

ZASTOSOWANIE RACHUNKU ZABURZEŃ W PROBLEMACH STATECZNOŚCI
PŁYT PROSTOKĄTNYCH O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W pracy niniejszej wykorzystano metodę rachunku zaburzeń (metodę perturbacji) w postaci stosowanej głównie w zagadnieniach mechaniki kwantowej do rozwiązania problemu stateczności płyty prostokątnej swobodnie podpartej o zmiennej sztywności, wszechstronnie ściskanej siłami o liniowo zmieniających się natężeniach, działającymi w płaszczyźnie środkowej płyty. Istnieje niewielka liczba rozwiązań przybliżonych, dotyczących stateczności płyt prostokątnych o zmiennej sztywności, natomiast w ogóle nie są znane rozwiązania całkowicie ścisłe. Powodem tego jest nie tylko skomplikowana postać równania powierzchni wyobczonej płyty, ale również konieczność rozwiązania problemu tarczy o zmiennej grubości i określenia rozkładu działających sił w funkcji współrzędnych (nawet w przypadku obciążenia brzegów płyty stałymi siłami). Wśród prac podających rozwiązania przybliżone należy wymienić przede wszystkim: pracę W. H. WITTRICKA i C. H. ELLENA [10], w której zbadano stateczność płyty prostokątnej o liniowo i wykładniczo zmiennej grubości, pracę A. SZ. BOŻENOWA [3], w której metodą różnic skończonych obliczono siłę krytyczną dla płyty kwadratowej o liniowo zmiennej grubości w jednym kierunku, ściskanej stałymi siłami N_x i N_y , o różnych natężeniach, pracę M. BANASIAKA [1], w której podano rozwiązanie zagadnienia dla płyty prostokątnej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej liniowo zmieniającymi się siłami, wreszcie pracę [6], zawierającą ścisłe rozwiązanie równania powierzchni wyobczonej płyty prostokątnej wszechstronnie ściskanej stałymi siłami o liniowo zmiennej sztywności, jednak przy założeniu upraszczającym, że siły podłużne wewnątrz płyty są również stałe.

We wszystkich cytowanych wyżej pracach stosuje się przybliżone metody do rozwiązywania nieścisłego równania powierzchni wyobczonej płyty, otrzymanego przy założeniu, że rozkład sił podłużnych i stycznych wewnątrz płyty jest taki sam jak na brzegach. W niniejszej pracy postaramy się rozwiązać zagadnienie z uwzględnieniem problemu tarczowego. Znacznie więcej rozwiązań ścisłych i przybliżonych jest dla płyt kołowych; obszerny przegląd tych rozwiązań podano w pracy [5].

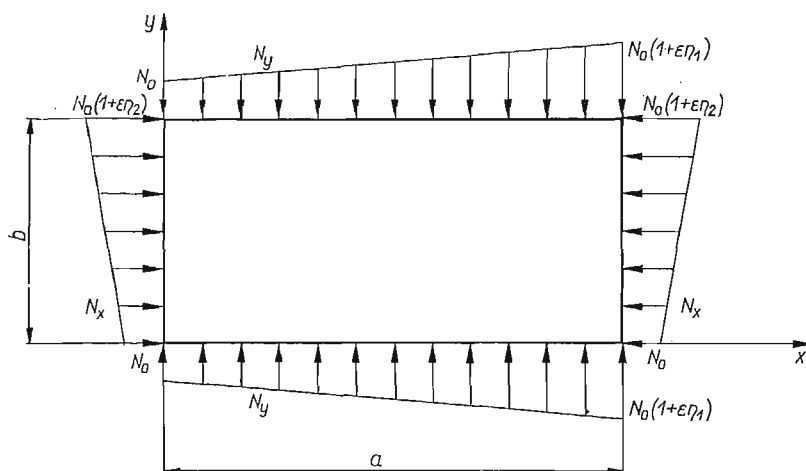
Ponieważ uzyskanie rozwiązania ścisłego danego problemu jest praktycznie niemożliwe, postaramy się więc podać przynajmniej rozwiązanie ważne dla niewielkich zmian sztywności i niewielkich zmian obciążenia. Rozkład naprężeń w płycie określimy rozwiązując odpowiednie równanie na funkcję naprężeń dla tarczy zwykłą metodą małego parametru, a następnie zastosujemy metodę rachunku zaburzeń do równania określającego powierzchnię wyobczoną płyty. Metoda ta zostanie uogólniona w stosunku do metod podanych w podręcznikach [2, 4 i 8] oraz w pracy M. SOKOŁOWSKIEGO [9].

