}, \qquad (5.6)\\
B_{|B_\beta|:A|A_\alpha|} &= v_{m,A}x_{m|B_\beta|,|A_\alpha|}+x_{m,A}v_{m|B_\beta|,|A_\alpha|}.
\end{aligned}
$$

Z (5.3) wynikają również związki

$$E^*_{|B_\beta|:A|A_\alpha|} = E_{|B_\beta|:A|A_\alpha|}, \qquad (5.7)$$

gdzie $E_{|B_\beta|}$: $A_{|A_\alpha|}$ jest miarą odkształcenia zdefiniowaną następująco:

$$E_{|B_\beta|:A|A_\alpha|} \equiv x_{m,A}x_{m|B_\beta|,|A_\alpha|}. \qquad (5.8)$$

Klasyczny lewy tensor odkształcenia Cauchy'ego-Greena oznaczać będziemy symbolem E_{AB}.

O dwóch ruchach $(x_i^* = x_i^*(X, t^*),\ x_{i\{B_\beta\}}^* = x_{i\{B_\beta\}}^*(X, t^*)),\ (x_i = x_i(X, t),\ x_{i\{B_\beta\}} = x_{i\{B_\beta\}}(X, t))$ będziemy mówili, że w danej chwili t_0 różnią się o prędkość ruchu ciała sztywnego, jeżeli zachodzą związki

$$
\begin{gathered}
x_i^*(X, t_0) = x_i(X, t_0), \quad x_{i\{B_\beta\}}^*(X, t_0) = x_{i\{B_\beta\}}(X, t_0), \\
v_i^*(X, t_0) = v_i(X, t_0) + b_i + \Omega_{ij} x_j(X, t_0), \\
v_{i\{B_\beta\}}^*(X, t_0) = v_{i\{B_\beta\}}(X, t_0) + \Omega_{ij} x_{j\{B_\beta\}}(X, t_0).
\end{gathered}
\tag{5.9}
$$

Charakterystyka kinematyczna $(5.3)_2$ wielobiegunowych przemieszczeń pokrywa się z podaną przez R. A. TOUPINA [1964] dla wektorów kierunkowych. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] wprowadzili również wielobiegunowe przemieszczenia $x_{ii_1 \dots i_\beta}$ z charakterystyką kinematyczną

$$
x_{ii_1 \dots i_\beta}(X, \tau^*) = Q_{ij}(\tau) Q_{i_1 j_1}(t) \dots Q_{i_\beta j_\beta}(t) x_{jj_1 \dots j_\beta}(X, t)
$$

nie różniącą się w zasadzie od $(5.3)_2$. Dopiero w późniejszej pracy [1965] wspólnej z P. M. Naghdim można znaleźć wzmiankę o wielobiegunowych przemieszczeniach z charakterystyką kinematyczną

$$
x_{ii_1 \dots i_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_\beta}(X, \tau^*) = Q_{ij}(\tau) Q_{i_1 j_1}(\tau) \dots Q_{i_\alpha j_\alpha}(\tau) Q_{i_{\alpha+1} j_{\alpha+1}}(t) \dots Q_{i_\beta j_\beta}(t) x_{jj_1 \dots j_\alpha j_{\alpha+1} \dots j_\beta}(X, \tau).
$$

MIŞICU [1964 c], [1965 b, c, e, f, g], [1966] rozpatrzył podobne pola kinematyczne i efekty mechaniczne z nimi związane.

5.3. Wielobiegunowe siły masowe i powierzchniowe. Jeżeli $F_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}$ oraz $p_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}$ są tensorami i jeżeli

$$
F_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}} v_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}
$$

oraz

$$
p_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}} v_{i\{B_\beta\},\{A_\alpha\}}
$$

są gęstościami pracy odpowiednio na jednostkę masy i powierzchni, wtedy $F_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}$ oraz $p_{i\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}$ nazywać będziemy $2^{\alpha+\beta}$-biegunowymi $(\beta+1)$-go rodzaju siłami masowymi i powierzchniowymi (ang. odpowiednio body force $2^{\alpha+\beta}$ —pole of the $(\beta+1)$-th kind oraz surface force $2^{\beta+\alpha}$ — pole of the $(\beta+1)$-th kind. Według powyższej terminologii wielobiegunowe siły rozpatrzone we wcześniejszej pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a] (por. p. 6) są siłami 2^α-biegunowymi pierwszego rodzaju.

Wielobiegunowe siły powierzchniowe działające na płaszczyźnie parametrycznej $X_K =$ const są oznaczone symbolem $\pi_{Ki\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}$ i nazwane $2^{\alpha+\beta}$-biegunowymi naprężeniami $(\beta+1)$-go rodzaju (ang. surface stress $2^{\alpha+\beta}$-pole of the $(\beta+1)$-th kind).

W dalszym ciągu punktu będziemy rozpatrywać materiał z siłami 2^β-biegunowymi $(\beta+1)$ rodzaju. Wzorując się na terminologii Nolla można go nazwać materiałem prostym z wielobiegunowymi przemieszczeniami.

5.4. Energia kinetyczna. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] zakładają, że gęstość energii kinetycznej dla materiału z wielobiegunowymi przemieszczeniami ma postać

$$
\frac{1}{2} v_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{\nu} Y_{\{A_\alpha\}:\{B_\beta\}} v_{i\{A_\alpha\}} v_{i\{B_\beta\}},
$$

gdzie

(5.10)
$$Y_{\{A_\alpha\}:\{B_\beta\}} = Y_{\{B_\beta\}:\{A_\alpha\}}$$

są tensorami stałymi w czasie. Nie trudno zauważyć, że tak określona energia kinetyczna jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych (por. p. 4.8) oraz jest quasi-diagonalną formą kwadratową argumentów $v_i, v_{i\{A_\beta\}}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, \nu)$. Przyjęta postać energii kinetycznej jest zupełnym analogiem postaci przyjętej przez R. A. TOUPINA (1964] [por. równanie (4.26)].

5.5. Zasada zachowania energii. Zasada entropii. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] postulują zasadę zachowania energii i zasadę entropii w poniższej postaci:

[5.11)
$$\int_P \varrho_0(v_i\dot{v}_i+\dot{U})\,dV = \int_P \varrho_0\Big(r+F_iv_i+\sum_{\beta=1}^{\nu}\overline{F}_{i\{B_\beta\}}v_{i\{B_\beta\}}\Big)dV+ \\ +\int_{\partial P}\Big(-h_0+p_iv_i+\sum_{\beta=1}^{\nu}p_{i\{B_\beta\}}v_{i\{B_\beta\}}\Big)dA,$$
$$\int_P \varrho\Big(\dot{S}-\frac{r}{T}\Big)dV+\int_{\partial P}\frac{h_0}{T}\,dA \geqslant 0,$$

gdzie ϱ_0 jest gęstością masy, U gęstością energii wewnętrznej, r wydajnością źródeł ciepła, h_0 wpływem ciepła przez powierzchnię ∂P, S gęstością entropii, T temperaturą bezwzględną, F_i są siłami masowymi, p_i siłami powierzchniowymi, natomiast $\overline{F}_{i\{B_\beta\}}$ sprowadzonymi wielobiegunowymi siłami masowymi zdefiniowanymi następująco:

(5.12)
$$\overline{F}_{i\{B_\beta\}} \equiv F_{i\{B_\beta\}}-\sum_{\alpha=1}^{\nu}Y_{\{A\alpha\}:\{B_\beta\}}\dot{v}_{i\{A_\alpha\}}.$$

A. E. GREEN i R. S. RIVLIN zakładają następnie, że wszystkie wielkości z wyjątkiem prędkości v_i, występujące w (5.11) są niezmiennicze względem nałożonej stałej prędkości ruchu postępowego. Z powyższego założenia wynika zasada zachowania pędu

(5.13)
$$\int_P \varrho_0\dot{v}_i\,dV = \int_P \varrho_0F_i\,dV+\int_{\partial P}p_i\,dA,$$

a zatem wynikają również klasyczne równania ruchu

(5.14)
$$\pi_{Ki,K}+\varrho_0F_i = \varrho_0\dot{v}_i$$

oraz warunki brzegowe

(5.15)
$$p_i = N_K\pi_{Ki}.$$

Rozwijając zasadę zachowania energii dla infinitezymalnego czworościanu ograniczonego płaszczyznami parametrycznymi $X_K =$ const oraz płaszczyzną z wektorem jednostkowym N_K zewnętrznie ortogonalnym do niej i korzystając z klasycznych warunków brzegowych (5.15) otrzymujemy:

(5.16)
$$\sum_{\beta=1}^{\nu}\overline{p}_{i\{B_\beta\}}v_{i\{B_\beta\}}-\overline{h}_0 = 0,$$

gdzie([3])

$$\bar{p}_{i\{B_\beta\}} \equiv p_{i\{B_\beta\}} - N_K \pi_{Ki\{B_\beta\}}, \qquad \bar{h} = h_0 - N_K q_K,$$

a q_K są strumieniami ciepła.

Następnie korzystając z (5.14), (5.15) i (5.16) oraz twierdzenia Greena można zasadę zachowania energii $(5.11)_1$ przedstawić w postaci różniczkowej

$$\varrho_0 r - q_{K,K} - \varrho_0 \dot{U} + \pi_{Ki} v_{i,K} + \sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{\pi}_{i\{B_\beta\}} v_{i\{B_\beta\}} + \sum_{\beta=1}^{\nu} \pi_{Ki\{B_\beta\}} v_{i\{B_\beta\},K} = 0, \tag{5.17}$$

gdzie([4])

$$\bar{\pi}_{i\{B_\beta\}} = \varrho_0 \bar{F}_{i\{B_\beta\}} + \pi_{Ki\{B_\beta\},K}. \tag{5.18}$$

Posługując się uprzednio wprowadzonymi oznaczeniami (5.6) otrzymujemy podstawowe równania (5.16) i (5.17) w następującej postaci:

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{p}_{i\{B_\beta\}} \left(X_{A,i} B_{\{B_\beta\}:A} - \frac{1}{2} A_{mi} x_{m\{B_\beta\}} \right) - \bar{h}_0 - \frac{1}{2} \omega_{mi} \sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{p}_{i\{B_\beta\}} x_{m\{B_\beta\}} = 0, \tag{5.19}$$

$$\varrho_0 r - q_{K,K} - \varrho_0 \dot{U} + \frac{1}{2} A_{mi} \pi'_{Km} x_{i,K} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \pi'_{Km} x_{i,K} + \tag{5.20}$$

$$+ X_{A,i} \sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{\pi}_{i\{B_\beta\}} B_{\{B_\beta\}:A} + X_{A,i} \sum_{\beta=1}^{\nu} \pi_{Ki\{B_\beta\}} B_{\{B_\beta\}:AK} = 0,$$

gdzie([5])

$$\pi'_{Am} = \pi_{Am} - X_{A,i} \sum_{\beta=1}^{\nu} \left(\bar{\pi}_{i\{B_\beta\}} x_{m\{B_\beta\}} + \pi_{Ki\{B_\beta\}} x_{m\{B_\beta\},K} \right). \tag{5.21}$$

Następnie A. E. Green i R. S. Rivlin [1964 b] zakładają, że wielkości

$$\bar{h}_0, \; q_K, \; p_{i\{B_\beta\}}, \; r, \; \dot{U}, \; \pi_{Km}, \; \bar{\pi}_{i\{B_\beta\}}, \; \pi_{Ki\{B_\beta\}}$$

są niezmiennicze względem nałożonego stałego ruchu obrotowego([6]). Jako konsekwencję powyższych założeń otrzymuje się następujące związki

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{p}_{[i\{B_\beta\}} x_{j]\{B_\beta\}} = 0, \qquad \pi'_{K[m} x_{i],K} = 0. \tag{5.22}$$

([3]) Równania (5.16) wskazują na to, że warunki brzegowe (4.14) otrzymane przez R. A. Toupina [1964] nie zachodzą dla materiału niesprężystego.

([4]) Związek (5.18) jest odpowiednikiem równań ruchu $(4.12)_2$ Toupina.

