

OBLICZANIE TARCZ SIATKOWYCH PRZY WYKORZYSTANIU PRZYBLIŻONEJ TEORII
EFEKTU BRZEGOWEGO

KAZIMIERZ PUSTELNIK (ŁÓDŹ), CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

Wstęp

W pracy [1] zostały podane podstawowe równania tarcz o strukturze siatkowej. Przykładem takich tarcz są płaskie regularne i gęste siatki prętowe, tarcze o gęstej i regularnej perforacji itp. Wyznaczenie stanu naprężenia i przemieszczenia w tarczach o strukturze siatkowej przy stosowaniu ciągłego modelu takich tarcz przedstawionego w [1] wymaga rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych szóstego rzędu. Równania te wykazują analogię do równań płaskiego anizotropowego kontinuum Cosseratów o trzech stopniach swobody (dwie składowe wektora przemieszczenia i lokalny obrót w płaszczyźnie tarczy). W równaniach występuje ponadto mały parametr charakteryzujący «gęstość» siatki przy operatorze różniczkowym rzędu wyższego. Fakt ten umożliwia otrzymanie rozwiązania przybliżonego przez zastosowanie teorii asymptotycznej (gdy mały parametr przyrównamy do zera) oraz efektu brzegowego [2].

Celem poniższej pracy jest przedstawienie przykładu obliczeń tarczy siatkowej w oparciu o teorię asymptotyczną i przy wykorzystaniu efektu brzegowego oraz orientacyjna ocena numeryczna dokładności rozwiązania przybliżonego w zależności od gęstości siatki. Ponadto w pierwszym punkcie pracy zestawiono podstawowe równania teorii korzystając z [2]. Należy zaznaczyć, że oparty na efekcie brzegowym przybliżony sposób obliczania tarcz siatkowych jest daleko prostszy niż przybliżony sposób obliczania płyt siatkowych, wykorzystujący analogiczny efekt zachodzący w płytach [3].

Wszystkie wskaźniki oznaczone literami alfabetu greckiego przebiegają ciąg 1, 2 (obowiązuje konwencja sumacyjna). Przecinek oznacza pochodną kowariantną, a płaszczyzna tarczy jest parametryzowana współrzędnymi krzywoliniowymi x^1, x^2 .

1. Podstawowe równania

Podstawowy układ równań teorii liniowo-sprężystych tarcz o strukturze siatkowej wyrażony w naprężeniach ma postać [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}(\Phi,_{\nu\mu} - \epsilon_{\nu\mu} m^{\alpha}_{,\mu})]_{,\alpha\beta} = 0, \\ & a^2 [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}(\Phi,_{\nu\mu} - \epsilon_{\nu\mu} m^{\alpha}_{,\mu})]_{,\alpha} + \tilde{c}^{\beta\mu} \epsilon_{\beta\mu} m^{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Tutaj $\Phi = \Phi(x^1, x^2)$ jest funkcją naprężeń, $m^e = m^e(x^1, x^2)$ są naprężeniami momentowymi (w przekroju $x^e = \text{const}$), tensory $\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}$ oraz $\tilde{c}^{\beta\mu}$ charakteryzują strukturę geometryczną oraz materiałową tarczy siatkowej, $\epsilon_{\alpha\nu}$ jest dwuwektorem Ricciego, wreszcie a jest parametrem o wymiarze długości małym w porównaniu z wymiarami tarczy. Parametr a charakteryzuje gęstość siatki, natomiast tensory $\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}$ i $\tilde{c}^{\beta\mu}$, których składowe fizyczne mają ten sam wymiar, możemy traktować jako niezależne od gęstości siatki charakteryzującej strukturę geometryczną tarczy. W równaniach (1.1) pominięto siły i momenty masowe. Składowe $p^{\alpha\beta}$ tensora naprężenia wyrażają się wzorem

$$(1.2) \quad p^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\varphi} \epsilon^{\beta\psi} \Phi_{,\psi\varphi} - \epsilon^{\alpha\varphi} m^{\beta}_{,\varphi}.$$