2. Sformułowanie zagadnienia

Celem niniejszej pracy jest obliczenie siły krytycznej powodującej wyboczenie płyty prostokątnej swobodnie podpartej na wszystkich brzegach (rys. 1). Płyta jest wszechstronnie ściskana siłami przyłożonymi na brzegach, o liniowo zmieniających się natężeniach, określonymi za pomocą wzorów:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} N_x &= N_0 \left(1 + \varepsilon \eta_2 \frac{y}{b} \right) & \text{dla } x = 0 \text{ i } x = a, \\ N_y &= N_0 \left(1 + \varepsilon \eta_1 \frac{x}{a} \right) & \text{dla } y = 0 \text{ i } y = b, \\ N_{xy} &= 0 & \text{dla } x = 0, x = a, \\ & & y = 0, y = b, \end{aligned}$$

gdzie N_0 oznacza wielkość siły na jednostkę długości dla $x = 0$ i $y = 0$, ε oznacza mały parametr ($\varepsilon \ll 1$), η_1 i η_2 — pewne dowolne stałe spełniające warunek $|\eta_1| \leq 1$ i $|\eta_2| \leq 1$.



Rys. 1

Założymy ponadto, że grubość płyty nie jest stała i zmienia się według wzoru

$$(2.2) \quad h(x, y) = h_0 \left[1 + \varepsilon \left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \right]^\kappa,$$

gdzie h_0 jest to grubość płyty w początku przyjętego układu współrzędnych, a_1 i a_2 pewne dowolne stałe spełniające warunek $|a_1| + |a_2| \leq 1$, κ dowolna stała.

Równanie opisujące powierzchnię wyboczoną płyty o zmiennej sztywności [10]

$$(2.3) \quad \nabla^2(D\nabla^2 w) + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

zawiera nieznanne na razie wielkości sił N_x, N_y, N_{xy} jako funkcje x i y , które należy wyznaczyć z równania na funkcję naprężeń dla tarczy o zmiennej grubości [7]

$$(2.4) \quad \nabla^2(S\nabla^2 F) + (1+\nu) \left(2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = 0.$$

W równaniach (2.3) i (2.4) wprowadzono oznaczenia:

$$(2.5) \quad D(x, y) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad S(x, y) = \frac{1}{Eh};$$

w jest ugięciem płyty, ν współczynnikiem Poissona oraz

$$(2.6) \quad N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Jak więc widać, należy najpierw z równań (2.4) oraz wzorów (2.6) obliczyć wielkości sił, a więc rozwiązać zagadnienie tarczowe dla danego układu obciążeń brzegowych (2.1).

3. Zagadnienie tarczowe

Rozwiązania równania (2.4) będziemy poszukiwać metodą małego parametru w postaci szeregu:

$$(3.1) \quad F(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(x, y) \varepsilon^i = F_0(x, y) + \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y) + \dots$$

przy danej funkcji S (z równań (2.2) i (2.5)), która po rozwinięciu przybiera postać

$$(3.2) \quad S = S_0 \left[1 - \varepsilon \kappa \left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) + \varepsilon^2 \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} \left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right)^2 + \dots \right].$$

Podstawiając wzory (3.1) i (3.2) do równania (2.4) i przyrównując współczynniki przy wszystkich potęgach ε do zera otrzymamy ciąg równań:

$$(3.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 F_0 = 0,$$

$$(3.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 F_1 = \kappa \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 F_0 \right],$$

$$(3.5) \quad \nabla^2 \nabla^2 F_2 = \kappa \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 F_1 \right] - \frac{1}{2} \kappa(\kappa+1) \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right)^2 \nabla^2 F_0 \right] + \\ + \kappa(\kappa+1)(1+\nu) \left(\frac{a_1^2}{a^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} - 2 \frac{a_1 a_2}{ab} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} + \frac{a_2^2}{b^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \right)$$

Podobnie ze wzorów (2.6) dostajemy ciąg warunków brzegowych dla funkcji $F_i (i = 0, 1, 2, \dots)$:

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = N_0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = N_0 \eta_2 \frac{y}{b}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 0, \dots \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } x = a, \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = N_0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = N_0 \eta_1 \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 0, \dots \quad \text{dla } y = 0 \text{ i } y = b$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, x = a, y = 0, y = b.$$

Rozwiązaniem ścisłymi równań (3.3) i (3.4) spełniającymi warunki brzegowe (3.6) są funkcje:

$$(3.7) \quad F_0 = \frac{1}{2} N_0 (x^2 + y^2),$$

$$(3.8) \quad F_1 = \frac{1}{6} N_0 \left(\eta_1 \frac{x^3}{a} + \eta_2 \frac{y^3}{b} \right),$$

natomiast rozwiązanie równania (3.5) przyjmujemy w postaci przybliżonej:

$$(3.9) \quad F_2 = \frac{1}{2} A N_0 x(x-a)y(y-b),$$

gdzie

$$(3.10) \quad A = \varkappa \left(\frac{\alpha_1 \eta_1}{a^2} + \frac{\alpha_2 \eta_2}{b^2} \right) - \frac{1}{2} (1-\nu) \varkappa (\varkappa + 1) \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\alpha_2^2}{b^2} \right).$$

Funkcja $F_2(x, y)$ spełnia równanie (3.5) oraz warunki brzegowe $\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = 0$, nie spełnia natomiast lokalnie warunków brzegowych $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, y=0} = 0$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} = 0$, dobrana jest jednak tak, aby były one spełnione całkowo, tzn. aby $\int_s N_{xy} ds = 0$ na każdym brzegu tarczy.