([5]) Tensor π'_{Am} jest pełnym odpowiednikiem tensora K_{ij} (por. równanie (2.12) (wprowadzonego przez R. A. Toupina [1964]).

([6]) Wystarczy spojrzeć na budowę wzorów (5.18) i (5.12), aby zauważyć, że założenie o niezmienniczości tensorów $\bar{\pi}_{i\{B_\beta\}}$ zostało przyjęte w celu uniknięcia niekonsekwencji mechaniki Newtona, na której gruncie została zbudowana cała teoria.

Wobec (5.22) równania (5.19) i (5.20) redukują się do postaci

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{p}_{i[B_\beta]}\left(X_{A,i}B_{[B_\beta]:A} - \frac{1}{2}A_{mi}x_{m[B_\beta]}\right) - \bar{h}_0 = 0 \tag{5.23}$$

oraz

$$\varrho_0 r - q_{K,K} - \varrho_0 \dot{U} + \frac{1}{2}A_{mi}\pi'_{Km}x_{i,K} + X_{A,i}\sum_{\beta=1}^{\nu}(\bar{\pi}_{i[B_\beta]}B_{[B_\beta]:A} + \pi_{Ki[B_\beta]}B_{[B_\beta]:AK} = 0. \tag{5.24}$$

Równanie $(5.22)_2$ jest równoważne warunkom $(4.17)_3$ niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych podanym przez R. A. TOUPINA [1964]. Można przewidzieć, że równania (5.22) są inaczej zapisanymi warunkami brzegowymi oraz równaniami ruchu Cosseratów.

A. E. GREEN i P. M. NAGHDI [1965 b, 1966] opierając się na zasadzie zachowania energii, zasadzie entropii oraz na zasadach niezmienniczości w podobny sposób wyprowadzili warunki nieciągłości dla ciała z wielobiegunowymi przemieszczeniami.

5.6. Materiał sprężysty prosty. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964b] materiałem sprężystym nazywają materiał, dla którego zachodzą związki:

$$\begin{aligned}
U &= U(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}),\\
\pi'_{Ki} &= \pi'_{Ki}(S, x_{i,A}, x_{[iB_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}),\\
\pi_{Ki[B_\beta]} &= \pi_{Ki[B_\beta]}(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}),\\
\bar{\pi}_{i[B_\beta]} &= \bar{\pi}_{i[B_\beta]}(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}),\\
T &= T(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}),\\
\bar{p}_{i[B_\beta]} &= \bar{p}_{i[B_\beta]}(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}, N_K),\\
\bar{h}_0 &= \bar{h}_0(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}, T_{,[A_\gamma]}, N_K),\\
q_K &= q_K(S, x_{i,A}, x_{i[B_\gamma]}, x_{i[B_\gamma],A}, T_{,[A_\gamma]}).
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\beta = 1, 2, \ldots, \nu,\\
&\gamma = 1, 2, \ldots, \mu,\\
&\mu \geqslant \nu+1,
\end{aligned}
\tag{5.25}$$

Dla danego odkształcenia i entropii pola wielobiegunowych prędkości mogą być wybrane niezależnie, zatem z (5.25) i (5.23) wynika

$$\bar{h}_0 = 0, \quad \bar{p}_{i[B_\beta]} = 0 \tag{5.26}$$

lub

$$h_2 = N_K q_K, \quad p_{i[B_\beta]} = N_K \pi_{Ki[B_\beta]}. \tag{5.27}$$

A. E. GREEN i R. S. RIVLIN postulują następnie obiektywność gęstości energii wewnętrznej, tzn. zakładają, że jest ona niezmiennicza nie tylko względem nałożonej prędkości ruchu sztywnego, ale jest niezmiennicza również względem nałożonego ruchu sztywnego. Można wykazać, że energia wewnętrzna U będzie wielkością obiektywną wtedy i tylko wtedy, gdy będzie ją można przedstawić w poniższej postaci:

$$U = U(S, E_{:AB}, E_{[B_\gamma]:A}, E_{[B_\gamma]:AK}), \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \mu. \tag{5.28}$$

Korzystając z $(5.27)_1$, (5.28) i (5.24) oraz z twierdzenia Greena-Stokesa można zasadę entropii $(5.11)_2$ przedstawić w następującej postaci różniczkowej:

$$\varrho_0\left(T-\frac{\partial U}{\partial S}\right)\dot{S}-\frac{q_K T_{,K}}{T}+\frac{1}{2}x_{i,K}\left(\pi'_{Km}-2\varrho_0 x_{m,A}\frac{\partial U}{\partial E_{AK}}\right)A_{mi}+ \tag{5.29}$$
$$+X_{A,i}\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\bar{\pi}_{i\{B_\beta\}}-\varrho_0 x_{i,B}\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:B}}\right)B_{\{B_\beta\}:A}+X_{A,l}\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\pi_{Ki\{B_\beta\}}-\varrho_0 x_{i,B}\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:BK}}\right)B_{\{B_\beta\}:AK}-$$
$$-\sum_{\beta=\nu+1}^{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:A}}B_{\{B_\beta\}:A}+\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:AK}}B_{\{B_\beta\}:AK}\right)\geqslant 0.$$

Dla danego stanu odkształcenia i entropii powyższa nierówność musi być spełniona dla dowolnych wartości $\dot{S}$, A_{mi}, $B_{\{B_\beta\}:A}$, $B_{\{B_\beta\}:AK}$, które mogą być wzięte niezależnie od siebie. Zatem mamy

$$\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:A}}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:AK}}=0,\quad \nu+1\leqslant\beta\leqslant\mu, \tag{5.30}$$

$$T=\frac{\partial U}{\partial S}, \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}\pi'_{Km}&=2\varrho_0 x_{m,A}\frac{\partial U}{\partial E_{AK}},\\ \bar{\pi}_{i\{B_\beta\}}&=\varrho_0 x_{i,A}\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:A}},\quad \beta=1,2,\ldots,\nu,\\ \pi_{Ki\{B_\beta\}}&=\varrho_0 x_{i,A}\frac{\partial U}{\partial E_{\{B_\beta\}:AK}},\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$-q_K T_{,K}\geqslant 0. \tag{5.33}$$

Równania $(5.32)_2$ są odpowiednikiem równań ruchu wyższego rzędu Toupina $(4.12)_2$. Równania $(5.32)_3$ odpowiadają związkom $(4.13)_3$, natomiast zespół równań (5.21) i (5.32) odpowiada związkom (4.13_2).

A. ERINGEN i E. S. SUHUBI [1964 a, b] oraz A. ERINGEN [1964] zbudowali teorię tzw. mikromateriału prostego, który jest kinematycznie równoważny ciału z dwubiegunowymi przemieszczeniami. Koncepcja mikromateriału była przedmiotem krytyki A. E. GREENA [1965 a]. Autorzy chcieliby zwrócić uwagę na to, że w pracy A. E. GREENA nie wszystkie przekształcenia są poprawne. Ogólnie wydaje się, że w ramach klasycznej mechaniki Newtona nie można z zasad niezmienniczości wydedukować zasady zachowania masy.

Pojęcie sprężystego kontinuum wielobiegunowego (oraz kontinuum z mikrostrukturą) zostało przez CZ. WOŹNIAKA [1967 a] rozszerzone na zagadnienia termosprężystości. Oprócz wielobiegunowych pól przemieszczeń (względnie pól wektorów kierunkowych) wprowadzono i zinterpretowano także «wielobiegunowe» (względnie «zorientowane») pola temperatury. Energia swobodna φ zależy wtedy od parametrów mechanicznych $x_{k,A}$, $x_{k\mathfrak{a}}$, $x_{k\mathfrak{a},A}$, temperatury θ oraz dodatkowych parametrów termicznych $\theta_{\mathfrak{a}}$. Występujące tu wskaźniki gotyckie można traktować albo jako martwe (wtedy $\mathfrak{a}=\mathrm{I},\mathrm{II},\ldots$), albo jako przebiegające ciągi indeksów materiałowych (wtedy $\alpha = A_I, A_I A_{II}, A_I A_{II} A_{III}, \ldots$). Tym samym wszystkie otrzymane związki w cytowanej pracy można interpretować bądź w sposób przedstawiony w p. 4 (tj. oparty na podejściu Toupina), bądź w równoważny sposób stosowany w tym punkcie pracy (oparty na podejściu Greena-Rivlina). Równania stanu dla tensora naprężeń t_{lk} oraz tensora hipernaprężeń $t_{l\alpha k}$ mają postać:

$$
(5.34)\qquad
\begin{gathered}
t_{lk} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k,A}} x_{l,A}, \qquad t_{l\alpha k} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k\alpha,A}} x_{l,A}, \\
t_{l\alpha k,l} + f_{\alpha k} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k\alpha}},
\end{gathered}
$$

w której $f_{\alpha k}$ są tensorami (wektorami) gęstości hipersił objętościowych. Oprócz gęstości entropii $\eta = -\partial\varphi/\partial\theta$, w omawianej teorii pojawiają się również dodatkowe wielkości $d_\alpha = -\partial\varphi/\partial\theta_\alpha$ charakteryzujące rozkład entropii. W następnej pracy tego autora [1967 c] rozpatrzono bardziej jeszcze ogólny model termosprężystego kontinuum, w którym parametrami stanu są gradienty przemieszczenia, przemieszczenia wielobiegunowe i ich gradienty, temperatura i gradienty temperatury oraz «wielobiegunowe» pola temperatur i ich gradienty.

6. Ośrodki niegiroskopowe wyższego rzędu

6.1. Podstawowe określenia i definicje. Pojęcie materiału nieprostego wyższego rzędu zostało wprowadzone w p. 2. W niniejszym punkcie zajmować się będziemy ośrodkiem nieżyroskopowym n-tego rzędu. Rozpatrywany ośrodek rozumiany jest w sensie W. NOLLA [1958] (jedynymi niezależnymi zmiennymi kinematycznymi są współrzędne przestrzenne x_i). Materiał nieprosty dowolnego rzędu był rozpatrywany w pracach A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a], [1965] oraz A. E. GREENA i P. M. NAGHDIEGO [1965 a]. Liniową teorię materiału nieprostego trzeciego rzędu wraz z zastosowaniem do opisu napięć powierzchniowych rozpatrzył R. D. MINDLIN [1965]. Teoria materiału nieprostego drugiego rzędu wraz z omówieniem prac dotyczących tego zagadnienia została rozpatrzona w p. 2. Niniejszy punkt (z wyjątkiem p. 6.7) zostanie oparty częściowo na pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a], rozważania ograniczymy jednak tylko do pól mechanicznych(7).

6.2. Zasada zachowania energii (opis przestrzenny). Podstawę rozważań A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a] stanowią: zasada zachowania energii i zasada entropii. Ograniczymy się tylko do pierwszej z nich. Ośrodkiem ciągłym $(\nu+1)$-go rzędu nazywać będziemy ośrodek, dla którego zasada ta ma postać:

$$
(6.1)\qquad \int\limits_{X_t(P)} \varrho(v_i \dot{v}_i + \dot{U})\,dv = \int\limits_{X_t(P)} \varrho\Big(\sum_{\beta=0}^{\nu} \bar{F}_{(i_\beta)i} v_{i,(i_\beta)}\Big)dv + \int\limits_{X_t(\partial P)} \Big(-\sum_{\beta=0}^{\nu} t_{(i_\beta)i} v_{i,(i_\beta)}\Big)da,
$$

w której v_i jest polem prędkości, ϱ jest gęstością, U gęstością energii wewnętrznej, natomiast $\bar{F}_{(i_\beta)i}$ oraz $t_{(i_\beta)i}$ są zdefiniowanymi w p. 5 2^β-biegunowymi sprowadzonymi siłami masowymi i powierzchniowymi pierwszego rodzaju. Wielobiegunowe siły powierzchniowe działające

(7) W cytowanej pracy postulowano klasyczną postać zasady entropii [przy rozszerzonej postaci zasady zachowania energii, por. (6.1)], co prowadzi do wniosków sprzecznych z elementarnymi rozważaniami geometrycznymi i fizykalnymi, por. Cz. WOŹNIAK [1967 b].

na płaszczyznach parametrycznych, zwane wg terminologii Greena i Rivlina 2^β-biegunowymi naprężeniami pierwszego rodzaju, są oznaczone symbolem $\sigma_{j\{i_\beta\}i}$. Tensory $\bar{F}_{\{i_\beta\}i}$, $t_{\{i_\beta\}i}$ oraz wielobiegunowe naprężenia $\sigma_{j\{i_\beta\}i}$ są z założenia wielkościami symetrycznymi względem indeksów $\{i_\beta\}$. W pracy A. E. Greena i R. S. Rivlina [1964 a] zamiast $\bar{F}_{\{i_\beta\}i}$ wprowadzono do zasady (6.1) wielkości $F_{\{i_\beta\}i}$.

