

## OCENA NAJWIĘKSZYCH NAPRĘŻEŃ W WIEŃCU ŁOPATEK

M. A. GLIŃSKA, L. ŁUKASZEWSKA, J. ODERFELD, E. PLESZCZYŃSKA  
(WARSZAWA)

### 1. Zagadnienie techniczne

Na tarczy turbiny jest  $N$  łopatek, nominalnie jednakowych, równomiernie rozstawionych i jednakowo osadzonych.

Zmieniając stopniowo prędkość obrotową turbiny obserwujemy, że w łopatkach występują drgania o postaci i amplitudzie zależnej w złożony sposób, między innymi, od tej prędkości, od warunków eksploatacyjnych (np. temperatury), od wyboru punktu obserwacji na łopatkach, od nieuniknionych różnic między poszczególnymi łopatkami (np. materiał, odchyłki wykonawcze łopatki i jej osadzenie) itd. Drgania powodują wystąpienie naprężeń w łopatkach i ostatecznym celem postępowania jest stwierdzenie, czy naprężenia te nie przekraczają dopuszczalnych, w żadnym punkcie żadnej z  $N$  łopatek.

Aby zmniejszyć liczbę zmiennych parametrów można, na przykład, (opieramy się na pracy ŁAPIŃSKIEGO [1]) ustalić punkt pomiaru; zwykle lokuje się go w 1/3 wysokości łopatki, blisko krawędzi splotu. Na  $n$  łopatkach spośród łącznej liczby  $N$  przykleja się w wybranych punktach tensometry oporowe, które w znany sposób pozwalają rejestrować zmienne naprężenia w funkcji czasu.

Dla dalszych rozważań ważna jest okoliczność, że  $n$  jest liczbą dużo mniejszą od  $N$ . Powody tego są natury technicznej; wymienimy z nich tylko niektóre: trudność komunikacji, to jest przenoszenia impulsów elektrycznych z wirujących tensometrów do nieruchomej aparatury mierniczej i trudna technologia klejenia tensometrów.

Turbinie nadaje się taką prędkość obrotową, żeby amplitudy naprężeń były możliwie duże (rezonans) i rejestruje się je. Oznaczmy przez  $X$  zmienną losową zdefiniowaną jako amplituda naprężeń w opisanych warunkach. Otrzymujemy więc ciąg wielkości doświadczalnych  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Na tej podstawie należy sformułować orzeczenie o nieznannej największej amplitudzie  $x_N^{\max}$  na zbiorze wszystkich  $N$  łopatek. Oczywiście orzeczenie to może mieć tylko charakter probabilistyczny, ujawniony lub nieujawniony.

ŁAPIŃSKI [1] cytuje, między innymi, regułę nie wymienionego autora, który zaleca przy  $n = 5, 6, 7$  przyjmować po prostu

$$\hat{x}_N^{\max} = x_n^{\max} k,$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem empirycznym wynoszącym od 1,25 do 1,35;  $x_n^{\max} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $\hat{x}_N^{\max}$  jest oszacowaniem  $X_N^{\max}$ . Warunki, w których ta reguła jest

przydatna i związane z nią prawdopodobieństwo niedoceny naprężeń rzeczywistych nie były podane.

W pracy [1] jest również wzmianka o metodzie zaproponowanej przez K. R. NAIRA (danych bibliograficznych pracy Naira nie udało się ustalić) i opartej na założeniu rozkładu logarytmo-normalnego zmiennej losowej  $X$ , z czego można znaleźć rozkład przybliżony skrajnej statystyki pozycyjnej  $X_N^{\max}$ , której wartość oznaczamy przez  $x_N^{\max}$ . Istotnym etapem w tej metodzie jest znalezienie takiej najmniejszej liczby  $x_0$ , żeby można było z zadaniem prawdopodobieństwem  $P$  powiedzieć, że  $x_N^{\max} < x_0$ . Korzysta się przy tym z pomocniczego prawdopodobieństwa  $P_1 = 1 - [(1-P)/(N-n)]$ . Wzór na  $P_1$  budzi pewne wątpliwości, bo traci on sens, gdy  $n \rightarrow N$  i nie wiadomo, w jakim zakresie wolno go stosować. Metoda ta jest metodą przybliżoną; nie są nam znane konsekwencje jej stosowania. W pracy [1] podano jedynie sposób przeprowadzania rachunków.