Ostatecznie, korzystając ze wzorów (2.6) obliczymy rozkład sił podłużnych i stycznych na jednostkę długości w funkcji współrzędnych x i y z dokładnością do trzech wyrazów szeregu małego parametru:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} N_x &= N_0 \left[1 + \varepsilon \eta_2 \frac{y}{b} + \varepsilon^2 A x(x-a) + \dots \right], \\ N_y &= N_0 \left[1 + \varepsilon \eta_1 \frac{x}{a} + \varepsilon^2 A y(y-b) + \dots \right], \\ N_{xy} &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2} A N_0 (2x-a)(2y-b) + \dots \end{aligned}$$

4. Stateczność płyty

Obecnie zadaniem naszym jest przybliżone rozwiązanie równania (2.3), w którym siły N_x , N_y i N_{xy} określone są wzorami (3.11) a sztywność płyty zmienia się według zależności:

$$(4.1) \quad D(xy) = D_0 \left[1 + \varepsilon \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right) \right]^{3\nu},$$

a więc po rozwinięciu na szereg potęgowy względem małego parametru

$$(4.2) \quad D(x, y) = D_0 \left[1 + 3\kappa \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right) \varepsilon + \frac{3}{2} \kappa(3\kappa - 1) \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right)^2 \varepsilon^2 + \dots \right].$$

Wstawiając wyrażenia (3.11) i (4.2) do równania (2.3) otrzymujemy (ograniczając się do wyrazów stojących przy potęgach ε nie większych niż 2):

$$(4.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 \left[3\kappa \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 w \right] \varepsilon + \left\{ \nabla^2 \left[\frac{3}{2} \kappa(3\kappa - 1) \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right)^2 \nabla^2 w \right] + \right. \\ \left. + (1 - \nu) \left[6\kappa(3\kappa - 1) \frac{\alpha_1 \alpha_2}{ab} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 3\kappa(3\kappa - 1) \frac{\alpha_1^2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 3\kappa(3\kappa - 1) \frac{\alpha_2^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} \varepsilon^2 + \dots = \\ = \lambda \left\{ \nabla^2 w + \left(\eta_2 \frac{y}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{x}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \varepsilon + \right. \\ \left. + A \left[x(x-a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y(y-b) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (2x-a)(2y-b) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \varepsilon^2 + \dots \right\},$$

gdzie $\lambda = -N_0 D_0$.

W dalszym ciągu przyjęcie funkcji $w(x, y)$ oraz wartości własnej λ w postaci szeregu potęgowego względem małego parametru prowadzi przy zastosowaniu zwyczajnej metody małego parametru [9] (jak w pkt. 3) do szeregu równań różniczkowych cząstkowych na funkcje w , oraz wartości własne λ_i , przy czym pierwsze z nich jest jednorodne, a wszystkie następne są równaniami niejednorodnymi. Trudność polega tutaj na rozwiązywaniu równań niejednorodnych; aby tego uniknąć, zastosujemy rachunek zaburzeń oparty na ujęciu używanym w mechanice kwantowej, lecz znacznie ogólniejszym od podanego w podręcznikach [2, 4 i 8].

Do równania (2.3) (lub (4.3)) należy dołączyć warunki brzegowe, które w naszym przypadku dla płyty swobodnie podpartej na wszystkich brzegach są następujące:

$$(4.4) \quad w = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 w = 0$$

na wszystkich brzegach płyty

Obecnie podamy szkic wyprowadzenia podstawowych wzorów na poprawki do wartości własnej λ w oparciu o rachunek zaburzeń.

4.1. Rachunek zaburzeń. Celem naszym jest rozwiązanie równania różniczkowego liniowego na funkcje i wartości własne:

$$(4.5) \quad \hat{H}w = \lambda \hat{M}w,$$

w którym operatory liniowe \hat{H} i \hat{M} można zapisać w postaci szeregu potęgowego względem małego parametru:

$$(4.6) \quad \hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}\varepsilon + \hat{H}^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

$$(4.7) \quad \hat{M} = \hat{M}^{(0)} + \hat{M}^{(1)}\varepsilon + \hat{M}^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

gdzie \hat{H}^i oraz \hat{M}^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) są również operatorami różniczkowymi liniowymi.

