

DEKREMENT DRGAŃ TŁUMIONYCH JEDNOCZEŚNIE TARCIEM WEWNĘTRZNYM
(WISKOTYCZNYM) I KONSTRUKCYJNYM

ZBIGNIEW OSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przy badaniach tarcia wewnętrznego tworzyw stosuje się często zamocowanie próbki w uchwycie. Występuje wtedy tak zwane tarcie konstrukcyjne. Tłumienie drgań w tym przypadku jest wynikiem zarówno tarcia wewnętrznego jak też tarcia w zamocowaniu. Dla eksperymentatora badającego tarcie wewnętrzne jest wtedy rzeczą istotną zapewnienie warunków sprowadzających wpływ tarcia konstrukcyjnego do minimum. Aby zdać sobie sprawę z tych warunków, przeprowadzimy teoretyczną analizę tłumienia drgań swobodnych przy jednoczesnym tłumieniu konstrukcyjnym i wewnętrznym. Drgania swobodne z uwzględnieniem tylko tarcia konstrukcyjnego opisane zostały w pracach [1 i 2]. Przyjmijmy tu układ badany w tych pracach oraz te same założenia dotyczące tarcia konstrukcyjnego. Schemat podstawowy przy rozciąganiu próbki i drganiach postępowych masy przedstawiony jest na rys. 1. W badaniach tłumienia częściej używane są próbki skręcane. Otrzymujemy wtedy analogiczne równania ruchu zastępując przemieszczenie — kątem skręcania, masę — momentem bezwładności masy, sztywność podłużną — sztywnością skrętną.

W pracach cytowanych wpływ tarcia wewnętrznego był pominięty. W pracy niniejszej przyjmijmy, że próbka wykazuje tłumienie materiałowe o charakterze wiskotycznym, siła tłumienia jest więc zależna od prędkości. Przyjmijmy dla uproszczenia zależność liniową. Tłumienie tarcie wewnętrznym wykazuje cechy nieliniowe (por. np. [3]).

Celem naszym nie jest jednak w tej pracy badanie tarcia wewnętrznego, a tylko rozgraniczenie stanów, w których decyduje bądź tarcie wewnętrzne, bądź tarcie konstrukcyjne. Rozważania przedstawione posłużą nam do przedyskutowania poprawności wyników badań tarcia wewnętrznego.

2. Równanie ruchu

Równanie ruchu masy przedstawionej na rys. 1 możemy napisać w postaci

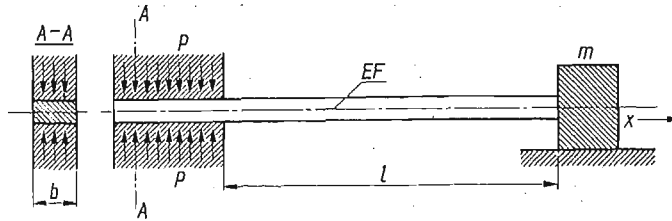
$$(2.1) \quad m\ddot{u} + c\dot{u} = -P,$$

gdzie m oznacza masę, u przemieszczenie masy, c współczynnik tłumienia wewnętrznego, P siłę sprężystości próbki z uwzględnieniem wpływu tarcia w zamocowaniu.

Zgodnie ze wzorami podanymi w pracy [1] zależność między przemieszczeniem u i siłą P w kolejnym $(n+1)$ -szym półokresie drgań można przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad u_{n+1}(P) = u_n(P_n) + \frac{P - P_n}{EF} l + \frac{(P - P_n)^2}{4qEF} \text{sign} \dot{P},$$

gdzie u_{n+1} jest przemieszczeniem w $(n+1)$ -szym półokresie (zmiennie), u_n wartością przemieszczenia w końcu n -tego półokresu, P_n wartością siły w końcu n -tego i początku $(n+1)$ -ego półokresu, EF sztywnością podłużną próbki, l długością swobodną próbki,



Rys. 1

$q = 2\mu pb$ jednostkową siłą tarcia, działającą na powierzchni zamocowania próbki o szerokości b przy nacisku p i współczynniku tarcia μ .

Wprowadzimy zmienną bezwymiarową

$$\eta = \frac{P}{P_n}$$

oraz oznaczenia

$$\xi = \frac{lq}{|P_n|},$$

$\omega_k = \sqrt{\frac{EF}{lm}}$ częstość drgań swobodnych, konserwatywnych w przypadku idealnie sztywnego zamocowania,

$\gamma = \frac{c}{m\omega_k}$ podwójna wartość stosunku współczynnika tłumienia do tłumienia krytycznego.