Z pracy [1] notujemy jeszcze interesującą wskazówkę, że rozkład zmiennej losowej  $X$  jest rzeczywiście zbliżony do logarytmo-normalnego. W pewnym przypadku Łapiński otrzymał doświadczalny rozkład  $\log_{10} X: N(2,9689; 0,0635)$  (na podstawie tabeli 2 pracy [1]).

Ze względu na znaczenie techniczne zagadnienia, o które kilkakrotnie w ostatnich latach mieliśmy zapytania ze strony przemysłu turbinowego, postanowiliśmy zbadać sprawę gruntownie. Ponieważ metody analityczne zawiodły, zdecydowaliśmy się na modelowanie na maszynie cyfrowej.

Czytelnik zainteresowany tylko odpowiedzią praktyczną może znaleźć ją w punkcie 5.

## 2. Sformułowanie orzeczenia statystycznego

Przyjmujemy założenie, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład logarytmo-normalny z nieznaną średnią  $m_x$  i nieznanym odchyleniem standardowym  $\sigma_x$ . Amplitudy naprężeń łopatek zamocowanych na turbinie są  $N$ -elementową próbką prostą pobraną z populacji o tym rozkładzie. Inaczej mówiąc, każda amplituda jest zmienną losową  $X_i$  o takim samym rozkładzie, jak  $X$ . Zmienne losowe  $X_i$  są niezależne. Ustalamy  $n < N$ . Oznaczamy  $X_N^{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} X_i$ ,  $X_n^{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

Zbudujemy zmienną losową  $G_\alpha$  jako funkcję argumentów  $X_1, X_2, \dots, X_n$  w taki sposób, żeby dla każdej pary dodatnich rzeczywistych liczb  $(m_x, \sigma_x)$  spełniony był warunek

$$(2.1) \quad P(X_N^{\max} < G_\alpha) = 1 - \alpha,$$

gdzie  $\alpha$  jest dowolnie wybraną małą liczbą (np. 0,05). Przy tym w przepisie funkcyjnym funkcji  $G_\alpha$  nie powinny występować nieznanne nam wartości  $m_x$  i  $\sigma_x$  (natomiast rozkład  $G_\alpha$  i rozkład  $X_N^{\max}$  zależą od  $m_x$  i  $\sigma_x$ ).

Wartość  $g_\alpha$  zmiennej losowej  $G_\alpha$  obliczamy znając  $x_1, \dots, x_n$  z pomiarów na badanej turbinie. Na podstawie  $g_\alpha$  można wydać orzeczenie o wartości  $x_N^{\max}$  zmiennej losowej  $X_N^{\max}$  stwierdzające, że  $x_N^{\max} < g_\alpha$ . Zgodnie z (2.1) frakcja błędnych orzeczeń średnio jest równa  $\alpha$ .

Konstrukcją zmiennej losowej  $G_\alpha$  zajmiemy się w rozdziale 3. Obecnie zastanowimy się nad konsekwencjami stosowania takich orzeczeń w praktyce.

Zazwyczaj praktyk chciałby porównać  $x_N^{\max}$  z dopuszczalną amplitudą naprężeń  $a$ . Chciałby więc uzyskać orzeczenie: « $x_N^{\max} < a$ » lub « $x_N^{\max} > a$ ». W pierwszym przypadku uznałby, że może nie interweniować, w drugim przypadku uznałby za konieczną interwencję polegającą, na przykład, na wymianie łopatek. Jeśli orzeczenia te są uzyskane na drodze rozważań statystycznych, mogą się zdarzać pomyłki polegające na wydaniu pierwszego orzeczenia, gdy  $x_N^{\max} > a$ , lub wydaniu drugiego orzeczenia, gdy  $x_N^{\max} < a$ . Błąd I rodzaju powoduje powstanie strat przy eksploatacji turbiny, a nawet niebezpieczeństwo. Błąd II rodzaju powoduje koszty wynikłe z niepotrzebnej interwencji.