Rozwijając zasadę zachowania energii dla infinitezymalnego czworościanu ograniczonego płaszczyznami parametrycznymi $x_i = \text{const}$ oraz płaszczyzną z wektorem jednostkowym n_k zewnętrznie normalnym do niej otrzymujemy:

$$\sum_{\beta=0}^{\nu} (t_{\{i_\beta\}i} - n_j \sigma_{j\{i_\beta\}i}) v_{i,\{i_\beta\}} = 0. \tag{6.2}$$

Następnie korzystając z (6.2) oraz z twierdzenia Greena-Stokesa można zasadę zachowania energii przedstawić w postaci różniczkowej

$$(\sigma_{ji,j} + \varrho \bar{F}_i) v_i - \varrho \dot{U} + \sum_{\beta=0}^{\nu} (\sigma_{j\{i_\beta\}i,j} + \sigma_{(\{i_\beta\})i} + \varrho \bar{F}_{\{i_\beta\}i}) v_{i,\{i_\beta\}} + \sigma_{(\{i_{\nu+1}\})i} v_{i,\{i_{\nu+1}\}} = 0. \tag{6.3}$$

6.3. Warunki niezmienniczości. Rozumując podobnie jak w p. 5 można z równań (6.2) i (6.3) wydedukować następujące warunki z niezmienniczości tensorów $\bar{F}_{\{i_\beta\}i}$, $t_{\{i_\beta\}i}$, U oraz naprężeń wielobiegunowych $\sigma_{j\{i_\beta\}i}$ względem nałożonej prędkości ruchu ciała sztywnego

$$t_i = n_j \sigma_{ji}, \qquad t_{[ki]} = n_j \sigma_{j[ki]}, \tag{6.4}$$

$$\sigma_{ji,j} + \varrho \bar{F}_i = 0, \qquad \sigma_{j[ki],j} + \sigma_{[ki]} + \varrho \bar{F}_{[ki]} = 0. \tag{6.5}$$

Równania (6.4) są warunkami brzegowymi Cosseratów, natomiast równania (6.5) są równaniami ruchu ośrodka Cosseratów. Z równań (6.4) wynika, że wielkości σ_{ji} oraz $\sigma_{j[ki]}$ są odpowiednio tensorami o walencji dwa i trzy.

6.4. Zasada zachowania energii (opis materialny). W opisie materialnym równania (6.1)–(6.3) przyjmują postać

$$\int_P \varrho_0 (v_i \dot{v} + \dot{U}) dV = \int_P \varrho_0 \Big(\sum_{\beta=0}^{\nu} \bar{F}_{\{A_\beta\}i} v_{i\{A_\beta\}} \Big) dV + \int_{\partial P} \Big(\sum_{\beta=0}^{\nu} p_{\{A_\beta\}i} v_{i\{A_\beta\}} \Big) dA, \tag{6.6}$$

$$\sum_{\beta=0}^{\nu} (p_{\{A_\beta\}i} - N_B \pi_{B\{A_\beta\}i}) v_{i\{A_\beta\}} = 0, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} &(\pi_{Bi,B} + \varrho_0 F_i - \varrho_0 \dot{v}_i) v_i - \varrho_0 \dot{U} + \\ &+ \sum_{\beta=1}^{\nu} (\pi_{B\{A_\beta\}i,B} + \pi_{(\{A_\beta\})i} + \varrho_0 \bar{F}_{\{A_\beta\}i}) v_{i,\{A_\beta\}} + \pi_{(\{A_{\nu+1}\})} v_{i,\{A_{\nu+1}\}} = 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

gdzie $\bar{F}_{\{A_\beta\}i}$, $p_{\{A_\beta\}i}$, $\pi_{B\{A_\beta\}i}$ są odpowiednio 2^β-biegunowymi siłami masowymi, siłami powierzchniowymi i naprężeniami. Z równań (6.6) oraz $(5.11)_1$ wynika, że ośrodek niegiroskopowy jest kinematycznie równoważny ośrodkowi z wielobiegunowymi przemieszczeniami dopuszczającymi w charakterze potencjału pola współrzędnych przestrzennych x_i.

6.5. Materiał sprężysty. Rozpatrywany w tym punkcie materiał A. E. Green i R. S. Rivlin nazywają sprężystym, gdy

$$\begin{gathered} U = U(x_{i,\{A_\mu\}}), \qquad p_{\{A_\beta\}i} = p_{\{A_\beta\}i}(x_{i,\{A_\mu\}}, N_K), \\ \pi_{B\{A_\beta\}i} = \pi_{B\{A_\beta\}i}(x_{i,\{A_\mu\}}), \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \gamma, \qquad \gamma \geqslant \nu+1. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Ponieważ dla danych gradientów odkształcenia $x_{i,[A_\mu]}$ można niezależnie dobrać pola prędkości v_i oraz pola gradientów prędkości $v_{i,[A_\mu]}$, zatem z (6.7) i (6.9) wynika

$$p_{A[\beta]i} = N_B \pi_{B[A_\beta]i}. \tag{6.10}$$

Korzystając z (6.10) i (6.8) oraz z twierdzenia Greena-Stokesa można zasadę (6.6) przedstawić w postaci:

$$(\pi_{Bi,B}+\varrho_0\bar{F}_i)v_i+\sum_{\beta=1}^{\nu}\left(\pi_{B[A_\beta]i,B}+\pi_{([A_\beta])i}+\varrho_0\bar{F}_{[A_\beta]i}-\varrho_0\frac{\partial U}{\partial x_{i,[A_\beta]}}\right)v_{i,[A_\beta]}+$$
$$+\left(\pi_{([A_{\nu+1}])i}-\varrho_0\frac{\partial U}{\partial x_{i,[A_{\nu+1}]}}\right)v_{i,[A_{\nu+1}]}\sum_{\beta=\nu+2}^{\beta=\gamma}\varrho_0\frac{\partial U}{\partial x_{i,[A_\beta]}}v_{i,[A_\beta]}=0. \tag{6.11}$$

Powyższa równość zachodzi dla dowolnych v_i, $v_{i,[A_\beta]}$ przy danych $x_{i[A_\beta]}$. Wynika stąd, że

$$\pi_{Bi,B}+\varrho_0\bar{F}_i=0,$$
$$\pi_{B[A_\beta]i,B}+\pi_{([A_\beta])i}+\varrho_0\bar{F}_{[A_\beta]i}-\varrho_0\frac{\partial U}{\partial x_{i,[A_\beta]}}=0,\quad 1\leqslant\beta\leqslant\nu, \tag{6.12}$$
$$\pi_{([A_{\nu+1}])i}-\varrho_0\frac{\partial U}{\partial x_{i,[A_{\nu+1}]}}=0$$

oraz

$$\frac{\partial U}{\partial x_{i,[A_\beta]}}=0,\quad \nu+2\leqslant\beta\leqslant\gamma. \tag{6.13}$$

6.6. Warunki obiektywności gęstości energii wewnętrznej. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 a] zakładają, że gęstość energii wewnętrznej U jest wielkością obiektywną, tzn. że dla dowolnego tensora ortogonalnego Q_{ij} zachodzi równanie

$$U(x_{i,[A_\beta]})=U(Q_{ij}x_{j,[A_\beta]}),\quad \beta=1,2,\ldots,\nu+1. \tag{6.14}$$

W sposób podobny jak w p. 5 można wykazać, że (6.14) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy U da się przedstawić w następującej postaci:

$$U=U(E_{B[A_\beta]}),\quad \beta=1,2,\ldots,\nu+1, \tag{6.15}$$

gdzie

$$E_{B[A_\beta]}\equiv x_{i,B}x_{i,[A_\beta]}. \tag{6.16}$$

Następnie można wykazać, że warunkami koniecznymi i dostatecznymi obiektywności gęstości energii wewnętrznej są równania

$$\sum_{\beta=1}^{\nu}(\pi_{B[A_\beta]i,B}+\pi_{([A_\beta])i}+\varrho_0\bar{F}_{[A_\beta]i})x_{j,[A_\beta]}-\sum_{\beta=1}^{\nu}(\pi_{B[A_\beta]j,B}+\pi_{([A_\beta])j}+\varrho_0\bar{F}_{[A_\beta]j})x_{i,[A_\beta]}+$$
$$+2\pi_{([A_{\nu+1}])[i}x_{j],[A_{\nu+1}]}=0. \tag{6.17}$$

Równania powyższe są inaczej zapisanymi równaniami ruchu ciała Cosseratów.

6.7. Materiały sprężyste termicznie nieproste. Pojęcie materiału nieprostego nie tylko mechanicznie lecz również termicznie zostało wprowadzone w p. 3.1. Parametrami stanu są w takim materiale nie tylko pierwszy oraz wyższe gradienty odkształcenia i temperatura θ, lecz również gradienty temperatury. Podstawowy układ równań materiału rzędu $n+1$, wyprowadzony i omówiony w pracy Cz. WOŹNIAKA [1967 b], składa się z równań ruchu

$$
\begin{aligned}
&t_{lk,l}+\bar{f}_k = 0,\\
&(t_{k\mathfrak{a}[m}x_{l],\mathfrak{a}})_{,k}+t_{[lm]}+\bar{f}_{\mathfrak{a}[m}x_{l],\mathfrak{a}} = 0,
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

równań stanu

$$
\begin{aligned}
&t_{lk}+(t_{mAk,m}+\bar{f}_{Ak})x_{l,A} = \varrho\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial C_{AB}}x_{k,B}+\frac{\partial\varphi}{\partial C_{AB\mathfrak{a}}}x_{k,B\mathfrak{a}}\right)x_{l,A},\\
&t_{l(\mathfrak{a}|k|}X_{B),l}+t_{l(B\mathfrak{a})k,l}+\bar{f}_{(B\mathfrak{a})k} = \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial C_{AB\mathfrak{a}}}x_{k,A},
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

w których $C_{AB} = x_{k,A}x_{k,B}$, $C_{AB\mathfrak{a}} = x_{k,A}x_{k,B\mathfrak{a}}$, oraz z równania przewodnictwa cieplnego

$$
\begin{aligned}
h_{i,i}+\varrho(c\dot{\theta}+c_{\mathfrak{a}}\dot{\theta}_{,\mathfrak{a}})+\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{AB}\partial\theta}\theta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{AB}\partial\theta_{,\mathfrak{a}}}\theta_{,\mathfrak{a}}\right)\dot{C}_{AB}+\\
+\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{AB\mathfrak{a}}\partial\theta}\theta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial C_{AB\mathfrak{a}}\partial\theta_{,\mathfrak{b}}}\theta_{,\mathfrak{b}}\right)\dot{C}_{AB\mathfrak{a}}+\varrho h = 0,
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

w którym $h_i = h_i(\theta_{,j}, \theta_{,\mathfrak{a}})$ jest wektorem przepływu ciepła. Wskaźniki gotyckie w powyższych wzorach przebiegają ciąg indeksów materiałowych ($\mathfrak{a} = A_{\mathrm{I}}, A_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{II}}, \dots, A_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{II}}\dots A_n$), przy czym $t_{lA\mathfrak{a}k} \equiv 0$, $\bar{f}_{A\mathfrak{a}k} \equiv 0$ dla $\mathfrak{a} = A_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{II}}\dots A_n$. Wielkości $\bar{f}_k$, $\bar{f}_{A\mathfrak{a}k}$ są siłami objętościowymi, a wielkości c, $c_{\mathfrak{a}}$ charakteryzują pojemność cieplną ciała. Bardziej ogólny model materiału nieprostego mechanicznie i termicznie (z wewnętrznymi stopniami swobody i wielobiegunowymi polami temperatury) rozpatrzono w uprzednio już cytowanej pracy tegoż autora [1967, c].