Wyrażając funkcje własne w_n , odpowiadające wartościom własnym λ_n , również przez szeregi potęgowe względem małego parametru

$$(4.8) \quad w_n = w_n^{(0)} + w_n^{(1)}\varepsilon + w_n^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

$$(4.9) \quad \lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)}\varepsilon + \lambda_n^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

otrzymamy, po wstawieniu (4.8), (4.9) oraz (4.6) i (4.7) do równania (4.5) następujący ciąg równań:

$$(4.10) \quad \hat{H}^{(0)} w_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)},$$

$$(4.11) \quad \hat{H}^{(0)} w_n^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(1)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)} = -(\hat{H}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(1)}) w_n^{(0)},$$

$$(4.12) \quad \hat{H}^{(0)} w_n^{(2)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)} = \\ = -(\hat{H}^{(2)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(2)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(1)}) w_n^{(0)} - (\hat{H}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(1)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(0)}) w_n^{(1)}$$

Założymy, że znamy funkcje własne $w_n^{(0)}$ i wartości własne $\lambda_n^{(0)}$ dyskretnego widma wartości własnych dla niezaburzonych operatorów $\hat{H}^{(0)}$ i $\hat{M}^{(0)}$, tj. znamy ściśle rozwiązanie równania (4.10). W dalszym ciągu przyjmiemy, że żadna z wartości własnych $\lambda_n^{(0)}$ nie jest zwyrodniała (tzn. każdej wartości własnej odpowiada tylko jedna funkcja własna) oraz że funkcje własne $w_n^{(0)}$ spełniają w pewnym obszarze związek

$$(4.13) \quad \int_V w_m^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)} dx = \delta_{mn},$$

a więc są ortogonalne w tym obszarze do funkcji $\hat{M}^{(0)} w_n^{(0)}$ ($m \neq n$) i można je unormować w myśl wzoru (4.13). We wzorze tym w przypadku wielowymiarowym obszar całkowania jest pewną objętością przestrzeni wielowymiarowej, element dx oznacza element objętościowy tej przestrzeni, a symbole m i n oznaczają całe zbiory wskaźników, których liczba jest na ogół równa wymiarowi przestrzeni. Wobec tego że funkcje $w_n^{(0)}$ spełniają warunki brzegowe (4.4), poszukiwane funkcje $w_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) przedstawimy przez szeregi funkcji własnych zerowego przybliżenia

$$(4.14) \quad w_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}^{(i)} w_m^{(0)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $c_{nm}^{(i)}$ są pewnymi stałymi współczynnikami.

Po podstawieniu szeregu (4.14) do równania (4.11) mnożymy je z lewej strony przez $w_n^{(0)}$ i całkujemy po całym obszarze ortogonalności.

Korzystając z warunku (4.13) otrzymujemy

$$(4.15) \quad \lambda_n^{(1)} = N_{nn}^{(1)},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie:

$$(4.16) \quad N_{mn}^{(i)} = \int_V w_m^{(0)} \hat{N}^{(i)} w_n^{(0)} dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

oraz podobnie dla $H_{mn}^{(i)}$ i $M_{mn}^{(i)}$

Mnożąc równanie (4.11) przez $w_m^{(0)}$ i całkując obliczamy współczynniki $c_{nm}^{(1)}$:

$$(4.17) \quad c_{nm}^{(1)} = \frac{N_{nm}^{(1)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}}.$$

Korzystając w dalszym ciągu ze wzorów (4.14), (4.15) i (4.17) oraz równania (4.12) w podobny sposób obliczamy

$$(4.18) \quad \lambda_n^{(2)} = N_{nn}^{(2)} + \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{N_{mn}^{(1)} N_{nm}^{(1)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} = N_{nn}^{(1)} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{N_{mn}^{(1)} M_{nm}^{(1)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}},$$

gdzie operatory \hat{N}^i określone są wzorami:

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \hat{N}^{(1)} &= \hat{H}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(1)}, \\ \hat{N}^{(2)} &= \hat{H}^{(2)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(2)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Kreska przy znaku sumy oznacza, że należy sumować po wartościach $m \neq n$.

Ze wzorów (4.15) i (4.18) wynika, że jeżeli znamy układ funkcji podstawowych $w_n^{(0)}$, to obliczenie pierwszej poprawki jest niezwykle proste i zapewne mniej pracochłonne niż w przypadku stosowania zwyczajnej metody małego parametru; również obliczenie drugiej poprawki prowadzi do prostych przekształceń i pozwala uniknąć rozwiązywania zwykle dość skomplikowanego równania różniczkowego na funkcję $w_n^{(2)}$, a także na $w_n^{(1)}$.