Wyznaczona przez nas wartość  $g_\alpha$  majoryzująca  $x_N^{\max}$  może być bądź mniejsza, bądź większa od  $a$ . Przypuśćmy, że postanawiamy nie interweniować, jeśli  $g_\alpha < a$ , natomiast interweniować, jeśli  $g_\alpha > a$ . Wobec tego na mocy (2.1) prawdopodobieństwo błędnego braku interwencji oczywiście nie przekroczy  $\alpha$ . Natomiast prawdopodobieństwo zbędnej interwencji może przy takim postępowaniu być bardzo duże, a nie można podać jego oszacowania, jeśli nie zna się wartości  $m_x$  i  $\sigma_x$ , co założono. Ta uwaga krytyczna odnosi się nie tylko do naszej metody. Niepewność w orzeczeniu jest konsekwencją skąpej informacji doświadczalnej i nie można usunąć jej żadnymi operacjami matematycznymi.

### 3. Konstrukcja zmiennej losowej $G_\alpha$

Można by rozpatrywać problem optymalnej konstrukcji zmiennej losowej  $G_\alpha$  przyjmując któryś ze znanych modeli statystycznej teorii decyzji. Ze względu na wielkie trudności, jakie nastęrcza rozwiązywanie takich problemów, oraz arbitralność wyboru modelu (np. wyboru funkcji charakteryzującej straty itp.) odrzucono tę drogę postępowania. Zmienna losowa  $G_\alpha$ , której konstrukcję opiszemy, jest tylko jedną z dopuszczalnych funkcji argumentów  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , to znaczy spełnia warunek (2.1) i nie zależy od  $m_x$  i  $\sigma_x$ .

Oznaczmy:  $Y_i = \log_c X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) (dla dowolnie ustalonej dodatniej liczby  $c$ ),  
 $Y_N^{\max} = \log_c X_N^{\max}$ ,  
 $Y_n^{\max} = \log_c X_n^{\max}$ ,

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2}{n} \right)},$$

$$U = \frac{Y_N^{\max} - Y_n^{\max}}{S_n}.$$

Zmienne losowe  $Y_i$  mają z założenia jednakowe rozkłady normalne o nieznanym parametrach  $m_y$  i  $\sigma_y$ . Rozkład zmiennej losowej  $U$  nie zależy od  $m_y$  i  $\sigma_y$ , jest więc jednakowy przy wszelkim rozkładzie normalnym zmiennej losowej  $\log_c X$ . Gdy  $Y_N^{\max} = Y_n^{\max}$ , to  $U = 0$ , przy czym  $P(U = 0) = n/N$ . Dla  $u > 0$  rozkład  $U$  jest ciągły.

Jeśli więc  $n/N < 1 - \alpha$ , to istnieje dodatnia liczba rzeczywista  $u_\alpha$  taka, że

$$(3.1) \quad P(U < u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Będziemy odtąd zakładać, że  $n/N < 1 - \alpha$ , takie bowiem tylko przypadki są w praktyce interesujące.

Tak zdefiniowana wielkość  $u_\alpha$  zależy od  $\alpha$ ,  $N$ ,  $n$ . Pełne oznaczenie byłoby  $u_{\alpha, N, n}$ ; dla wygody pomijamy oczywiste symbole  $N$ ,  $n$  w indeksie.

Definiujemy funkcję  $G_\alpha = X_n^{\max} \cdot c^{u_\alpha \cdot S_n}$ . Jej argumentami są więc  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ; ponadto  $G_\alpha$  nie zależy od  $m_x$  i  $\sigma_x$ . Pokażemy, że  $G_\alpha$  spełnia warunek (2.1).