7. Mikrostruktura konstrukcyjna i ośrodek włóknisty

7.1. Pojęcia wstępne. W punkcie tym przedstawimy model ciągły ciał, w strukturze których można wyróżnić pewien «powtarzający się» element składowy. Element ten nazywamy dalej cząstką ciała. Zakładamy, że: 1) wszystkie wymiary każdej cząstki danego ciała są bardzo niewielkie wobec wymiarów całego ciała; 2) wszystkie parametry geometryczne (kształt, wielkość, konfiguracja), statyczne (sposób obciążenia) oraz fizykalne (materiał) każdych dwóch sąsiadujących z sobą cząstek niewiele różnią się od siebie; 3) modelem cząstki jest klasyczny ośrodek ciągły (z symetrycznym tensorem naprężenia). Ciało utworzone z cząstek i spełniające powyższe trzy założenia nazywamy ciałem o mikrostrukturze konstrukcyjnej, w odróżnieniu od tzw. mikrostruktury materiałowej oraz formalnie wprowadzonej mikrostruktury omówionej w punkcie czwartym. Przykładem ciał o mikrostrukturze konstrukcyjnej są np. gęste i regularne siatki prętowe, materiały zbrojone gęstymi siatkami, dźwigary powierzchniowe o gęstej i regularnej perforacji itp.

Teoretycznie, ciała o mikrostrukturze konstrukcyjnej można opisać za pomocą równań klasycznego ośrodka ciągłego. Praktycznie jednak opis taki jest niecelowy z uwagi na występowania w obszarze zajętym przez ciało bardzo dużej liczby powierzchni nieciągłości (wywołanych np. skokowymi zmianami własności fizykalnych w przypadku materiałów zbrojonych siatkami) lub dużej liczby otworów (np. w dźwigarach perforowanych) itp. W związku z tym nasuwa się koncepcja fenomenologicznego opisu ciała o mikrostrukturze konstrukcyjnej za pomocą nieklasycznego lecz ciągłego i jednospójnego modelu kontynualnego. Model taki nazwijmy ośrodkiem ciągłym o mikrostrukturze konstrukcyjnej.

Jest rzeczą oczywistą, że dane ciało o konstrukcyjnej mikrostrukturze można opisać za pomocą różnych modeli (różnych typów ośrodka ciągłego o mikrostrukturze konstrukcyjnej) w zależności np. od stopnia dokładności takiego opisu. Korzystając z prac Cz. WOŹNIAKA [1966 c–f] poniżej wyprowadzimy najpierw ogólne równanie ośrodka ciągłego o mikrostrukturze konstrukcyjnej (p. 7.3 i 7.4), a następnie omówimy tzw. ciała o strukturze siatkowej, będące ważnym przypadkiem szczególnym ciał o mikrostrukturze konstrukcyjnej (p. 7.5). Ogólne równania ośrodka ciągłego o mikrostrukturze konstrukcyjnej stanowią punkt wyjścia do otrzymania równań tzw. teorii «pierwszego przybliżenia», mającej duże znaczenia praktyczne (p. 7.6). Na zakończenie punktu (p. 7.7) zwięźle przedstawimy uzyskane w tym zakresie rozwiązania, możliwości uproszczenia równań teorii «pierwszego przybliżenia» (efekty brzegowe, teoria «bezmomentowa», teoria «skrępowanych obrotów») jak również niektóre perspektywy dalszego rozwoju teorii.

7.2. Kinematyka i geometria ciała o mikrostrukturze konstrukcyjnej. Niech M będzie obszarem trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa zajętym przez ciało w chwili $\tau = \tau_0$ (8). Parametryzujemy obszar M kartezjańskim ortogonalnym układem współrzędnych. Oznaczmy przez Y^α współrzędne dowolnego punktu ciała oraz przez $Y^\alpha_{(K)}$ współrzędne środka masy jego K-tej cząstki ($K = 1, 2, \ldots, N$, gdzie N jest liczbą cząstek ciała). Parametryzujemy niezależnie obszar K-tej cząstki ciała ($K = 1, 2, \ldots, N$) współrzędnymi kartezjańskimi $\tilde{Y}^\alpha_{(K)} \equiv$ $\equiv Y^\alpha - Y^\alpha_{(K)}$; punkt $\tilde{Y}^\alpha_{(K)} = 0$ jest wtedy środkiem masy K-tej cząstki. Powyżej wprowadzone współrzędne będziemy traktować jako współrzędne materialne ciała, a obszar M nazwiemy konfiguracją odniesienia tego ciała.

Niech y^i będą (w przyjętym powyżej układzie współrzędnych) współrzędnymi miejsca, które w chwili τ zajmuje punkt materialny Y^α. Niech następnie $y^i_{(K)}$ oznacza współrzędne miejsca zajmowanego w chwili τ przez środek $Y^\alpha_{(K)}$ masy K-tej cząstki ciała ($K = 1, 2, \ldots,$ $\ldots, N$). Utwórzmy w obszarze $b_{(K)}$, zajętym w chwili τ przez K-tą cząstkę ciała, różnicę $\tilde{y}^i_{(K)} \equiv y^i - y^i_{(K)}$. Równania ruchu K-tej cząstki ciała możemy wtedy napisać w poniższej postaci

$$
\begin{aligned}
y^i_{(K)} &= y^i(Y^\alpha_{(K)}, \tau), \\
\tilde{y}^i_{(K)} &= y^i(Y^\alpha_{(K)} + \tilde{Y}^\alpha_{(K)}, \tau) - y^i(Y^\alpha_{(K)}, \tau).
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Przyjmując w (7.1) kolejno $K = 1, 2, \ldots, N$, otrzymamy równania ruchu rozpatrywanego ciała.

Przeprowadzimy przez punkt $y^i_{(K)}$ płaszczyznę π o wektorze jednostkowym n normalnym do niej. Podzielmy zbiór cząstek otaczających K-tą cząstkę ciała na dwa podzbiory $\Sigma^{(+)}$, $\Sigma^{(-)}$ zaliczając do $\Sigma^{(-)}$ te cząstki, których środki leżą w chwili τ na płaszczyźnie π lub po jej ujemnie zorientowanej stronie.

(8) W dalszym ciągu punktu określenia «ciało o mikrostrukturze konstrukcyjnej» zastąpimy kolejno określeniami «ciało» oraz «kontinuum» lub «model ciała».

Oznaczmy przez $\tilde{n}$ wektor jednostkowy, zewnętrznie normalny do powierzchni $s_{(K)}$ otaczającej obszar $b_{(K)}$ zajęty w chwili τ przez K-tą cząstkę ciała. Załóżmy, że dla każdej cząstki ciała dana jest funkcja

$$\Delta P_{(K)} = \Delta P_{(K)}(n, \tilde{n}), \tag{7.2}$$

przy czym $\Delta P_{(K)}$ jest elementem płaszczyzny π, przez który należy podzielić siłę kontaktową działającą na element powierzchni $s_{(K)}$ o normalnej $\tilde{n}$, aby otrzymać odpowiadającą jej elementarną średnią siłę kontaktową pomiędzy podzbiorami $\Sigma^{(-)}$ i $\Sigma^{(+)}$, przypadającą na jednostkę płaszczyzny π. Inaczej mówiąc, funkcja (7.2) charakteryzuje intensywność (uśrednioną w otoczeniu każdej cząstki), z jaką oddziaływanie przez element powierzchni $s_{(K)}$ o normalnej $\tilde{n}$ zostaje przekazane przez płaszczyznę π o normalnej n. Funkcja (7.2) określa tym samym sposób powiązania sąsiadujących ze sobą cząstek, a jej postać można określić w sposób ścisły dla tzw. ciał o strukturze siatkowej (por. p. 7.5).

7.3. Model sześciowymiarowy i model trójwymiarowy ciała. Oznaczmy przez $b = b(x^i)$ obszar w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa, zależny w sposób ciągły od zmiennych x^i, który dla $x^i = y^i_{(K)}$ pokrywa się z obszarem $b_{(K)}$ ($K = 1, 2, \ldots, N$, por. p. 7.2). Powierzchnię otaczającą obszar $b(x^i)$ oznaczmy przez $s = s(x^i)$. Zastąpmy następnie $6N$ związków (7.1) sześcioma poniższymi równaniami:

$$x^i = x^i(X^\alpha, \tau), \qquad \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(X^\alpha, \tilde{X}^\alpha, \tau), \tag{7.3}$$

w których funkcje $x^i(X^\alpha, \tau)$, $\tilde{x}^i(X^\alpha, \tilde{X}^\alpha, \tau)$ dla $X^\alpha \equiv Y^\alpha_{(K)}$, $\tilde{X}^\alpha \equiv \tilde{Y}^\alpha_{(K)}$ przyjmują kolejno wartości $y^i_{(K)}, \tilde{y}^i_{(K)}$, $K = 1, 2, \ldots, N$. Zakładamy, że funkcje $(7.3)_1$ są ciągłe i różniczkowalne potrzebną liczbę razy w obszarze M oraz że $\det \partial x^i/\partial X^\alpha \neq 0$. Podobnie zakładamy, że funkcje $(7.3)_2$ są ciągłe i różniczkowalne w obszarze $b(x^i)$ oraz $\det \partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{X}^\alpha \neq 0$.

Równania (7.3) można interpretować jako równania ruchu pewnego sześciowymiarowego ciągłego i jednospójnego modelu ciała z mikrostrukturą konstrukcyjną (zmienne $X^\alpha, \tilde{X}^\alpha$, podobnie jak i zmienne $x^i, \tilde{x}^i$, stanowią bowiem w (7.3) sześć zmiennych niezależnych). Stosowanie takiego modelu (można go nazwać modelem dokładnym) jest możliwe, lecz praktycznie niecelowe z uwagi na konieczność układania warunków brzegowych w przestrzeni afinicznej sześciowymiarowej (tj. na powierzchni granicznej ciała i na powierzchni granicznej typowej cząstki ciała niezależnie).

Załóżmy teraz, że funkcja $(7.3)_2$ może być rozłożona w szereg podług układu znanych funkcji $\xi^\mathfrak{a}(\tilde{X}^\alpha)$, $\mathfrak{a} = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots$:

$$\tilde{x}^i = x^i{}_\mathfrak{a}\xi^\mathfrak{a}, \qquad x^i{}_\mathfrak{a} = x^i{}_\mathfrak{a}(X^\alpha, \tau). \tag{7.4}$$

Korzystając z równań $(7.3)_1$ i (7.4) oraz rugując współrzędne $\tilde{x}^i$ i $\tilde{X}^\alpha$ za pomocą uśrednień po obszarze $b(x^i)$ lub $s(x^i)$ otrzymamy ogólny trójwymiarowy model ciągły ciała z mikrostrukturą konstrukcyjną. Pozostawiając w szeregu (7.4) większą lub mniejszą liczbę wyrazów uzyskujemy następnie bardziej lub mniej dokładne trójwymiarowe modele ciągłe ciała [9]. Tylko do rozpatrywania takich modeli ograniczamy się w dalszym ciągu tego punktu.

---

[9] Sposób przejścia od «dokładnego» sześciowymiarowego modelu ciągłego ciała z mikrostrukturą do modeli trójwymiarowych jest analogiczny jak sposób przejścia od równań płyty lub powłoki rozpatrywanych jako ciała trójwymiarowe do równań dwuwymiarowych (por. p. 7.4).