Wykorzystamy obecnie wyprowadzone wzory (4.15) i (4.18) do rozwiązania zagadnienia podanego w p. 2.

4.2. Obliczenie siły krytycznej. Porównując wzory (4.5), (4.6) i (4.7) z równaniem (4.3) widzimy, że operatory różniczkowe \hat{H}^i oraz \hat{M}^i w podanym problemie są następujące:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \hat{H}^{(0)} &= \nabla^2 \nabla^2, \\ \hat{H}^{(1)} &= 3\kappa \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 \right], \\ \hat{H}^{(2)} &= 3\kappa(3\kappa - 1) \left\{ \frac{1}{2} \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right)^2 \nabla^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \left(2 \frac{a_1 a_2}{ab} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{a_1^2}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{a_2^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \hat{M}^{(0)} &= \nabla^2 \\ \hat{M}^{(1)} &= \eta_2 \frac{y}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{x}{a} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \hat{M}^{(2)} &= A \left[x(x-a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y(y-b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (2x-a)(2y-b) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (4.10), odpowiadające problemowi wszechstronnego ściskania stałymi siłami płyty o stałej grubości, a więc równania

$$(4.22) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_{mn}^{(0)} = \lambda_{mn}^{(0)} \nabla^2 w_{mn}^{(0)}$$

jest dobrze znane i wyraża się następująco:

$$(4.23) \quad w_{mn}^{(0)} = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\lambda_{mn}^{(0)} = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Funkcje własne $w_{mn}^{(0)}$ spełniają warunek ortogonalności (4.13)

$$(4.24) \quad \int_0^a \int_0^b w_{mn}^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_{\mu\nu}^{(0)} dx dy = \delta_{m\mu} \delta_{n\nu}$$

wówczas, gdy początkowo dowolna stała C_{mn} równa się

$$(4.25) \quad C_{mn} = \frac{2i}{\pi \sqrt{ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

W dalszym ciągu wzory (4.15) i (4.18) należy przystosować do zagadnienia dwuwymiarowego, a więc całki pojedyncze zastąpić podwójnymi oraz sumy po jednym wskaźniku zastąpić sumami po wszystkich wskaźnikach numerujących funkcje własne zerowego przybliżenia. Pierwszą poprawkę do wartości własnej $\lambda_{mn}^{(0)}$ obliczymy bardzo prosto ze wzoru:

$$(4.26) \quad \lambda_{mn}^{(1)} = \int_0^a \int_0^b w_{mn}^{(0)} (\hat{H}^{(1)} - \lambda_{mn}^{(0)} \hat{M}^{(1)}) w_{mn}^{(0)} dx dy$$

ostatecznie po scałkowaniu;

$$(4.27) \quad \lambda_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \lambda_{mn}^{(0)} [3\kappa(a_1 + a_2) - \delta]$$

gdzie

$$\delta = \frac{\eta_1 \beta^2 n^2 + \eta_2 m^2}{m^2 + \beta^2 n^2}, \quad \beta = \frac{a}{b}.$$

Podobnie drugą poprawkę do wartości własnej $\lambda_{mn}^{(0)}$ można obliczyć ze zmodyfikowanego wzoru (4.18)

$$(4.28) \quad \lambda_{mn}^{(2)} = N_{mn, mn}^{(2)} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{N_{mn, \mu\nu}^{(1)} N_{\mu\nu, mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} - N_{mn, mn}^{(1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{N_{\mu\nu, mn}^{(1)} M_{mn, \mu\nu}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}},$$

który po wykorzystaniu (4.19) przybiera postać

$$(4.29) \quad \lambda_{mn}^{(2)} = H_{mn, mn}^{(2)} - \lambda_{mn}^{(0)} M_{mn, mn}^{(2)} - \lambda_{mn}^{(1)} M_{mn, mn}^{(1)} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{mn, \mu\nu}^{(1)} H_{\mu\nu, mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} -$$

$$- \lambda_{mn}^{(0)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{mn, \nu\mu}^{(1)} M_{\mu\nu, mn}^{(1)} + H_{\mu\nu, mn}^{(1)} M_{mn, \mu\nu}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} - \lambda_{mn}^{(1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{\mu\nu, mn}^{(1)} M_{mn, \mu\nu}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} +$$

$$+ \lambda_{mn}^{(0)} (\lambda_{mn}^{(0)} + \lambda_{mn}^{(1)}) \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M_{mn, \mu\nu}^{(1)} M_{\mu\nu, mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}}.$$