Z definicji  $U$  oraz  $u_\alpha$  wiadomo, że

$$P\left(\frac{Y_N^{\max} - Y_n^{\max}}{S_n} < u_\alpha\right) = 1 - \alpha,$$

a stąd

$$P(Y_N^{\max} < Y_n^{\max} + S_n u_\alpha) = 1 - \alpha,$$

czyli

$$P(X_N^{\max} < X_n^{\max} c^{S_n u_\alpha}) = 1 - \alpha, \text{ cbdo.}$$

Rozkład zmiennej losowej  $U$  nie jest znany (zwracamy uwagę, że w mianowniku wyrażenia definiującego  $U$  występuje odchylenie standardowe z  $n$ -elementowej próbki). Wątpimy zresztą, czy rozkład ten daje się wyrazić w postaci wyraźnej. Można natomiast łatwo dla różnych  $n$  i  $N$  wyznaczyć rozkład empiryczny  $U$  posługując się maszyną cyfrową. Przyjmujemy mianowicie, że niezależne zmienne losowe  $Y_i$  mają jednakowe rozkłady normalne  $N(0,1)$ , gdyż wybór parametrów nie wpływa na wartość zmiennej losowej  $U$ . Generujemy  $N$  wartości tych zmiennych losowych, obliczamy wartość  $u$  i zaliczamy ją do odpowiedniej klasy w zbiorze wartości zmiennej losowej  $U$ . Postępowanie to powtarzamy  $k$  razy. Zwykle im większe  $k$ , tym rozkład empiryczny mniej różni się od teoretycznego.

Na podstawie rozkładu empirycznego nie możemy jednak znaleźć dokładnie wartości  $u_\alpha$  występującej w definicji  $G_\alpha$ . Wobec tego zdefiniujemy obecnie wielkość  $\hat{u}_\alpha$  [(nieco inaczej, niż  $u_\alpha$  za pomocą wzoru (3.1)]. Rozpatrujemy ciąg  $\{u_j\}$  górnych klas w rozkładzie empirycznym  $U$ . Przez  $\hat{u}_\alpha$  oznaczamy najmniejszą liczbę w ciągu  $\{u_j\}$  spełniającą warunek:

$$(3.2) \quad P[P(U < u_j) \geq 1 - \alpha] \geq 0,99.$$

Wielkość 0,99 jest tu wybrana arbitralnie. Ponieważ jest bliska 1, to nierówność  $P(U < \hat{u}_\alpha) \geq 1 - \alpha$  będzie spełniona z praktyczną pewnością.

Zmienna losowa  $\hat{u}_\alpha$  jest funkcją nie tylko argumentów  $n$  i  $N$ , lecz także zależy od wyboru ciągu  $\{u_j\}$  oraz od  $k$  i wartości dystrybuanty empirycznej.

Oznaczmy  $p_j = P(U < u_j)$  i niech  $\hat{p}_j$  oznacza wartość dystrybuanty empirycznej w punkcie  $u_j$ . Na podstawie prawa wielkich liczb Bernoulli'ego  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(|\hat{p}_j - p_j| < \epsilon) = 1$ . Jeśli oznaczymy przez  $\delta$  maksymalną długość klasy w rozkładzie empirycznym, to prawdopodobieństwo, że wielkość  $\hat{u}_\alpha$  różni się od wielkości  $u_\alpha$  więcej niż o  $\delta$ , dąży do zera przy  $k \rightarrow \infty$ .

Opiszemy szczegółowo sposób wyznaczania  $\hat{u}_\alpha$  przy ustalonych  $n$ ,  $N$ ,  $k$ ,  $\{u_j\}$ . Niech  $q_j$  oznacza granicę takiego przedziału ufności dla  $p_j$ , że  $P(p_j > q_j) = 0,99$ . Wiadomo (patrz np. [2]), że w przybliżeniu

$$q_j = \frac{k\hat{p}_j + 2,705 - 1,163 \sqrt{5,41 + 4k\hat{p}_j(1 - \hat{p}_j)}}{k + 5,41}.$$

Wzór ten wyprowadzony jest przy założeniu, że rozkład dwumianowy aproksymuje się rozkładem normalnym, co jest uzasadnione przy dużych wartościach  $k$  (np. przy  $\alpha = 0,01$   $k$  powinno być większe od 1000). W przeciwnym razie trzeba korzystać z dokładnych wzorów, podanych np. w [3]. Poszukujemy więc w rozkładzie empirycznym klasy o numerze  $j$  takiej, że  $q_j \geq 1 - \alpha$ , a  $q_{j-1} < 1 - \alpha$ . Górną granicę  $j$ -tej klasy oznaczamy  $\hat{u}_\alpha$ .

U w a g a: Dla  $p_j$  można było również zbudować przedział dwustronny; to jednak prowadziło do wartości  $\hat{u}_\alpha$  nie mniejszych niż wynikają z opisanego postępowania, a więc nie byłoby pożyteczne.