7.4. Podstawowe równania. Punktem wyjścia rozważań będzie zasada zachowania energii. Postulujemy ją dla dowolnego obszaru V ograniczonego powierzchnią P w postaci (dla uproszczenia pomijamy wyrazy niemechaniczne)

$$\int\limits_V (\dot{\varepsilon}+\dot{K})\varrho dV = \int\limits_P w_{(n)}dP + \int\limits_V w\varrho dV, \tag{7.5}$$

w której ε, K, ϱ, w są kolejno średnimi gęstościami energii wewnętrznej, energii kinetycznej, masy i prędkości pracy sił masowych w obszarze $b(x^i)$:

$$\begin{gathered}
\varepsilon \equiv \frac{1}{\varrho b}\int\limits_b \tilde{\varepsilon}\tilde{\varrho}db, \qquad \varrho \equiv \frac{1}{b}\int\limits_b \tilde{\varrho}db,\\
K \equiv \frac{1}{2}\frac{1}{\varrho b}\int\limits_b (\dot{x}^i+\dot{\tilde{x}}^i)(\dot{x}_i+\dot{\tilde{x}}_i)\tilde{\varrho}db,\\
w \equiv \frac{1}{\varrho b}\int\limits_b \tilde{f}^i(\dot{x}_i+\dot{\tilde{x}}_i)\tilde{\varrho}db,
\end{gathered} \tag{7.6}$$

natomiast $w_{(n)}$ jest średnią gęstości prędkości pracy sił kontaktowych na powierzchni P:

$$w_{(n)} \equiv \int\limits_s \frac{\tilde{p}^i_{(\tilde{n})}(\dot{x}_i+\dot{\tilde{x}}_i)ds}{\Delta P(n,\tilde{n})}. \tag{7.7}$$

Występujące w (7.6) funkcje $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varrho}, \tilde{f}^i$ (zależne od x^i oraz $\tilde{x}^i$) oznaczają kolejno gęstość energii wewnętrznej, gęstość masy oraz sił masowych w sześciowymiarowym modelu ciągłym ciała. Dla $x^i = y^i_{(K)}$ oraz $\tilde{x}^i = \tilde{y}^i_{(K)}$ funkcje te opisują kolejno gęstość energii wewnętrznej, gęstość masy i gęstość sił masowych w K-tej cząstce ciała. Analogicznie w (7.7) wielkość $\tilde{p}^i_{(\tilde{n})}$ jest gęstością siły kontaktowej na powierzchni $s(x^i)$. Dla $x^i = y^i_{(K)}$ gęstość $\tilde{p}^i_{(\tilde{n})}$ jest identyczna z gęstością siły kontaktowej na powierzchni $s_{(K)}$ otaczającej K-tą cząstkę ciała. Funkcja $\Delta P(n,\tilde{n})$ dla $s = s_{(K)}$ jest identyczna z funkcją (7.2).

Podstawmy do (7.6) i (7.7) prawe strony wzoru (7.4). Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{gathered}
\varrho^{\mathfrak{a}} \equiv \frac{1}{b}\int\limits_b \xi^{\mathfrak{a}}\tilde{\varrho}db, \qquad \varrho^{\mathfrak{a}b} \equiv \frac{1}{b}\int\limits_b \xi^{\mathfrak{a}}\xi^{b}\tilde{\varrho}db,\\
f^i \equiv \frac{1}{\varrho b}\int\limits_b \tilde{f}^i\tilde{\varrho}db, \qquad f^{\mathfrak{a}i} \equiv \frac{1}{\varrho b}\int\limits_b \xi^{\mathfrak{a}}\tilde{f}^i\tilde{\varrho}db,\\
p^i_{(n)} \equiv \int\limits_s \frac{\tilde{p}^i_{(\tilde{n})}ds}{\Delta P(n,\tilde{n})}, \qquad p^{\mathfrak{a}i}_{(n)} \equiv \int\limits_s \frac{\xi^{\mathfrak{a}}\tilde{p}^i_{(\tilde{n})}ds}{\Delta P(n,\tilde{n})},
\end{gathered} \tag{7.8}$$

zasada zachowania energii mechanicznej (7.5) przyjmuje ostatecznie postać

$$\begin{aligned}
\int\limits_V \dot{\varepsilon}\varrho dV + \int\limits_V [\dot{x}^i\ddot{x}_i\varrho + (\ddot{x}^i\dot{x}_{i\mathfrak{a}}+\dot{x}^i\ddot{x}_{i\mathfrak{a}})\varrho^{\mathfrak{a}} + \dot{x}^i{}_{\mathfrak{a}}\ddot{x}_{ib}\varrho^{\mathfrak{a}b}]dV = \\
= \int\limits_P (\dot{x}_ip^i_{(n)}+\dot{x}_{i\mathfrak{a}}p^{\mathfrak{a}i}_{(n)})dP + \int\limits_V (\dot{x}_if^i+\dot{x}_{i\mathfrak{a}}f^{\mathfrak{a}i})\varrho dV.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Wielkości $f^i, f^{\mathfrak{a}i}$ nazywamy gęstościami sił i hipersił masowych, a wielkości $p^i_{(n)}, p^{\mathfrak{a}i}_{(n)}$ — gęstościami sił hipersił kontaktowych. Z warunków niezmienniczości gęstości energii, masy oraz obciążeń i sił kontaktowych wynikają z (7.9) poniższe równania ruchu:

$$
\begin{aligned}
&p^{lk}{}_{,l}+\varrho f^k = \varrho\ddot{x}^k+\varrho^{\mathfrak{a}}\ddot{x}^k{}_{\mathfrak{a}},\\
&(p^{i\mathfrak{a}[k}x^{l]}{}_{\mathfrak{a}})_{,i}+p^{[lk]}+\varrho f^{\mathfrak{a}[k}x^{l]}{}_{\mathfrak{a}}-\ddot{x}^{[k}x^{l]}{}_{\mathfrak{a}}\varrho^{\mathfrak{a}}-\ddot{x}^{[k}{}_{\mathfrak{a}}x^{l]}{}_{\mathfrak{b}}\varrho^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 0,
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

w których p^{ik} oraz $p^{i\mathfrak{a}k}$ są gęstościami sił oraz hipersił kontaktowych na płaszczyźnie $x^i = \mathrm{const}$. Wielkości p^{ik} nazwiemy składowymi tensora naprężenia, natomiast wielkości $p^{i\mathfrak{a}k}$ — hipernaprężeniami. Dla mikrostruktury sprężystej zachodzą ponadto związki

$$
\begin{aligned}
&p^{ik} = \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{k,\alpha}}x^i{}_{,\alpha}, \qquad p^{i\mathfrak{a}k} = \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{k\mathfrak{a},\alpha}}x^l{}_{,\alpha},\\
&p^{i\mathfrak{a}k}{}_{,i}+\varrho f^{\mathfrak{a}k}-\ddot{x}^k\varrho^{\mathfrak{a}}-\ddot{x}^k{}_b\varrho^{\mathfrak{a}b} = \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_{k\mathfrak{a}}}.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Równania (7.10) można również otrzymać postulując zasady zachowania pędu i krętu w podobny sposób, jak zasadę zachowania energii (7.5). Uogólnienie równań (7.11) na przypadek termosprężystości omówiono w pracach Cz. WOŹNIAKA [1967 a, b, e].

7.5. Ciała o strukturze siatkowej. Ośrodek włóknisty. Zadajmy w obszarze zajętym w chwili τ przez ciało z mikrostrukturą konstrukcyjną trzy rodziny powierzchni takie, że przez każdy punkt x^i tego obszaru przechodzi jedna i tylko jedna powierzchnia każdej z rodzin. Pary przecinających się rodzin powierzchni tworzą trzy kongruencje krzywych (Ξ), $(\Xi) = (1)$, (2), (3). Wektory jednostkowe, styczne do poszczególnych rodzin kongruencji krzywych (Ξ) oznaczymy dalej przez $t^k_{(\Xi)}$. Powyższe trzy pola wektorowe $t^k_{(\Xi)}$ opisują siatkę ciągłą w obszarze zajętym przez ciało([10]).

Załóżmy teraz, że środki wszystkich sześciu cząstek ciała, przylegających do dowolnej K-tej cząstki ciała, leżą wyłącznie na krzywych Ξ, przechodzących przez środek cząstki K. Zdefiniowana powyżej siatka ciągła charakteryzuje tym samym sposób rozmieszczenia cząstek w ciele o konstrukcyjnej mikrostrukturze. Oznaczmy dalej przez $\Delta P_{(\Xi)}$ pole przekroju normalnego do wektora $t^k_{(\Xi)}$ przypadającego na jedną cząstkę ciała. Pola skalarowe $\Delta P_{(\Xi)}$ charakteryzują gęstość rozmieszczenia cząstek ciała (lub ich wielkość). Ciało o mikrostrukturze konstrukcyjnej, w którym rozmieszczenie cząstek jest określone wektorami $t^k_{(\Xi)}$ oraz skalarami $\Delta P_{(\Xi)}$ nazwiemy ciałem o strukturze siatkowej, a jego model ciągły (trójwymiarowy) — ośrodkiem włóknistym.

Dla ciała o strukturze siatkowej (przy założeniu siatki sześciościennej) możemy przyjąć, że sąsiadujące cząstki oddziałują na siebie siłami kontaktowymi $\tilde{p}^i_{(\Xi)}$, rozłożonymi na powierzchniach $\Delta P_{(\Xi)}$ zorientowanych dodatnim zwrotem wektora $\tilde{t}^i_{(\Xi)}$ lub na częściach tych powierzchni. Dla $\tilde{n} = \tilde{t}_{(\Xi)}$, $(\Xi) = (1)$, (2), (3), zachodzi wtedy (por. Cz. WOŹNIAK [1967 f])

$$
\Delta P(n, \tilde{t}_{(\Xi)}) = \frac{\Delta P_{(\Xi)}}{t^k_{(\Xi)}n_k}.
\tag{7.12}
$$

[10] Ograniczymy się tu do omówienia tylko tzw. siatki sześciościennej zakładając, że z daną cząstką ciała sąsiaduje bezpośrednio tylko sześć innych cząstek.

Tym samym dla ciał o strukturze siatkowej funkcja (7.2) jest jednoznacznie określona sposobem i gęstością rozmieszczenia cząstek ciała. Dla ośrodka włóknistego jako modelu ciągłego takich ciał wzory $(7.8)_{5,6}$ mają postać

$$p^i_{(n)} = p^{ki}n_k, \quad p^{\mathfrak{a}i}_{(n)} = p^{k\mathfrak{a}i}n_k, \tag{7.13}$$

gdzie

$$\begin{gathered} p^{ki} = \sum_{(\Xi)} p^{ki}_{(\Xi)}, \quad p^{k\mathfrak{a}i} = \sum_{(\Xi)} p^{k\mathfrak{a}i}_{(\Xi)}, \\ p^{ki}_{(\Xi)} = t^k_{(\Xi)}p^i_{(\Xi)}, \quad p^{k\mathfrak{a}i}_{(\Xi)} = t^k_{(\Xi)}p^{\mathfrak{a}i}_{(\Xi)} \end{gathered} \tag{7.14}$$

oraz

$$p^i_{(\Xi)} \equiv \frac{1}{\Delta P_{(\Xi)}} \int_{\Delta P_{(\Xi)}} \tilde{p}^i_{(\Xi)} dP_{(\Xi)}, \quad p^{\mathfrak{a}i}_{(\Xi)} \equiv \frac{1}{\Delta P_{(\Xi)}} \int_{\Delta P_{(\Xi)}} \xi^{\mathfrak{a}} \tilde{p}^i_{(\Xi)} dP_{(\Xi)}. \tag{7.15}$$

Wielkości $p^{ki}_{(\Xi)}$ oraz $p^{k\mathfrak{a}i}_{(\Xi)}$ można nazwać kolejno tensorem naprężeń oraz tensorami hipernaprężeń we włóknach (Ξ). Suma $(7.14)_{1,2}$ tych tensorów daje kolejno tensor naprężenia p^{ki} oraz tensory hipernaprężenia $p^{k\mathfrak{a}i}$ w ośrodku włóknistym. Zaznaczmy, że dla ośrodka włóknistego wszystkie wzory wyprowadzone w p. 7.4 pozostają nadal aktualne, a jedynie dochodzą związki (7.12)–(7.15).