Wyznaczamy wartości prędkości \dot{u} i przyspieszenia \ddot{u} masy m i przy zastosowaniu wprowadzonych wyżej oznaczeń podstawiamy do równania ruchu (2.1). Po przekształceniach oraz po wprowadzeniu czasu bezwymiarowego $\tau = \omega_k t$ otrzymamy równanie ruchu dla współrzędnej η (bezwymiarowa siła) w postaci:

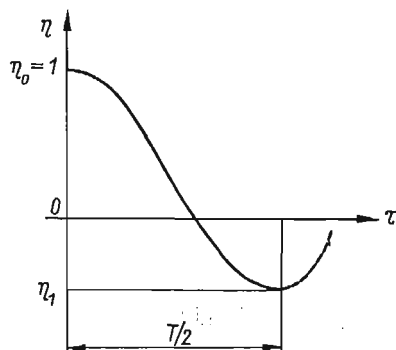
$$(2.3) \quad \ddot{\eta} - \dot{\eta}^2 \frac{1}{2\xi + 1 - \eta} + \gamma \dot{\eta} + \eta \frac{2\xi}{2\xi + 1 - \eta} = 0.$$

Równanie to opisuje dowolny półokres drgań zarówno przy drganiach w prawo jak i w lewo, z tym, że warunki początkowe należy dla każdego półokresu przyjmować $\eta = 1$, $\dot{\eta} = 0$.

Przebieg rozwiązania równania (2.3) przedstawiony jest na rys. 2. Interesuje nas nie sam przebieg rozwiązania, ale przede wszystkim wartość η_1 określająca stosunek siły po

półokresie do siły na początku tego półokresu. Mając wartość η_1 możemy wyznaczyć logarytmiczny dekrement tłumienia zgodnie z określeniem podanym w pracy [1]:

$$(2.4) \quad \delta = \ln \left(-\frac{1}{\eta_1} \right).$$



Rys. 2

3. Rozwiązanie równania

Równanie (2.3) jest nieliniowe. Nie możemy przy tym zakładać małości wyrazów nieliniowych. Do rozwiązania użyto więc maszyny analogowej. Celem obliczeń było ustalenie wpływu tarcia wiskotycznego określonego parametrem γ i tarcia konstrukcyjnego określonego parametrem ξ . Zbadać należy zakres ξ od ~ 0 do ∞ .

Przyjęliśmy dla γ zakres od 0 do 0,8 czyli do 40% wartości tłumienia krytycznego. Obliczenia przeprowadzono na maszynie analogowej Katedry Dynamiki Pojazdów Politechniki w Delft (Holandia). Przyjmując skalę czasu 5 i skalę amplitudy 10 przekształcamy równanie (2.3) na równanie maszynowe o postaci

$$(3.1) \quad -\ddot{x} = -0,1 d\ddot{x} - 0,1 d\dot{x}^2 + 0,04 ex + 0,2b\dot{x} - 0,02 bdx\dot{x}$$

gdzie

$$d = \frac{1}{2\xi + 1}, \quad e = \frac{2}{2\xi + 1}, \quad b = \gamma.$$

Po rozwiązaniu równania wyznaczono dekrement zgodnie ze wzorem (2.4) i rys. 2. Wartości dekrementu dla różnych wartości parametru ξ oraz współczynnika tłumienia wiskotycznego γ zestawione są w tabelicy 1. Charakter zależności dekrementu od wymienionych parametrów ocenić można z rys. 3. Widać wyraźnie, że dla szerokiego zakresu wartości parametru ξ określającego cechy tłumienia w zamocowaniu, dekrement nie jest od niego zależny. W tym zakresie dekrement przyjmuje wartość równą wartości tłumienia wiskotycznego odpowiadającego wartości współczynnika γ . Przy zmniejszaniu się wartości parametru następuje szybki wzrost dekrementu, wywołany tarcie konstrukcyjnym w zamocowaniu. Jeżeli badamy tarcie wewnętrzne, pragniemy uniknąć wpływu tarcia w zamocowaniu na wyniki badań. Błąd wywołany tym wpływem ocenimy określając pro-