Niech  $\hat{G}_\alpha = X_N^{\max} c^{S_n \hat{u}_\alpha}$ . Zmienna losowa  $\hat{G}_\alpha$  spełnia warunek

$$(3.3) \quad P[P(X_N^{\max} < \hat{G}_\alpha) \geq 1 - \alpha] \geq 0,99.$$

Warunek (3.3) można nazwać probabilistycznym odpowiednikiem warunku (2.1). Zastąpienie warunku (2.1) warunkiem w rodzaju (3.3) jest konieczne w przypadku znajdowania rozkładu empirycznego.

W punkcie 4 podamy otrzymane wartości  $\hat{u}_\alpha$  dla wybranych wartości  $n, N, \alpha$ . Obecnie powrócimy jeszcze do zagadnienia wyboru  $G_\alpha$ .

Łatwo zauważyć, że można budować dowolnie wiele zmiennych  $G_\alpha$  spełniających warunek (2.1) opierając się na zmiennych losowych o konstrukcji podobnej do  $U$ , a więc na przykład:

$$U' = \frac{Y_N^{\max} - Y_n^{\max}}{Y_n^{\max} - Y_n^{\min}},$$

gdzie  $Y_n^{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} Y_i$ . Rozkład  $U'$  również nie zależy od  $m_y$  i  $\sigma_y$ , a więc jest jednakowy przy wszelkim rozkładzie normalnym zmiennej losowej  $\log_c X$ .

Wybór między zmiennymi losowymi  $G_\alpha$  a  $G'_\alpha$  zbudowanymi na podstawie  $U$  i  $U'$  nastęrcza podobne trudności pozamatematyczne, jak wyznaczenie optymalnej zmiennej losowej  $G_\alpha$ , toteż nie będziemy tego omawiać dokładnie. Wydaje się jednak, że prawdopodobieństwo błędnej decyzji interwencji przy dowolnych ustalonych  $a, n, N, \alpha$  powinno być większe przy  $G'_\alpha$  niż przy  $G_\alpha$ , gdyż mianownik wyrażenia  $U'$  ma większą wariancję niż mianownik wyrażenia  $U$ . Z tego powodu zdecydowaliśmy się na zmienną losową  $G_\alpha$ .

Zauważmy jeszcze, że jeśli dowolna zmienna losowa  $G_\alpha$  spełnia warunek (2.1), to dla każdego  $\varepsilon > 0$  również zmienna losowa  $G_\alpha + \varepsilon$  spełnia ten warunek. Prawdopodobieństwo błędnej decyzji interwencji przy dowolnych ustalonych  $a, n, N, \alpha$  dla zmiennej losowej  $G_\alpha + \varepsilon$  jest oczywiście nie malejącą funkcją  $\varepsilon$ . Toteż wydaje się słuszne uzupełnienie warunku (2.1) następującym warunkiem:

Dla każdego  $\varepsilon > 0$

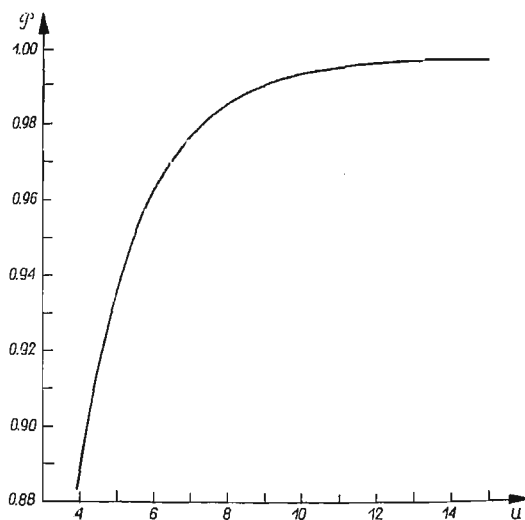
$$(3.4) \quad P(X_N^{\max} < G_\alpha - \varepsilon) < 1 - \alpha.$$

Ze względu na definicję  $u_\alpha$  za pomocą wzoru (3.1), zmienna losowa  $G_\alpha$ , której konstrukcję przedstawiono w tej pracy, spełnia oczywiście warunek (3.4).