Warunki brzegowe dla układu (1.1) mają postać

$$(1.3) \quad \epsilon^{\pi\varphi} (\epsilon^{\beta\psi} \Phi_{,\psi\varphi} - m^{\beta}_{,\varphi}) n_{\pi} = \hat{p}^{\beta}, \quad m^{\pi} n_{\pi} = \hat{m},$$

przy czym n_{π} są składowymi wektora jednostkowego zewnętrznemu normalnego do brzegu tarczy, \hat{p}^{β} są składowymi wektora gęstości obciążenia brzegu tarczy siłami oraz \hat{m} jest gęstością obciążenia brzegu tarczy momentami.

Założmy, że $\hat{m} = 0$, tj. brzeg siatki jest obciążony tylko siłami. Wtedy dla dostatecznie małych wartości parametru a układ (1.1) możemy zastąpić przybliżonym równaniem przyjmując w (1.1) $a \rightarrow 0$. Zamiast równań (1.1) otrzymamy wtedy

$$(1.4) \quad (\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \Phi_{,\nu\mu})_{,\alpha\beta} = 0, \quad m^e = 0,$$

a warunki brzegowe (1.3) sprowadzą się do

$$(1.5) \quad \epsilon^{\pi\varphi} \epsilon^{\beta\psi} \Phi_{,\psi\varphi} n_{\pi} = \hat{p}^{\beta}.$$

Teorię opisywaną równaniem (1.4) i warunkami brzegowymi (1.5) nazywamy teorią asymptotyczną (lub bezmomentową) tarcz o strukturze siatkowej; jest ona formalnie podobna do teorii tarcz anizotropowych.

Jak wynika z (1.4)₂ i (1.3)₂, teorię asymptotyczną możemy stosować do obliczeń tarcz o strukturze siatkowej wtedy, gdy zachodzi $\hat{m} \equiv 0$, to jest, gdy tarcza nie jest obciążona na brzegu momentami. Gdy $\hat{m} \neq 0$, wtedy uzupełnić należy teorię asymptotyczną (bezmomentową) tzw. efektem brzegowym, ujmującym wpływ obciążeń momentowych \hat{m} , przyłożonych do brzegu tarczy [2]. Teoria asymptotyczna uzupełniona efektem brzegowym pozwala zastąpić rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla układu równań (1.1) rozwiązaniem zagadnienia dla równania (1.4) oraz dla równania efektu brzegowego (wyprowadzonego w [2])

$$(1.6) \quad m^1_{,11} - \frac{\tilde{c}^{22}}{a^2 \tilde{a}^{1212}} m^1 = 0.$$

Równanie (1.6) zostało wyprowadzone przy założeniu, że a) brzeg tarczy pokrywa się z linią parametryczną $x^1 = x^1_{(0)} = \text{const}$, b) linie parametryczne $x^2 = \text{const}$ są prostymi normalnymi do brzegu tarczy i wraz z krzywymi $x^1 = \text{const}$ tworzą układ ortogonalny (parametryzację taką wystarcza wprowadzić tylko w otoczeniu brzegu tarczy); c) w pobliżu brzegu tarcza jest ortotropowa, a kierunki główne ortotropii pokrywają się z liniami para-

metrycznymi $x^\alpha = \text{const}$. Naprężenia momentowe m^2 w teorii efektu brzegowego są określone wzorem [2]

$$(1.7) \quad m^2 = \frac{a^2}{(\tilde{c}^{11})^2} [a^{1111} \tilde{c}^{22} m^1_{,1} + (\tilde{a}^{1111} \tilde{c}^{22} - \tilde{a}^{1122} \tilde{c}^{11}) m^1_{,12}],$$

przy czym pochodne występujące we wzorach (1.6) i (1.7) należy traktować jako pochodne cząstkowe. W ramach teorii efektu brzegowego ściśle rozwiązanie równania (1.6) można zawsze zastąpić asymptotyczną całką tego równania w postaci wzoru

$$(1.8) \quad m^1 = \psi(x^2) \exp[-\sqrt{\zeta}(x^1 - x^1_{(0)})] + \chi(x^2) \exp[\sqrt{\zeta}(x^1 - x^1_{(0)})],$$

w którym

$$(1.9) \quad \zeta \equiv \frac{1}{a^2} \left(\frac{\tilde{c}^{22}}{\tilde{a}^{1212}} \right)_{x^1 = x^1_{(0)}}.$$