Ostatecznie po wykonaniu żmudnych lecz prostych obliczeń, w których podwójne sumy ze wzoru (4.29) przechodzą w pojedyncze, z uwagi na warunek ortogonalności (4.13) otrzymujemy:

$$(4.30) \quad \lambda_{mn}^{(2)} = \lambda_{mn}^{(0)} \left\{ 3\kappa(3\kappa-1) \left[\frac{1}{6} (a_1^2 + a_2^2) - \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{a_1^2}{m^2} + \frac{a_2^2}{n^2} \right) + \frac{1}{4} a_1 a_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\nu) \frac{\beta^2(a_1^2 n^2 + a_2^2 m^2)}{(m^2 + \beta^2 n^2)^2} \right] + \frac{a^2(m^2 + n^2)A}{6(m^2 + \beta^2 n^2)} - \frac{1}{4} \delta [3\kappa(a_1 + a_2) - \delta] - \right. \\ \left. - \frac{288\kappa^2}{\pi^4} (a_1^2 m^2 S_1 + a_2^2 n^2 \beta^{-2} S_2) - \frac{48\kappa m^2 n^2}{\pi^4} a_1 \eta_1 \beta^2 S_3 + a_2 \eta_2 \beta^{-2} S_4 \right] [4 + 3\kappa(a_1 + a_2) - \delta] - \\ \left. - \frac{32m^2 n^2}{\pi^4} (\eta_1^2 n^2 \beta^4 S_5 + \eta_2^2 m^2 \beta^{-2} S_6) \left[1 + \frac{3}{2} \kappa(a_1 + a_2) - \frac{1}{2} \delta \right] \right\},$$

gdzie

$$(4.31) \quad S_1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\mu+m}] \frac{\mu^2(\mu^2 + \beta^2 n^2)}{(\mu^2 - m^2)^5}, \quad S_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{n+\nu}] \frac{\nu^2(m^2 + \beta^2 \nu^2)}{(\nu^2 - n^2)^5}, \\ S_3 = \sum_{\mu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{m+\mu}] \frac{\mu^2}{(\mu^2 - m^2)^5}, \quad S_4 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{n+\nu}] \frac{\nu^2}{(\nu^2 - n^2)^5}, \\ S_5 = \sum_{\mu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{m+\mu}] \frac{\mu^2}{(\mu^2 - \beta^2 n^2)(\mu^2 - m^2)^5}, \quad S_6 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{n+\nu}] \frac{\nu^2}{(m^2 + \beta^2 \nu^2)(\nu^2 - n^2)^5},$$

$$A = \frac{1}{a^2} \left[\kappa(a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 \beta^2) - \frac{1}{2} (1-\nu) \kappa(\kappa+1) (a_1^2 + a_2^2 \beta^2) \right].$$

Szeregi S_1, \dots, S_6 są tak szybko zbieżne, że do ich obliczenia wystarczy dla dowolnych niezbyt dużych m i n przyjąć 3 lub 4 wyrazy.

Siłę krytyczną dla dowolnych m i n wyrazimy w końcu przez szereg potęgowy względem małego parametru:

$$(4.32) \quad N_{0, mn} = \frac{D_0}{a^2} \pi^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \left(1 + \frac{\lambda_{mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)}} \varepsilon + \frac{\lambda_{mn}^{(2)}}{\lambda_{mn}^{(0)}} \varepsilon^2 + \dots \right).$$

5. Przykłady liczbowe

W przypadkach szczególnych wzory (4.27) i (4.30) ulegają znacznemu uproszczeniu; jako pierwszy przykład podamy siłę krytyczną dla płyty wszechstronnie równomiernie

ściskanej stałą siłą N_0 na jednostkę długości brzegu, o zmiennej grubości tylko w kierunku osi x według wzoru

$$(5.1) \quad h = h_0 \left(1 + \varepsilon \frac{x}{a} \right)^\kappa.$$

Wobec tego po przyjęciu $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ otrzymamy

$$(5.2) \quad N_{0,mm} = \frac{D_0}{a^2} \pi^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \kappa \varepsilon + \left[3\kappa(3\kappa-1) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2 m^2} + \frac{(1-\nu)\beta^2 n^2}{(m^2 + \beta^2 n^2)^2} \right) - \frac{1}{12} (1-\nu)\kappa(\kappa+1) \frac{m^2 + n^2}{m^2 + \beta^2 n^2} - \frac{288}{\pi^4} \kappa^2 m^2 S_1 \right] \varepsilon^2 + \dots \right\}.$$

Przechodząc do przykładu liczbowego przyjmijmy ponadto płytę kwadratową o boku a ($\beta = 1$) i liniowo zmiennej sztywności ($\kappa = 1/3$), oraz sposób wyoboczenia odpowiadający ugięciu płyty w jedną półfalę w kierunku osi x i y ($m = 1$, $n = 1$). Współczynnik Poissona $\nu = 0,3$

$$(5.3) \quad N_{0,11} = 2\pi^2 \frac{D_0}{a^2} (1 + 0,500\varepsilon - 0,080\varepsilon^2 + \dots).$$