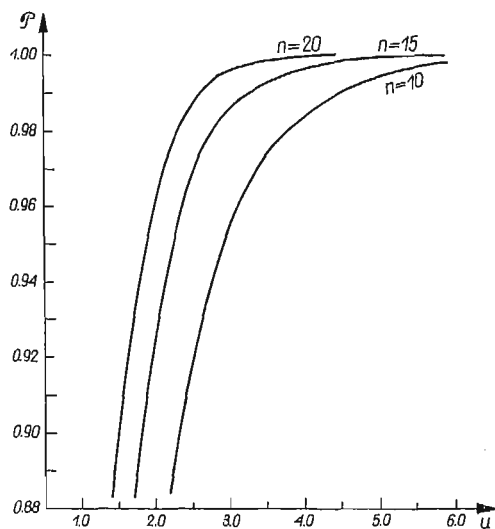
Dla zmiennej losowej  $\hat{G}_\alpha$  zdefiniowanej za pomocą  $\hat{u}_\alpha$  nie będziemy wprowadzać odpowiednika warunku (3.4), gdyż miałby on dość skomplikowaną postać, uwzględniającą opisaną wyżej zbieżność  $\hat{u}_\alpha$  do  $u_\alpha$  przy  $k \rightarrow \infty$  i  $\delta \rightarrow 0$ .

4. Rozkład empiryczny  $U$ 

Na maszynie cyfrowej GIER wyznaczono dystrybuanty empiryczne  $U$  dla  $N = 80$ ,  $n = 5, 10, 15, 20$ . Za każdym razem generowano  $k = 3000$  wartości zmiennej losowej  $U$



Rys. 1



Rys. 2

budowano rozkład empiryczny. Wykresy dystrybuant empirycznych przedstawiono na rysunkach 1 i 2 (dla wartości dystrybuant poczynając od 0,88). Na podstawie tych wykresów obliczono (tablica 1) wartości  $\hat{u}_\alpha$  zdefiniowane za pomocą (3.2).

Tablica 1. Wartości  $\hat{u}_\alpha$  dla  $N = 80$ 

$n \backslash \alpha$	0,10	0,05	0,01
5	4,50	5,80	10,10
10	2,45	3,10	5,00
15	1,90	2,40	3,75
20	1,60	2,00	2,80

Z tablicy widać, że dla ustalonego  $\alpha$  wartości  $\hat{u}_\alpha$  szybko rosną, gdy  $n$  maleje. Znaczy to, że oszczędność na eksperymencie (zmniejszenie  $n$ ) zmusza do bardzo ostrożnego szacowania górnego ograniczenia naprężeń.

W niniejszej pracy ustaliliśmy  $N = 80$ . Można by ułożyć tablice podobne do tablicy 1 dla innych wartości  $N$ . Nie zrobiliśmy tego tylko ze względu na koszt obliczeń. Dla orientacji podajemy, że przy wykorzystaniu programów, którymi obecnie dysponujemy, przewidywany czas maszyny GIER na tablicę podobną do tablicy 1 wynosi około 6 godzin.

### 5. Zastosowanie

Dla wygody Czytelnika zainteresowanego tylko aspektem praktycznym zbieramy reguły stosowania.

Ustalić  $N$ ,  $n$ ,  $\alpha$  (nasze wyniki liczbowe ograniczają wybór do  $N = 80$ ;  $n = 5, 10, 15, 20$ ;  $\alpha = 0,10, 0,05, 0,01$ ).

Zmierzyć  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Obliczyć:  $y_i = \log_{10} x_i$ ;  $\sum_1^n y_i$ ;  $\sum_1^n y_i^2$ ;  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_1^n y_i$ ;  $\bar{y}^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n y_i^2$ ;

$$s_n = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2}.$$

Z tablicy 1 odczytać  $u_\alpha$ .

Obliczyć  $\log_{10} \hat{g}_\alpha = \log_{10} x^{\max} + s_n \cdot u_\alpha$ ,  $\hat{g}_\alpha$ .

Wydać orzeczenie  $x_N^{\max} < \hat{g}_\alpha$ .