We wzorze tym należy przyjąć $\chi \equiv 0$, gdy w obszarze tarczy mamy $x^1 \geq x^1_{(0)}$ lub $\psi \equiv 0$, gdy w obszarze tarczy zachodzi $x^1 \leq x^1_{(0)}$. Wtedy funkcja χ lub ψ jest gęstością obciążenia brzegu tarczy momentami, co wynika bezpośrednio z (1.3)₂ oraz z przyjętej tu parametryzacji. Należy zaznaczyć, że teorię efektu brzegowego tu przedstawioną można stosować tylko wtedy, gdy wskaźnik zmienności obciążenia brzegowego $\hat{m}(x^2)$ jest niewielki [2]

2. Pierścieniowa tarcza siatkowa obciążona na brzegu momentami

Rozważmy tarczę o strukturze siatkowej przedstawionej na rys. 1. Płaszczyznę tarczy parametryzujemy biegunowym układem współrzędnych $\{r, \varphi\}$. Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \text{dla } r = r_w: \quad m^r &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos n\varphi & \text{i} \quad p^{rr} = p^{r\varphi} = 0; \\ \text{dla } r = r_z: \quad m^r &= 0 & \text{i} \quad p^{rr} = 0, \quad p^{r\varphi} = p_z^{r\varphi}. \end{aligned}$$

Niech rozpatrywana tarcza siatkowa będzie siatką utworzoną z prętów. Wtedy, zgodnie z [1], zachodzi

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\beta\mu\nu} &= \sum_{\Delta} (R^{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} t_{\Delta}^{\nu} + \tilde{R}^{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} \tilde{t}_{\Delta}^{\nu}), \\ C^{\alpha\mu} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\mu} \tilde{S}^{\Delta}, \\ R^{\Delta} &= \frac{12(EJ)_{\Delta}}{l_{\Delta}^2 \tilde{l}_{\Delta}}, \quad \tilde{R}^{\Delta} = \frac{(EA)_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, \quad \tilde{S}^{\Delta} = \frac{(EJ)_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}} \end{aligned}$$

gdzie

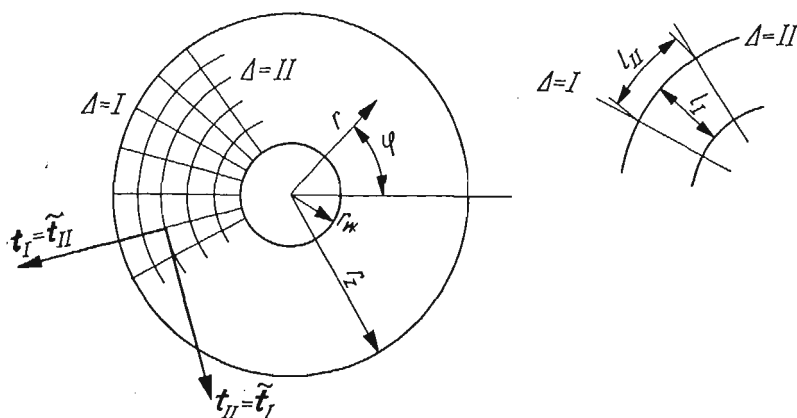
- α, β, μ, ν , są wskaźnikami przebiegającymi ciąg (1, 2).
- $(EA)_{\Delta}$ sztywnością pręta z rodziny Δ na ściskanie (rozciąganie),
- $(EJ)_{\Delta}$ sztywność pręta z rodziny Δ na zginanie,
- l_{Δ} odległości między sąsiednimi prętami z rodziny Δ ,
- \tilde{l}_{Δ} odległości między sąsiednimi węzłami siatki w kierunku Δ ,
- $\tilde{t}_{\Delta}^{\alpha}$ składowe wektora jednostkowego stycznego do pręta z rodziny Δ w układzie $\{x^{\alpha}\} \equiv \{r, \varphi\}$,
- $\tilde{t}_{\Delta}^{\beta}$ składowe wektora jednostkowego normalnego do pręta z rodziny Δ w układzie $\{x^{\alpha}\} \equiv \{r, \varphi\}$.