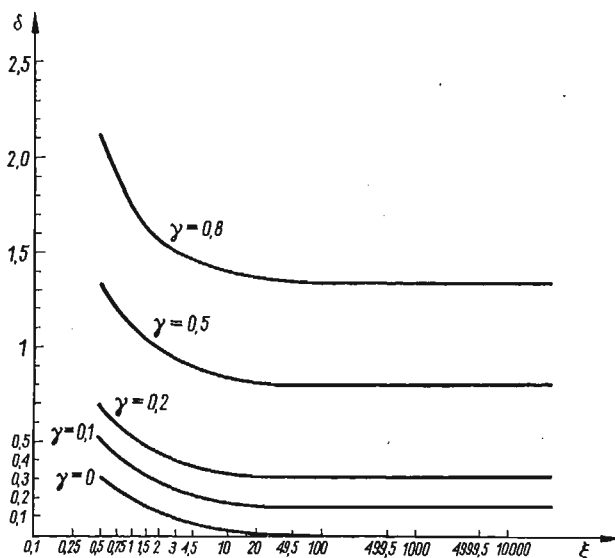
Tablica 1

ξ	δ						Δ			
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,2$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,8$	$\gamma = 0,8$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,2$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,8$
0,5	0,314	0,511	0,673	1,309	2,040	2,040	225,48	112,97	63,63	49,12
0,75	0,247	0,430	0,616	1,188	1,865	1,865	173,89	94,94	48,50	36,33
1,0	0,202	0,381	0,562	1,124	1,750	1,750	142,68	77,84	40,50	27,93
1,5	0,163	0,322	0,494	1,039	1,660	1,660	105,10	56,33	29,88	21,35
2,0	0,128	0,287	0,462	0,994	1,560	1,560	82,80	46,20	24,25	14,04
3,0	0,090	0,242	0,400	0,929	1,514	1,514	54,14	26,58	16,13	10,67
4,5	0,060	0,217	0,386	0,891	1,469	1,469	38,22	22,15	11,38	7,38
10,0	0,025	0,187	0,350	0,840	1,427	1,427	19,11	10,76	5,00	4,31
20,0	0,010	0,162	0,328	0,811	1,386	1,386	3,18	3,80	1,38	1,02
49,5	0,008	0,158	0,316	0,802	1,368	1,368	0,64	0	0,25	0
499,5	0	0,157	0,316	0,800	1,368	1,368	0	0	0	0
4999,5	0	0,157	0,316	0,800	1,368	1,368	0	0	0	0

centowy stosunek przyrostu dekrementu wywołanego tarcie konstrukcyjnym w stosunku do dekrementu wiskotycznego

$$\Delta = \frac{\delta - \delta_w}{\delta_w} \cdot 100\%$$

Wyniki zostały zestawione w tabelcy 1. Analizując je można ocenić minimalną wartość ξ , konieczną dla uniknięcia określonego błędu w ocenie tarcia wiskotycznego (wewnętrzznego). Tak np. jeżeli Δ ma być mniejsze od 5%, to ξ powinno być większe od 17. Aby Δ było mniejsze od 2%, ξ powinno być większe od 30, zaś od 1% ξ powinno być większe od 40. Przy ξ większym od 100 błąd praktycznie jest zerowy.



Rys. 3

Uwagi powyższe pozwalają ocenić wpływ tarcia w zamocowaniu na wyniki badań tarcia wewnętrznego. Weźmy dla przykładu próbkę w postaci pręta o przekroju kołowym zamocowanym jednym końcem z tarczą osadzoną na drugim końcu rys. 4. Układ taki bywa bardzo często stosowany przy badaniu tarcia wewnętrznego. Weźmy pod uwagę następujące dane: $l = 100$ cm, $p = 100$ kG/cm², $\mu = 0,1$, $r = 1$.

Jednostkowy moment tarcia wynika ze wzoru:

$$q = 2\pi p \mu r^2.$$

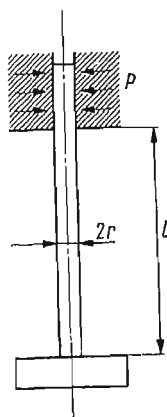
Parametr ξ zaś dla n -tego półokresu:

$$\xi = \frac{2\pi p \mu r^2 l}{|M|},$$

gdzie M oznacza maksymalną wartość momentu skręcającego na początku półokresu. Jeżeli zażądamy, aby błąd oceny tarcia wiskotycznego nie przekraczał 5%, to z warunku iż ξ ma być mniejsze od 17, otrzymamy, że moment maksymalny przy danych warunkach nie powinien przekraczać 370 kGcm.