W drugim przykładzie przyjmijmy płytę prostokątną o stałej grubości ($\kappa = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$) ściskaną wszechstronnie siłami o liniowo zmieniających się natężeniach. Wzór (4.32) ulega tutaj znacznemu uproszczeniu

$$(5.4) \quad N_{0,mm} = \frac{D_0}{a^2} \pi^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\eta_1 \beta^2 n^2 + \eta_2 m^2}{m^2 + \beta^2 n^2} \varepsilon + \left[\frac{1}{4} \delta^2 - \frac{32m^2 n^2}{\pi^4} \left(1 - \frac{1}{2} \delta \right) (\eta_1^2 n^2 \beta^4 S_5 + \eta_2^2 m^2 \beta^{-2} S_6) \right] \varepsilon^2 + \dots \right\}.$$

W przykładzie liczbowym przyjmijmy płytę kwadratową o boku a ($\beta = 1$) ściskaną w kierunku osi x siłą o stałym natężeniu N_0 ($\eta_2 = 0$) oraz w kierunku osi y o natężeniu liniowo zmiennym ($\eta_1 = 1$). Sposób wyoboczenia założymy w postaci ugięcia w jedną półfalę w obu kierunkach (uzasadnione dla płyty kwadratowej) tzn. $m = 1$, $n = 1$. Minimalna siła krytyczna określona jest tu wzorem

$$(5.5) \quad N_{0,11} = 2\pi^2 \frac{D_0}{a^2} (1 - 0,250\varepsilon + 0,061\varepsilon^2 + \dots).$$

W końcu postaramy się określić wpływ ścisłego rozkładu naprężeń na siłę krytyczną powodującą wyoboczenie płyty. Należy w tym celu zauważyć, że jedynie drugi składnik wzoru (4.30) otrzymano wykorzystując współczynniki przy ε^2 we wzorach (3.11). Ponieważ współczynniki te obliczone są w punkcie 3 w sposób nieściły, więc nasza ocena wpływu rozwiązania zagadnienia tarczowego będzie również przybliżona, niemniej pozwoli na wyciągnięcie pewnych wniosków. Do dalszych rozważań przyjmijmy wzór (5.2) uwzględniający tylko zmianę sztywności płyty w jednym kierunku. Błąd procentowy popełniony bez uwzględnienia rozwiązania zagadnienia tarczowego możemy wyrazić wzorem

$$(5.6) \quad B = \frac{W_1}{W_2} \cdot 100\%.$$

gdzie:

$$(5.7) \quad W_1 = \frac{(1-\nu)\kappa(\kappa+1)(m^2+n^2)}{12(m^2+\beta^2n^2)} \varepsilon^2,$$

$$(5.8) \quad W_2 = 1 + \frac{3}{2} \kappa \varepsilon + \left[3\kappa(3\kappa-1) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\kappa^2 m^2} + \frac{(1-\nu)\beta^2 n^2}{(m^2+\beta^2 n^2)^2} \right) - \frac{288}{\pi^4} \kappa^2 m^2 S_1 - W_1 \right] \varepsilon^2.$$

Należy tutaj wobec stosowania metody małego parametru nałożyć ograniczenie na iloczyn $\kappa\varepsilon$, który powinien zapewniać dobrą zbieżność szeregu (5.2). Orientacyjnie założymy, że $|\kappa\varepsilon| \leq 0,2$. Przykładowo ocenimy wielkość błędu (5.6) dla następujących parametrów: $m = 1$, $n = 1$, $\nu = 0,3$:

$$(5.9) \quad B = \frac{5,83 \kappa (\kappa + 1) \varepsilon^2}{1 + 1,500 \kappa \varepsilon + (2,305 \kappa^2 - 1,009 \kappa) \varepsilon^2} \%.$$

Dla $\varepsilon = -0,5$ i $\kappa = 0,4$ $B = 1,04\%$; dla $\varepsilon = 0,5$ i $\kappa = 0,4$ $B = 0,63\%$, dla $\varepsilon = -0,2$ i $\kappa = 1,0$ $B = 0,62\%$.

Wyniki powyższe pozwalają wnioskować, że w problemach stateczności płyt o zmiennej sztywności, rozwiązywanych metodami przybliżonymi, nie ma potrzeby określać rozkładu sił podłużnych i stycznych w płycie rozwiązując równanie (2.4). Wystarczy przyjąć rozkład tych sił wynikający z rozwiązania zagadnienia tarczowego dla płyty o stałej grubości. W przypadkach szczególnych, gdy obciążenie na brzegach przeciwległych płyty jest taką samą funkcją stałą lub liniową, a obciążenie styczne jest stałe, można przyjąć rozkład sił podłużnych i stycznych w płycie taki sam jak na brzegach. Błąd wynikający ze stosowania metod przybliżonych będzie zapewne większy niż wynikający z uproszczenia zagadnienia tarczowego lub pominięcia go.