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami oraz z [2] zachodzą związki:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tilde{a}^{\varphi r \varphi r} &= -r^{-2}(\tilde{R}^I)^{-1}, & \tilde{a}^{r r r r} &= -(R^{II})^{-1}, \\ \tilde{a}^{\varphi \varphi \varphi \varphi} &= -r^{-4}(R^I)^{-1}, & \tilde{c}^{\varphi \varphi} &= -a^2 r^{-2}(\tilde{S}^I)^{-1}, \\ \tilde{a}^{r \varphi r \varphi} &= -r^{-2}(\tilde{R}^{II})^{-1}, & \tilde{c}^{r r} &= -a^2(\tilde{S}^{II})^{-1}. \end{aligned}$$

Pozostałe składowe tensorów $\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}$ i $\tilde{c}^{\beta\mu}$ są równe zero. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że wielkości \tilde{R}^I , \tilde{R}^{II} , R^I , R^{II} , \tilde{S}^I , \tilde{S}^{II} są stałymi. Równanie efektu brzegowego ma wtedy postać

$$(2.4) \quad m^r{}_{,rr} - \frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I} m^r = 0.$$



Rys. 1

Rozwiązanie tego równania przedstawimy w postaci całki (1.8)

$$(2.5) \quad m^r = \psi(\varphi) \exp \sqrt{\frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I}} (r_w - r),$$

a funkcję $\psi(\varphi)$ wyznaczmy z warunku brzegowego (2.1) otrzymując

$$(2.6) \quad m^r = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos n\varphi \exp \sqrt{\frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I}} (r_w - r).$$

Składową m^φ wektora m^α obliczamy z równania (1.7). Równanie to we współrzędnych biegunowych dla rozważanej tarczy przyjmie postać

$$(2.7) \quad m^\varphi = \left(\frac{a}{\tilde{c}^{rr}} \right)^2 \tilde{a}^{r r r r} \tilde{c}^{r r} m^r{}_{,r\varphi} = - \frac{\tilde{S}^{II}}{\sqrt{\tilde{R}^{II} \tilde{S}^I}} \exp \sqrt{\frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I}} (r_w - r) \sum_{n=1}^{\infty} n M_n \sin n\varphi.$$

Funkcję naprężeń Φ wyznaczamy z równania (1.4)₁. Równanie to we współrzędnych biegunowych przyjmuje następującą postać

$$(2.8) \quad (R^{II})^{-1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{(\tilde{R}^{II})^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1}}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{(R^I)^{-1}}{r^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} - \frac{2(\tilde{R}^{II})^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1}}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \varphi^2} + \\ + \frac{2(R^{II})^{-1}}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{2(R^I)^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1} + 2(\tilde{R}^{II})^{-1}}{r^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{(R^I)^{-1}}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{(R^I)^{-1}}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Rozwiązania równania (2.8) poszukujemy w postaci

$$(2.9) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \sin n\varphi.$$

Podstawiając (2.9) do równania (2.8) otrzymujemy

$$(2.10) \quad r^4 (R^{II})^{-1} \frac{d^4 B_n}{dr^4} + 2(R^{II})^{-1} r^3 \frac{d^3 B_n}{dr^3} + r^2 \{n^2 [-(\tilde{R}^{II})^{-1} - (\tilde{R}^I)^{-1}] - (R^I)^{-1}\} \frac{d^2 B_n}{dr^2} + \\ + r \{n^2 [2(\tilde{R}^{II})^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1}] + (R^I)^{-1}\} \frac{dB_n}{dr} + n^4 (R^I)^{-1} + n^2 [-2(R^I)^{-1} - (\tilde{R}^I)^{-1} - 2(\tilde{R}^{II})^{-1}] = 0.$$