Przy badaniu drgań o większych amplitudach należałoby odpowiednio zmienić warunki umocowania lub wymiary próbki, np. zwiększyć μ lub p , albo powiększyć długość próbki.

Przedstawione powyżej rozważania oparte są na modelu przybliżonym, jeżeli chodzi o warunki zarówno tarcia wewnętrznego, jak i tarcia w zamocowaniu, toteż wyniki ilo-



Rys. 4

ściowe nie mogą być wprost przeniesione na rzeczywiste układy służące do badania tarcia wewnętrznego. Natomiast ogólny wniosek zachowa swoją poprawność przy przyjęciu bardziej złożonej struktury oporów wewnętrznych i oporów zamocowania. W pewnych zakresach parametrów na tłumienie drgań w stopniu decydującym wpływa tylko tarcie wewnętrzne, w innych zaś decydującą rolę odgrywa tarcie konstrukcyjne w zamocowaniu.

Na fakt ten mało zwracano dotąd uwagi przy badaniu tarcia wewnętrznego, może jednak być on przyczyną wielu rozbieżności w wynikach takich badań prowadzonych przez różne ośrodki. Zjawisko opisane może także wywołać wątpliwości co do poprawności wyników niektórych doświadczeń tego typu. Wydaje się np. że wyniki badań tłumienia wewnętrznego elementów betonowych prowadzone przez SOROKINA [4] mogą być zakwestionowane właśnie z powyższego powodu.

Podane wyżej rozważania mogą mieć także znaczenie dla oceny wpływu tarcia na tłumienie drgań elementów maszyn i budowli. Sprawą dyskusyjną i często poruszaną jest problem, który z mechanizmów rozpraszania energii: opory w zamocowaniu czy opory w materiale gra rolę decydującą. Jak widać z powyższych rozważań zależy to od warunków zamocowania, kształtów elementu i wartości obciążeń. W pewnych warunkach decydującym może okazać się wpływ tarcia wewnętrznego w innych tarcie w zamocowaniu.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. OSIŃSKI, *Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии конструкционного демпфирования*, Известия Академии наук СССР, Мех. и Маш., 5, 1963.
2. Z. OSIŃSKI, *Влияние так называемого трения конструктивного на okres drgań swobodnych układu o jednym stopniu swobody*, Archiwum Budowy Maszyn. 1, 11 (1964).

3. Z. OSIŃSKI, *Próba nieliniowego przedstawienia zjawisk tarcia wewnętrznego i relaksacji*, Rozprawa habilitacyjna, Warszawa 1961.
4. Е. С. СОРОКИН, *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*, Москва 1960.

R e z y u m e

ДЕКРЕМЕНТ ДЕМПФИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ВНУТРЕННИМ
(ВЯЗКИМ) И КОНСТРУКЦИОННЫМ ТРЕНИЕМ

В работе представлено исследование декремента колебаний системы с одной степенью свободы, демпфированных одновременно конструкционным трением в точке закрепления и внутренним трением. Внутреннее трение предполагается, для упрощения, линейно вязким. Уравнение движения решается для широкого диапазона параметров на моделирующей машине. Результаты использовались в качестве основы для оценки влияния конструкционного трения на результаты исследования внутреннего трения. Подтверждается наличие областей, в которых трение в точке закрепления не влияет на результаты исследований внутреннего трения. Определены области, в которых конструкционное трение имеет решающий характер.

S u m m a r y

DAMPING DECREMENT OF VIBRATIONS EFFECTED SIMULTANEOUSLY BY THE
VISCOTIC AND STRUCTURAL FRICTION

Presented are considerations concerning the effect of the structural friction in fittings and viscotic internal friction. The latter is assumed to be linearly viscotic. The equation of motion has been solved on an analog computer for the wide range of parameters. On the basis of numerical results the analysis of the influence of the structural friction on the results of the experimental investigation of the internal friction of materials is given. The analysis shows the existence of ranges of parameters where the structural friction does not affect the results of the experimental investigation of the internal friction. On the other hand, for some ranges the effect of structural friction is very strong.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1967 r.