6. Uwagi końcowe

W pracach cytowanych we wstępie pomijano zmienny rozkład sił wewnątrz płyty o zmiennej sztywności, istniejący nawet w przypadkach, gdy obciążenie na brzegach jest stałe. W niniejszej pracy podjęto próbę określenia wpływu rozwiązania zagadnienia tarczowego na problem stateczności płyty prostokątnej wszechstronnie ściskanej liniowo zmiennymi siłami. Z uwagi na złożoność problemu zastosowano w zagadnieniu tarczowym metodę małego parametru oraz w zagadnieniu stateczności metodę rachunku zaburzeń (specjalną postać metody małego parametru) uzyskując rozwiązania nadające się do bezpośredniego stosowania praktycznego w przypadkach niewielkich zmian grubości płyty lub niewielkich zmian modułu Younga.

Na zakończenie pragnę wyrazić wdzięczność prof. dr Michałowi ŻYCZKOWSKIEMU za pomoc w wykonaniu tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. M. BANASIAK, *Zagadnienie utraty stateczności płyt prostokątnych o zmiennej liniowo grubości*, praca doktorska Łódź 1964.
2. D. BŁOCHINCEW, *Podstawy mechaniki kwantowej*, PWN W-wa 1954.
3. A. SZ. BOŻENOW, *Stijkiest kwadratnoj plastinki zminnoj tolszcziny stisnutoj w dwoch napriamkach*, Prikl. mech., 6, 10 (1964), 638–631.
4. E. FERMI, *Notes on Quantum Mechanics*, Chicago Press, 1960.

5. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sprężystej i sprężystoplastycznej stateczności płyt kolowych o zmiennej sztywności metodą odwrotną* Rozpr. Inżyn. 3, **13** (1965), 587–622.
6. A. GAJEWSKI, *Pewne rozwiązania ściśle problemu stateczności płyt o zmiennej sztywności*, Arch. Inżyn. Łądown. 3, **11** (1965), 443–458.
7. Z. KACZKOWSKI, *Statics of non-homogeneous rectangular plates and discs*, Non-homogeneity in elasticity and plasticity, Symposium, Warsaw, 1958, Perg. Press, 1959, 77–82.
8. L. LANDAU, E. LIFSZIC, *Mechanika kwantowa*, PWN, W-wa 1958.
9. M. SOKOŁOWSKI, *Zastosowania metody małych parametrów w zagadnieniach płyt*, Arch. Mech. Stos., 3, **5** (1953), 415–436.
10. W. H. WITTRICK, C. H. ELLEN, *Buckling of tapered rectangular plates in compression*, Aeronaut. Quart. 4, **13** (1962), 308–326.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Широко применяемый в квантовой механике метод возмущений, используется в настоящей работе для решения устойчивости пластинок переменной жесткости.

После общей постановки вопроса, в третьей части работы представлено решение, по методу малого параметра, задачи о плоском напряженном состоянии свободно опертой, прямоугольной пластинки переменной толщины по формуле (2.2), под действием нагрузки, определенной формулой (2.1).

В четвертой части, даются общие формулы для первой и второй поправок собственного значения λ уравнения (4.5), полученные при использовании метода возмущений. Эти формулы применяются для определения критической силы в рассматриваемой задаче об устойчивости пластинки. Результаты иллюстрируются числовыми примерами. В заключение, на частных примерах, определяется относительная погрешность решений вопроса об устойчивости пластинок с переменной жесткостью, основанных на пренебрежении безмоментным напряженным состоянием.

S u m m a r y

THE APPLICATION OF THE PERTURBATION METHOD IN STABILITY PROBLEMS OF
RECTANGULAR PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

The perturbation method widely applied in quantum mechanics is used to solve stability problems of some rectangular plates with variable rigidity.

After the general formulation of the problem, in the third part of the study the case of plane elastostatic problem of a simply supported rectangular plate with variable thickness has been solved by the method of small parameter, according to the formula (2.2.) with loading (2.1).

In the fourth part the general formulas for the first and second correction of eigenvalue λ (critical load) of equation (4.5) obtained by means of perturbation methods are given. They are also used for calculation of critical load of the investigated problem of plate stability. The results are illustrated by the numerical examples. At the end a percentage error which appears in solutions of stability problems of plates with variable rigidity without taking into account the effect of plane elastic problem is described.

KATEDRA FIZYKI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1966 r.