7.6. Teoria pierwszego przybliżenia. W wyprowadzonych wyżej równaniach omawianego tu kontinuum wskaźniki gotyckie $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ przebiegają ciąg nieskończony I, II, III .... Pozostawiając w szeregach (7.4) tylko skończoną liczbę Z wyrazów (wtedy $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, Z$) oraz definiując w każdym punkcie kontinuum Z wektorów $d_{\mathfrak{a}} \equiv x^i_{\mathfrak{a}} g_i$ (g_i są wektorami bazy układu $\{x^i\}$) otrzymamy model ciała Toupina z wektorami kierunkowymi (por. p. 4). Jeżeli natomiast jako ciąg funkcji $\xi^{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a} = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, Z$, przyjmujemy w (7.4) ciąg iloczynów $\tilde{X}^\alpha, \tilde{X}^{\alpha_1}\tilde{X}^{\alpha_2}, \tilde{X}^{\alpha_1}\tilde{X}^{\alpha_2}\tilde{X}^{\alpha_3}, \ldots$, to funkcje $x^i_{\mathfrak{a}}$ będą dwupunktowymi polami tensorowymi $x^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}$, a rozpatrywane w tym punkcie kontinuum sprowadzi się do kontinuum z wielobiegunowymi przemieszczeniami Greena-Rivlina (por. p. 5). Tym samym zarówno model ciała Toupina jak i model ciała Greena-Rivlina są uproszczonymi modelami (pomijamy bowiem wielkość $0(\xi^{\mathfrak{a}})$, $\mathfrak{a} > Z$) kontinuum omówionego w p. 7.4. Poniżej przedstawiamy pewien szczególnie prosty model ciała opisywany tzw. teorią «pierwszego przybliżenia».

Teorią pierwszego przybliżenia nazwiemy przypadek, w którym współrzędne $\tilde{X}^\alpha$ w równaniu (7.4) traktujemy jako małe parametry (wymiary cząstki są bowiem z założenia bardzo niewielkie w porównaniu z wymiarami ciała). Tym samym równanie (7.4) napiszemy w postaci:

$$\tilde{x}^i = x^i_\alpha \tilde{X}^\alpha + 0[(\tilde{X}^\alpha)^2], \tag{7.16}$$

przy czym wielkości $0[(\tilde{X}^\alpha)^2]$ będziemy dalej pomijać. Macierz x^i_α występująca w (7.16) jest nieosobliwa i zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie biegunowym może być przedstawiona w postaci

$$x^i_\alpha = r^{ij}\delta^\beta_j \overline{v}_{\alpha\beta},$$

z której r^{ij} jest macierzą ortogonalną oraz $\overline{v}_{\alpha\beta}$ macierzą symetryczną, dodatnio określoną. Składowe r^{ij} opisują obrót cząstki (zależą one od trzech parametrów, np. kątów Eulera), natomiast składowe $\overline{v}_{\alpha\beta}$ opisują czyste odkształcenie cząstki. Jeżeli powierzchnie materialne, otaczające sąsiadujące z sobą cząstki, pozostają w trakcie odkształcenia stale powiązane z sobą (tj. nie dopuszczamy powstania w ciele pustek lub ekstra materii), to w ramach teorii pierwszego przybliżenia główne odkształcenia cząstek mogą zależeć tylko od zmian odległości ich środków. Zachodzi to, gdy tensor $\bar{v}_{\alpha\beta}$ jest tzw. prawym tensorem rozciągnięcia:

(7.17) $$v_{\alpha\beta} = \bar{v}_{\alpha}^{\cdot\mu}\bar{v}_{\mu\beta} = x^i_{,\alpha}x^j_{,\beta}\delta_{ij}.$$

Wzory (7.16) i (7.17) redukują liczbę lokalnych stopni swobody omawianego w tym punkcie kontinuum do sześciu (trzech przesunięć i trzech obrotów).

Korzystając z pracy Cz. Woźniaka [1967 a] równania teorii pierwszego przybliżenia dla kontinuum o sześciu lokalnych stopniach swobody [zgodnie z (7.16) i (7.17)] przedstawimy poniżej w postaci zlinearyzowanej. Przyjmijmy w tym celu

$$r^{ij} = \delta^{ij} + \epsilon^{ijk}v_k, \qquad x^i = \delta^i_\alpha X^\alpha + w^i,$$

gdzie v_k jest wektorem małego obrotu oraz w^i wektorem przemieszczenia. Po wprowadzeniu poniższych tensorów odkształcenia:

(7.18) $$\gamma_{ij} = w_{i,j} + \varepsilon_{ijk}v^k, \qquad \varkappa_{ij} = v_{j,i}$$

i po odpowiednich uproszczeniach otrzymamy z $(7.11)_{1,2}$ następujące równania fizyczne:

(7.19) $$\begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn}\gamma_{mn}, \\ m^{kl} &= C^{klmn}\varkappa_{mn} + E^{klmnr}\gamma_{(mn),r}, \\ p^{s(rn)} &= E^{klsrn}\varkappa_{kl} + F^{klmsrn}\gamma_{(kl),m}, \end{aligned}$$

w których antysymetryczna część tensora p^{srn} hipernaprężeń

$$m^{kl} \equiv \varepsilon_{pr\cdot}^{\ \ k}p^{l[rp]},$$

jest tzw. tensorem naprężeń momentowych. Tensory A, C, E, F są tensorami sztywności sprężystej. Dla ośrodka włóknistego (por. p. 7.5) składowe stanu naprężenia występujące w (7.19) wyrażają się ponadto wzorami:

(7.20) $$\begin{aligned} p^{kl} &= \sum_{(\Xi)} p^{kl}_{(\Xi)}, \qquad p^{kl}_{(\Xi)} = t^k_{(\Xi)}\frac{1}{\varDelta P_{(\Xi)}}\int_{\varDelta P_{(\Xi)}} \tilde{p}^l_{(\Xi)}dP_{(\Xi)}, \\ p^{klm} &= \sum_{(\Xi)} p^{klm}_{(\Xi)}, \qquad p^{klm}_{(\Xi)} = t^k_{(\Xi)}\frac{1}{\varDelta P_{(\Xi)}}\int_{\varDelta P_{(\Xi)}} \tilde{x}^l\tilde{p}^m_{(\Xi)}dP_{(\Xi)}. \end{aligned}$$

Zlinearyzowane równania ruchu (7.10) w teorii pierwszego przybliżenia mają postać podobną jak dla ośrodka Cosseratów:

(7.21) $$\begin{aligned} p^{ij}_{\ ,i} + f^j &= \varrho\ddot{w}^j, \\ m^{ij}_{\ ,i} + \varepsilon_{kl\cdot}^{\ \ j}p^{kl} + h^j &= \varrho^j_{\cdot i}\ddot{v}^i, \end{aligned}$$

przy czym h^j są gęstościami obciążeń momentowych. Zauważmy, że w równaniach ruchu (7.21) nie występuje symetryczna część tensora hipernaprężenia. Jeżeli pominiemy wpływ gradientu $\gamma_{(mn),r}$ na naprężenia momentowe m^{kl} (tj. $E^{klmnr} = 0$), to możemy ograniczyć się do rozpatrywania tylko równań fizycznych o postaci

(7.22) $$p^{kl} = A^{klmn}\gamma_{mn}, \qquad m^{kl} = C^{klmn}\varkappa_{mn}.$$

Równania geometryczne (7.18), równania ruchu (7.21) oraz równanie fizyczne (7.22) stanowią wtedy podstawowy układ równań zlinearyzowanej teorii pierwszego przybliżenia. Układ ten wraz z naprężeniowymi warunkami brzegowymi

$$p^k_{(n)} = p^{lk} n_l, \qquad m^k_{(n)} = m^{lk} n_l$$

oraz zachodzącymi dla ośrodka włóknistego związkami

$$p^{ij} = \sum_{(\Xi)} p^{ij}_{(\Xi)}, \qquad p^{ij}_{(\Xi)} = t^i_{(\Xi)} p^j_{(\Xi)}, \qquad p^j_{(\Xi)} \equiv \frac{1}{\Delta P_{(\Xi)}} \int_{\Delta P_{(\Xi)}} \tilde{p}^j_{(\Xi)} dP_{(\Xi)},$$

$$m^{ij} = \sum_{(\Xi)} m^{ij}_{(\Xi)}, \qquad m^{ij}_{(\Xi)} = t^i_{(\Xi)} m^j_{(\Xi)}, \qquad m^j_{(\Xi)} = \varepsilon^j_{.kl} \frac{1}{\Delta P_{(\Xi)}} \int_{\Delta P_{(\Xi)}} \tilde{p}^k_{(\Xi)} \tilde{x}^l dP_{(\Xi)}$$

był podstawą obliczeń różnych typów ciał o strukturze siatkowej, mających duże znaczenie praktyczne. Dotyczy to zwłaszcza dźwigarów powierzchniowych o strukturze siatkowej; przeglądu prac z tego zakresu dokonamy poniżej.

7.7. Dźwigary powierzchniowe o strukturze siatkowej. Spośród ciał o konstrukcyjnej mikrostrukturze główną uwagę poświęcono dotychczas dźwigarom powierzchniowym. W pracach Cz. WOŹNIAKA [1966 a, b], omawiających kolejno tarcze i płyty o strukturze siatkowej, podano wyrażenia dla tensorów sztywności sprężystej w zależności od budowy cząstki oraz od struktury siatkowej dźwigara. Rozpatrywano tu powierzchniowe dźwigary perforowane, dźwigary utworzone z siatki prętów przenoszących siły dowolnego rodzaju oraz dźwigary zbrojone siatkami. Równania (7.22) dla zakrzywionego dźwigara powierzchniowego mają poniższą postać (wskaźniki greckie przebiegają ciąg 1, 2)

$$\begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}, & l^2 p^{\alpha 3} &= {}'A^{\alpha 3\mu 3}\gamma_{\mu 3}, \\ m^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\mu\nu}\varkappa_{\mu\nu}, & m^{\alpha 3} &= a^2\,{}'C^{\alpha 3\mu 3}\varkappa_{\mu 3}, \end{aligned} \tag{7.23}$$

przy czym l, a są małymi parametrami o wymiarze długości. Przyjmując $l \to 0$ oraz $a \to 0$ otrzymamy teorię, której równania wykazują formalną analogię do równań anizotropowych i niejednorodnych powłok cienkich. Przypadek ten jest uogólnieniem znanego już przedtem pojęcia anizotropii konstrukcyjnej. Występowanie w równaniach (7.23) małych parametrów wskazuje na możliwość asymptotycznego podejścia do zagadnienia. Dla siatkowych tarcz i płyt postać pierwszego i drugiego procesu iteracyjnego została określona przez K. WILMAŃSKIEGO [1967, a]. Przybliżony sposób podejścia, związany z wykorzystaniem efektu brzegowego, podano w pracach Cz. WOŹNIAKA [196 g], S. KONIECZNEGO i Cz. WOŹNIAKA [1967]oraz uogólniono na przypadek naprężeń cieplnych w pracy PIETRASA i WYRWIŃSKIEGO [1967]. Sposób ten polega na zastosowaniu tzw. teorii bezmomentowej (gdy $a \to 0$, skąd wynika $m^{\alpha 3} \to 0$) względnie tzw. teorii skrępowanych obrotów (gdy $l \to 0$, skąd wynika $\gamma_{\mu 3} \to 0$) oraz uwzględnieniu pomijanych w obu tych teoriach warunków brzegowych (dla $m^{\alpha 3}$ i $\gamma_{\mu 3}$) przez wykorzystanie równań efektu brzegowego.