Przykład. Ustalono  $N = 80$ ,  $n = 10$ ,  $\alpha = 0,05$ . Zmierzono  $x_i$  w  $\text{kG cm}^{-2}$  i ułożono tablicę 2.

Tablica 2

$i$	$x_i$	$y_i = \log_{10} x_i$
1	995	2,9978
2	1028	3,0120
3	996	2,9983
4	865	2,9370
5	848	2,9284
6	957	2,9809
7	892	2,9504
8	913	2,9605
9	928	2,9675
10	591	2,7716

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 2,905044, & \bar{y}^2 &= 8,70933, \\ s &= \sqrt{8,70933 - 2,905044^2} = 0,0650, \\ \hat{u}_\alpha &= 3,10, \\ \log \hat{g}_\alpha &= 3,0120 + 3,10 \cdot 0,0650 = 3,2135, \\ \hat{g}_\alpha &= 1635, \\ x_{80}^{\max} &< 1635 \text{ kG cm}^{-2}.\end{aligned}$$

Decyzję o dalszym postępowaniu technicznym uzależniamy od porównania  $g_\alpha$  z naprężeniem dopuszczalnym w danych warunkach.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. ŁAPIŃSKI, *Pomiary i obliczenie naprężeń od drgań w łopatkach lotniczych turbin spalinowych*, Technika Lotnicza 1-2 i 3-4 (1961).
2. W. ОКТАВА, *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, Warszawa 1966.
3. A. H. BOWKER, G. J. LIEBERMAN, *Engineering Statistics*, Englewood Cliffs, N. Y. 1960.

#### Резюме

#### ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛОПАТОЧНОМ ВЕНЦЕ

Распределение случайной величины  $X$  является логарифмически нормальным с неизвестными параметрами. Из совокупности с таким распределением производится простая выборка с объемом  $N$ , а из нее, в свою очередь, простая выборка с объемом  $n$ . Обозначим:

$$Y_i = \log_c X_i \quad (i = 1, 2, \dots, N; c > 0); \quad Y_N^{\max} = \log_c X_N^{\max}; \quad Y_n^{\max} = \log_c X_n^{\max},$$

где  $X_N^{\max}$  и  $X_n^{\max}$  соответственно обозначают произвольные вариации, предполагающие значения выборки  $N$  и  $n$ .

Пусть

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n Y_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_1^n Y_i\right)^2}; \quad U = \frac{Y_N^{\max} - Y_n^{\max}}{S_n}.$$

Случайная величина  $U$  не зависит от параметров распределения случайной величины  $X$ .

При помощи моделирования на ЭЦВМ вычислено распределение  $U$  для  $N = 80$ ,  $n = 5, 10, 15, 20$ .

Предлагаемая работа является ответом на следующий, практически важный, вопрос: из числа  $N$  лопаток венца турбины испытанию на максимальное напряжение можно подвергнуть лишь  $n$  лопаток; что можно сказать о наибольшем максимальном напряжении в неиспытанных лопатках.

#### Summary

#### ESTIMATION OF MAXIMUM STRESSES IN TURBINE BLADES

The random variable  $X$  has a logarithmic normal distribution with unknown parameters. From this population a simple sample of the size  $N$  has been taken, and from it—a simple sample of size  $n$ . Let

$$Y_i = \log_c X_i \quad (i = 1, 2, \dots, N; c > 0); \quad Y_N^{\max} = \log_c X_N^{\max}; \quad Y_n^{\max} = \log_c X_n^{\max};$$

where  $X_N^{\max}$  and  $X_n^{\max}$  denote the random variable assuming the largest value in the samples of the  $N$  and  $n$ , respectively.

Let

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n Y_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_1^n Y_i\right)^2}; \quad U = \frac{Y_N^{\max} - Y_n^{\max}}{S_n}.$$



The random variable  $U$  is independent of parameters in the distribution of the variable  $X$ .

Using a computer, the distributions of  $U$  for  $N = 80$ ,  $n = 5, 10, 15, 20$  have been determined.

The paper presents a solution of the following technological problem: out of  $N$  blades of a turbine disc only  $n$  blades can be tested for maximum stress. The question arises what can be said about maximum stress in the blades not subjected to experimental investigation.

INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1967 r.*

---