Cały szereg rozwiązań został uzyskany dla zagadnień osiowo-symetrycznych tarcz i płyt o strukturze siatkowej przez S. KONIECZNEGO [1967], K. WILMAŃSKIEGO [1967, b], Cz. WOŹNIAKA i S. ZIELIŃSKIEGO [1967]. Zagadnienia stateczności były rozpatrywane przez Cz. WOŹNIAKA [1965, d], Cz. WOŹNIAKA i S. ZIELIŃSKIEGO [1967 a, b], P. KLEMMA i Cz. WOŹNIAKA [1967]. Zagadnieniem powierzchniowych izotropowych siatek prętowych zajmował się W. BARAŃSKI [1966]. Powierzchniowe gęste siatki kratownicowe były omówione w pracach Z. BACZYŃSKIEGO i CZ. WOŹNIAKA [1966] oraz R. PEŁY i CZ. WOŹNIAKA [1966]. Proste przypadki tarcz perforowanych zostały omówione przez W. BARAŃSKIEGO i CZ. WOŹNIAKA [1966]. Niektóre rozwiązania dla płytowych pasm o strukturze siatkowej zostały zestawione przez B. BOCZKAJA i H. HATA [1967, a, b]. Zagadnienie dużych ugięć siatkowych płyt kolistych były tematem pracy P. KLEMMA i CZ. WOŹNIAKA [1967]. Niektóre problemy związane z teorią i obliczeniem siatkowych płyt na sprężystym podłożu były omówione przez CZ. WOŹNIAKA i M. ŻUKOWSKIEGO [1966].

Poprawność posługiwania się kontynualnym ośrodkiem włóknistym jako modelem ciągłym dźwigara o mikrostrukturze konstrukcyjnej została na drodze obliczeń porównawczych wykazana dla szczególnego przypadku w pracy S. KONIECZNEGO [1967]. Na podstawie przeliczenia prostych przypadków szczególnych wykazano stosowalność teorii wykorzystujących równania efektu brzegowego wraz z teorią skrępowanych obrotów (w zagadnieniach płytowych) lub wraz z teorią bezmomentową (w zagadnieniach tarczowych). Rozbieżność poszczególnych rozwiązań otrzymanych w oparciu o różne sposoby podejścia są tym mniejsze, im bardziej «gęsta» jest struktura siatkowa, tj. im mniejsze są wymiary cząstek dźwigara o mikrostrukturze konstrukcyjnej (dźwigara siatkowego) w porównaniu z wymiarami samego dźwigara (por. p. 7.1). Zależność pomiędzy dokładnością rozwiązania a stopniem «gęstości» siatki jest ujemną stroną stosowania teorii ośrodka włóknistego jako modelu ciągłego dźwigara siatkowego; dotychczasowe obliczenia porównawcze wykazują jednakże, że nawet dla niezbyt gęstych siatek (w których stosunek skoku siatki do jej wymiaru jest rzędu 1:5) uzyskuje się często praktycznie dobre rezultaty. Ogólnie postawione zagadnienie dokładności poszczególnych teorii ośrodka włóknistego w opisie ciał o konstrukcyjnej mikrostrukturze jest dotychczas otwartym problemem. Również otwartym problemem jest uzyskanie rozwiązań w oparciu o bardziej dokładne równania teorii ośrodka włóknistego niż równania podane w p. 7.6. Dotyczyłoby to np. ośrodka, w którym korzystamy z uproszczonego związku (7.16), lecz nie wykorzystujemy przyjęcia (7.17) (ośrodek o dwunastu lokalnych stopniach swobody). Wydaje się, że również i tutaj warianty podejścia asymptotycznego mogłyby prowadzić do pewnych rezultatów.

Bibliografia

[1851]. A. L. CAUCHY, *Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides*, C. R. Acad. Sci. Paris, **32**, 323–326.

[1869]. A. J. C. B. DE SAINT-VENANT, *Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope lorsque l'on tient compte des derives d'ordve supeurieur des déplacemens très-petits que leurs points ont éprouvés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **68**, 569–571.

[1887]. W. VOIGT, *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*, Anh. Ges. Wiss. Götingen, **34**.

[1909]. E. i F. COSSERAT, *Théorie des corps deformables*, Paris.

[1914]. E. HELLINGER, *Die allgemeinen Ausätze der Mechanik der Kontinua*, Enz. Math. Wiss., IV, 4, 30.

[1914]. K. HEUN, *Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik*, Enz. Math. Wiss., IV, 2, 11.

[1918]. F. KLEIN, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 235.

[1918]. E. NOETHER, Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 171.

[1929]. T. J. JARAMILLO, *A generalization of the energy function of elasticity theory*, Dissertation, Univ. Chicago.

[1944]. E. REISSNER, *Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor*, J. Math. and Physics, **23**, 192–194.

[1949]. W. BURZYŃSKI, *Skręcenie bez skręcania*, Przegl. Mech., W-wa.

[1953]. S. BODASZEWSKI, *O niesymetrycznym stanie napięcia i o jego zastosowaniach w mechanice ośrodków ciągłych*, Arch. Mech. Stos., 3, **5**, 351–396.

[1953]. Y. LE CORRE, *Constantes élastiques et piezoelectriques cristallines*, Bull. Soc. Franc. Miner. Crist., **76**, 464–471.

[1954]. Y. LE CORRE, *Etude de l'élasticité*, Bull. Soc. Frnc. Miner. Crist., I, **77**, 1363–1392; II, **77**, 1393–1409; III, **18**, 33–53; IV, **18**, 54–83.

[1956]. Y. LE CORRE, *La dissymetrie du tenseur des efforts et ses consequences*, J. Phys. Radium, **17**, 934–939.

[1956]. R. TIFFEN, A. C. STEVENSON, *Elastic isotropy with body force and couple*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., **9**, 306–310.

[1957]. J. LAVAL, *L'élasticité du milieu cristallin*, J. Phys. Radium, I, **18**, 247–259; II, **18**, 289–296; III, **18**, 369–379.

[1957]. N. JOEL, W. A. WOOSTER, *Theories of crystal elesticity*, Nature, **180**, 430–431.

[1958]. Y. LE. CORRE, *Les densites de couple et les pseudo-rotations dans la théorie de l'élasticité de Laval*, J. Phys. Radium, **19**, 541–547.

[1958]. J. L. ERICKSEN, C. TRUESDELL, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **1**, 295–323.

[1958]. W. GÜNTHER, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abh. Braunschweigischen Wiss. Ges., **10**, 195–213.

[1958]. N. JOEL, W. A. WOOSTER, *Number of elastic constants required in crystal elasticity*, Nature, **182**, 1078–1079.

[1958]. E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Erg. angew. Math., **5**, 1–176.

[1958]. F. A. MCCLINTOCK, P. A. ANDRE, K. R. SCHWEDT, R. E. STOECKLY, *Interface couples in cristals*, Nature, **182**, 652–653.

[1958]. W. NOLL, *A mathematical theory of mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **2**, 195–226.

[1959]. E. KRÖNER, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **4**, 273–334.

[1960]. Э. Л. АЭРО, Е. В. КУВШИНСКИЙ, *Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц*, Физика Твердого Тела, **2**, 1401-1409.

[1960]. J. L. ERICKSEN, *Theory of anisotropic fluids*, Trans. Soc. Rheol., **4**, 29–40.

[1960]. G. GRIOLI, *Elasticita asimmetrica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 4, **50**, 389–417.

[1960]. F. A. MCCLINTOCK, *Contribution of interface couples to the energy of a dislocation*, Acta. Metallurgica, **8**, 127–128.

[1960]. E. S. RAJAGOPAL, *The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity*, Annalen der Physik, **6**, 192–201.

[1960]. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, III/2, Berlin-Heidelberg-New York.

[1961]. J. L. ERICKSEN, *Conservation laws for liquid crystals*, Trans. Soc. Rheol., **5**, 23–34.

[1961]. R. S. KRISHNAN, E. S. RAJAGOPAL, *The atomistic and the continuum theories of crystal elasticity*, Annalen der Physik, **8**, 121–136.

[1962a]. J. L. ERICKSEN, *Kinematics of macromolecules*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **9**, 1–8.

[1962b]. J. L. ERICKSEN, *Hydrostatic theory of liquid crystals*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **9**, 379–394.

[1962c]. J. L. ERICKSEN, *Nilpotent energies in liquid crystals theory*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **10**, 189–196.

[1962d]. J. L. ERICKSEN, *Orientation induced by flow*, Trans. Soc. Rheol. **6**, 275–291.

[1962]. A. CEMAL ERINGEN, *Nonlinear Theory of Continuous Media*, New York.

[1962]. G. GRIOLI, *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium*, Berlin.

[1962]. S. KALISKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA, *Asymmetric stress tensor and angular momentum conservation law in the equations of combined mechanical and electromagnetic field in a continuous media*, Proc. Vibr. Probl., **3**.

[1962]. E. KRÖNER, *Dislocations and continuum mechanics*, Appl. Mech. Rev., **15**, 599–606.

[1962]. R. D. MINDLIN, H. T. TIERSTEN, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **11**, 415–448.

[1962]. H. SCHAEFER, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat Kontinuums*, Mis. der angew. Mech. Ak. Ver. Berlin, 277–292.

[1962]. R. A. TOUPIN, *Elastic materials with couples-stresses*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **11**, 385–414.

[1963]. S. KALISKI, *On a model of the continuum with essentially non-symmetric tensor of mechanical stress*, Arch. Mech. Stos., **15**.

[1963]. E. KRÖNER, *On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci, **1**, 261–278.

[1963]. Е. В. КУВШИНСКИЙ, Э. Л. АЭРО, *Континуальная теория асимметричной упругости. Учет «внутреннего» вращения*, Физика Твердого Тела, **5**, 2591–2598.

[1963a]. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress-concentrations*, Experimental Mech., **3**, 1–7.

[1963b]. R. D. MINDLIN, *Representation of displacements and stresses in plane strain with couple-stresses*, IUTAM Tbilisi, 256–259.

[1963]. M. MIŞICU, *Theory of viscoelasticity with couple-stresses and some reductions to two-dimensional problems*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mech. appl. **8**, 921–952.

[1964]. Э. Л. АЭРО, Е. В. КУВШИНСКИЙ, *Континуальная теория асимметрической упругости*, Физика Твердого Тела, **6**, 2689–2699.

[1964]. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **17**, 1–46.

[1964]. J. M. DOYLE, *On completness of stress functions in elasticity*, J. Appl. Mech., **31**, 728–729.

[1964]. A. CEMAL ERINGEN, *Simple microfluids* Int. J. Engng. Sci., **2**, 205–217.

[1964a]. A. CEMAL ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, Int. J. Engng. Sci. **2**, 189–204.

[1964b]. A. CEMAL ERINGEN, E. S. SUHUBIN, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, Int. J. Engng. Sci. **2**, 389–404.

[1964a]. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Simple force and stress multiples*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **16**, 325–353.

[1964b]. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **17**, 113–147.

[1964]. O. HOFFMAN, *On bending of thin elastic plates in the presence of couple stresses*, J. Appl. Mech., **31**, 706–707.

[1964]. P. D. KELLY, *A reacting continuum*, Int. J. Engng. Sci., **2**, 129–154.

[1964]. W. T. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proc. Koninkl. Nederlandse Akad. Wet., Ser. B, **67**.

[1964]. S. KESSEL, *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums*, Abh. Brunschw. Wiss. Ges., **16**, 1–22.

[1964]. R. D. MINDLIN, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **16**, 51–78.

[1964a]. M. MIŞICU, *Theory of viscoelasticty with couple stresses and some reductions to two-dimensional problems*, II, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl. **9**, 3–35.

[1964b]. M. MIŞICU, *On a theory of asymmetric plastic and viscoelasticplastic solids*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **9**, 477–495.

[1964c]. M. MIŞICU, *A generalization of the Cosserat equations of the motion of deformable bodies* (with internal degrees of freedom), Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **9**, 1351–1359.

[1964a]. В. А. ПАЛЬМОВ, *Основные уравнения теории несимметрической упругости*, П.М.М., **28**, 401–408.

[1964b]. В. А. ПАЛЬМОВ, *Плоская задача теории несимметричной упругости*, П.М.М., **28**, 1117–1120.

[1964]. C. TEODOSIU, *On the determination of internal stresses and couple stresses in the continuum theory of dislocations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 605–610.

[1964]. R. A. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Anasysis, **17**, 85–112.

[1964a]. Cz. WOŹNIAK, *Introduction 'o mechanics of fibrous media*, Arch. Mech. Stos., **16**.

[1964b]. Cz. WOŹNIAK, *Fibrous media as continuous models of grates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 15–17.

[1964c]. Cz. WOŹNIAK, *Fibrous media as continuous models of frames and lattices*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 19–22.

[1964d]. Cz. WOŹNIAK, *Fundamentals of the theory of fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 329–333.

[1964e]. Cz. WOŹNIAK, *Equations of three-dimensional fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 389–393.

[1965]. Э. Л. АЭРО, А. Н. БУЛУГИН, Е. В. КУВШИНСКИЙ, *Асимметрическая гидромеханика*, П. М. М., **2**, 297–308.

[1965]. R. C. DIXON, A. CEMAL ERINGEN, *A dynamical theory of polar elastic dielectrics*, Int. J. Engng. Sci., **7**, 359–398.

[1965]. A. E. GREEN, *Micro-materials and multipolar continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **7**, 533–537.

[1965a]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *Plasticity and multipolar continuum mechanics*, Mathematika, **12**, 21–26.

[1965b]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *On the derivation of discontinuity conditions in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **2**, 621–624.

[1965]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, R. S. RIVLIN, *Directors and multipolar displacement in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **2**, 611–620.

[1965]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, W. L. WAINRIGHT, *A general theory of Cosserat surface*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **20**, 287–308.

[1965]. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics: functional theory*, I, Proc. Royal Soc., **284**, 303–324.

[1965]. R. J. HARTRANFT, G. C. SIH, *The effect of couple-stresses on the stress concentrations of a circular inclusion*, J. Appl. Mech., **32**, 429–431.

[1965]. W. H. HOPPMAN, F. O. F. SHAHMAN, *Physical model of a 3-constant isotropic elastic material*, J. Appl. Mech., **32**, 837–841.

[1965]. P. N. KALONI, *On certain steady flows of anisotropic fluids*, Int. J. Engng. Sci., **3**, 515–532.

[1965a]. R. D. MINDLIN, *On the equations of elastic materials with micro-structure*, Int. J. Solids Structures, **1**, 73–78.

[1965b]. R. D. MINDLIN, *Second gradient strain and surface-tension in linear elasticity*, Int. J. Solids Structures, **1**, 417–438.

[1965a]. M. MIŞICU, *On a general solution of the theory of singular dislocations of media with couple-stresses*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 35–46.

[1965b]. M. MIŞICU, *On the mechanics of structural media. Non-correleted fields*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 295–332.

[1965c]. M. MIŞICU, *General correleted fields of structural mechanics*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 507–550.

[1965d]. M. MIŞICU, *The nonlinear elasticity of materials with partially constraind internal rotations*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 841–892.

[1965e]. M. MIŞICU, *A generalization of the Cosserat equations of the motion of deformable bodies*, Arch. Mech. Stos., **17**, 183–196.

[1965f]. M. MIŞICU, *The elasticity of structural non-homogenous centro-asymmetric isotropic bodies*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 1085–1105.

[1965g]. M. MIŞICU, *On the distortions in special structural media*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 1441–1461.

[1965]. R. MUKI, E. STERNBERG, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, Z. angew. Math. Physik, **16**, 611–648.

[1965]. P. M. NAGHDI, *A static-geometric analogue in the theory of couple-stresses*, Proc. Kinincl. Nederlandse Akad. Wet., Ser. B, **68**, 29–32.

[1965]. Ю. Н. НЕМИШ, *Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием* Прикладная Механика, **1**, 52–59.

[1965]. Г. Н. САВИН, *Основы плоской задачи моментной теории упругости*, Киев.

[1965]. M. SOKOŁOWSKI, *Couple stresses in problems of torsion of prismatical bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **13**, 419–424.

[1965]. C. TEODOSIU, *The determination of stress and couple-stresses generated by dislocations in isotropic media*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 1461–1481.

[1965]. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, Berlin-Heidelberg-New York.

[1965]. Y. WEITSMAN, *Couple-stresses effects on stress concentrations around a cylindrical inclusion in a field of uniaxial tension*, J. Appl. Mech., **32**, 424–428.

[1965]. Z. WESOŁOWSKI, *On the couple-stresses in an elastic continuum*, Arch. Mech. Stos., **17**, 219–232.

[1965a]. CZ. WOŹNIAK, *Modele ciągłe gęstych siatek prętowych*, Arch. Inżyn. Lądow., **11**, 175–185.

[1965b]. CZ. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media* (I), Arch. Mech. Stos., **17**, 651–669.

[1965c]. CZ. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media* (II), Arch. Mech. Stos., **17**, 777–799.

[1965d]. CZ. WOŹNIAK, *On the stability of dense plane bar grids*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **13**, 53–59.

[1965e]. CZ. WOŹNIAK, *On the simply connected model of certain multi-hole discs*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, **13**, 261–266.

[1966]. W. BARAŃSKI, CZ. WOŹNIAK, *Fibrous media as a simply connected model of multi-hole disc*, Arch. Mech. Stos., **18**, 273–283.

[1966]. W. BARAŃSKI, *Izotropowy ośrodek włóknisty jako model rusztu powłokowego*, Arch. Mech. Stos., **18**,

[1966]. J. L. BLEUSTEIN, *Effects of microstructure on stress concentrations at a spherical cavity*, Int. J. Solids Structures, **2**, 83–104.

[1966]. T. S. COOK, Y. WEITSMAN, *Strain gradient effects around spherical inclusions and cavities*, Int. J. Solids Structures, **2**.

[1966]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *On the derivation of discontinuity conditions in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci. **4**, 96–96.

[1966]. M. MISICU, *The structural distorsion and the basic laws of the structural dislocation theory*, II, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **11**, 109–124.

[1966]. Ю. Н. НЕМИШ, *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости*, Прикладная Механика, **2**, 85–96.

[1966]. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**, 129–138.

[1966]. N. SANDRU, *On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., **4**, 81–94.

[1966]. Г. Н. САВИН, А. Н. ГУЗЬ, *Об одном способе решения плоских задач моментной теории упругости для многосвязных областей*, Прикладная Механика, **2**, 3–19.

[1966]. Y. WEITSMAN, *Strain-gradient effects around cylindrical inclusions and cavities in a field of cylindricaly symmetric tension*, J. Appl. Mech., **33**, 57–67.

1966]. Л. П. ВИНОКУРОВ, Н. И. ДЕРЕВЯНКО, *Построение основных уравнений для расчета стержней (без кручения) с учетом моментных напраяжений*, Прикладная Механика, **2**, 72–79.

[1966]. K. WILMAŃSKI, *O pewnym włóknistym modelu gęstego rusztu*, Rozpr. Inżyn. 3, **14**.

[1966a]. CZ. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *Some problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, **14**.

[1966b]. CZ. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *On the solutions of axially symmetrical problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, **14**.

[1966]. Z. BACZYŃSKI, CZ. WOŹNIAK, *Statics of lattice — tower shells*, Symposium IASS, Bratysława.

[1966]. CZ. WOŹNIAK, M. ŻUKOWSKI, *On a model of elastic subsoil carrying surface moments*, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. IV, **14**.

[1966]. J. WYRWIŃSKI, *Green functions for a thermoelastic Cosserat medium*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl, IV, **14**, 145–154.

[1966a]. Cz. WOŹNIAK, *Load-carrying structures of dense lattice-type*, Arch. Mech. Stos., **18**.
[196b.] Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability of lattice-type plates*, Arch. Mech. Stos., **18**.
[1966c]. Cz. WOŹNIAK, *Foundations of micro-solid theory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
[1966d]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of micro-materials*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
[1966e]. Cz. WOŹNIAK, *Hyper-stresses in linear thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
[1966f]. Cz. WOŹNIAK, *Continuous models of the lattice — type bodies*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
[1966g]. Cz. WOŹNIAK, *Edge-effect in lattice-type* discs, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
[1966]. R. PETA, Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do teorii i obliczeń kratownic powierzchniowych*, Arch. Inżyn. Lądow, **12**.
[1967a]. B. BOCZKAJ, H. HAT, *Zginanie jednokierunkowo obciążonych pasm rusztowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., — Budownictwo.
[1967b]. B. BOCZKAJ, H. HAT, *Niektóre przypadki stateczności pasm rusztowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., — Budownictwo.
[1967]. H. HAT, *O pewnych przypadkach zginania wielootworowych pasm płytowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., — Budownictwo.
[1967]. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych*, Arch. Inżyn. Lądow.
[1967a]. K. WILMAŃSKI, *Metody asymptotyczne w teorii ciał z mikrostrukturą — zagadnienie płaskie*, Arch. Mech. Stos.
[1967b]. K. WILMAŃSKI, *Niegiroskopowa płyta włóknista jako model ciągły osiowo-symetrycznych rusztów i płyt wielootworowych*, Mech. Teoret. Stos.
[1967k]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of the bodies with microstructure*, Arch. Mech. Stos., **19**
[1967l]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of non simple materials*, Arch. Mech. Stos., **19**
[1967m]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of non-simple continuous media with internal degrees of freedom*, Int. J. of Eng. Sci.
[1967]. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Perforated circular plates*, Arch. Mech. Stos., **19**,
[1967]. F. PIETRAS, J. WYRWIŃSKI, *Naprężenia w cieplne w płaskim ośrodku Cosserat*, Arch. Mech. Stos.
[1967a]. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *Niektóre zagadnienia stateczności kolistych płyt perforowanych*, Arch. Inżyn. Lądow.
[1967b]. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *O wyboczeniu biegunowych siatek prętowych*, Mech. Teor. i Stos.
[1967]. S. KONIECZNY, Cz. WOŹNIAK, *Obliczanie płyt siatkowych z uwzględnieniem efektu brzegowego*, Rozpr. Inżyn.
[1967]. S. ZAHORSKI, *On motion and thermodynamics of non-simple continua with microstructure*, Arch. Mech. Stos.

Резюме

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД ТИПА КОССЕРА

В большинстве задач механики сплошных сред предполагается, что каждая материальная точка имеет три степени свободы, плотность внутренней энергии зависит от первых производных вектора перемещений а не зависит от высших. При выше упомянутых предположениях напряженное состояние однозначно определяется симметрическим тензором напряжения. Упругая сплошная среда, которая не удовлетворяет хотя бы одному из упомянутых предположений, названа сплошной средой типа Коссера.

В работе дается обзор задач механики сред этого типа. Обсуждается, довольно подробно, оба основные направления развития. Первое из них состоит в обобщении кинематики среды (элемент имеет не более трех степеней свободы), тогда как второе направление постулирует наличие высших градиентов в перемещения в выражении для плотности внутренней энергии. Оба эти подхода приводят к несимметрии тензора напряжений и к так наз. напряжениям высшего порядка.

В работе обсуждаются последовательно: гироскопическая среда Коссера, теория непростых материалов второго порядка, теория тела с макроструктурой (в смысле дополнительных степеней свободы, определяемых полем направляющим вектор), теория сред с мультиполярными перемещениями (дополнительные степени свободы определяются двухточечными тензорными полями), теория непростых материалов высшего порядка, а также так наз. конструкционная микроструктура. В работе указывается обширная литература.

Summary

MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIA — COSSERAT TYPE

With regard to the problems concerning mechanics of continuous media, it is assumed, on the whole, that any material point of the medium is characterized by three freedom degrees and that the density of internal energy depends on first derivatives of displacement vector and not on the higher ones. With such assumptions the state of stress is defined uniquely by the symmetric stress tensor. The elastic continuous medium in which at least one of the mentioned conditions does not exist is called the continuous medium of Cosserat type.

The paper gives the survey of problems concerning mechanics of media of such a type. Two basic development trends are discussed in a more detailed way. The generalization of medium kinematics (an element of medium is characterized by more than three freedom degrees) is the basis of the first trend, while existence of higher order gradients of displacement in the equation for density of internal energy applies to the second one. Both approaches lead to nonsymmetry of the stress tensor and to the so-called higher order stresses.

The paper deals successively with the following problems: gyroscope Cosserat medium, theory of non-simple materials of second order effect, theory of body with microstructure (in the meaning of additional freedom degrees defined by director field), theory of media with multipolar displacement (additional freedom degrees are defined by two point tensor fields), theory of non-simple materials of higher order effects and so-called construction microstructure. A large bibliography is also included.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1966 r.