Równanie powyższe jest jednorodnym równaniem Eulera, a jego rozwiązanie ma postać

$$(2.11) \quad B_n = \sum_{i=1}^4 B_{ni} r^{k_{ni}},$$

w której B_{ni} są stałymi, a k_{ni} są pierwiastkami następującego równania charakterystycznego:

$$(2.12) \quad (R^{II})^{-1} k_n^4 - 4(R^{II})^{-1} k_n^3 + \{5(R^{II})^{-1} - (R^I)^{-1} - n^2 [(\tilde{R}^I)^{-1} + (\tilde{R}^{II})^{-1}]\} k_n^2 + \\ + \{2(R^I)^{-1} - 2(R^{II})^{-1} + n^2 [3(\tilde{R}^{II})^{-1} + 2(\tilde{R}^I)^{-1}]\} k_n + n^4 (R^I)^{-1} + \\ + n^2 [-2(R^I)^{-1} - (\tilde{R}^I)^{-1} - 2(\tilde{R}^{II})^{-1}] = 0.$$

Tym samym zachodzi

$$(2.13) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^4 B_{ni} r^{k_{ni}} \sin n\varphi.$$

Zgodnie ze wzorem (1.2) składowe stanu naprężenia $p^{\alpha\beta}$ wynoszą

$$(2.14) \quad p^{rr} = \frac{1}{r^2} \Phi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \Phi_{,r} - \frac{1}{r} m^r_{,\varphi} + m^\varphi, \\ p^{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} \Phi_{,r\varphi} + \frac{1}{r^3} \Phi_{,\varphi} - \frac{1}{r} m^\varphi_{,\varphi} - \frac{1}{r^2} m^r, \\ p^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} \Phi_{,rr} + \frac{1}{r} m^\varphi_{,r} + \frac{1}{r^2} m^r.$$

Stałe B_{ni} wyznaczamy z warunków brzegowych dla obciążeń brzegów tarczy siłami otrzymując następujący układ równań

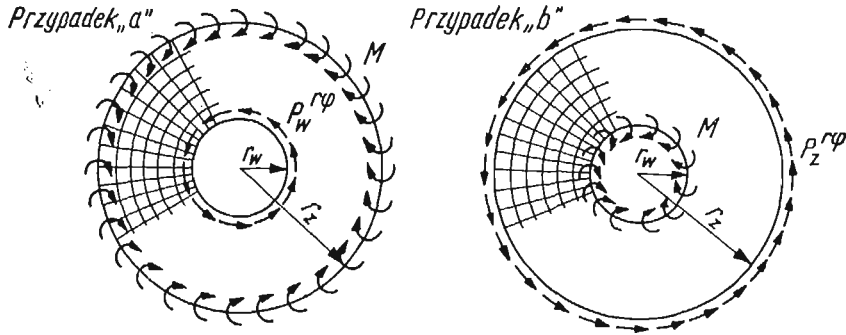
$$(2.15) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{r_w^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n^2 r_w^{k_{ni}} + \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{ni} r_w^{k_{ni}-1} + \frac{1}{r_w} M_n n - \frac{\tilde{S}^{II}}{\sqrt{\tilde{R}^{II} \tilde{S}^I}} M_n n = 0, \\ & -\frac{1}{r_w^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{in} n r_w^{k_{ni}-1} + \frac{1}{r_w^3} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n r_w^{k_{ni}} + \frac{1}{r_w} \frac{\tilde{S}^{II}}{\sqrt{\tilde{R}^{II} \tilde{S}^I}} M_n n^2 - \frac{1}{r_w^2} M_n = 0, \\ & -\frac{1}{r_z^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n^2 r_z^{k_{ni}} + \frac{1}{r_z} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{in} r_z^{k_{ni}-1} = 0, \\ & -\frac{1}{r_z^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{ni} n r_z^{k_{ni}-1} + \frac{1}{r_z^3} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n r_z^{k_{ni}} = p_z^{\varphi}. \end{aligned}$$

Znając B_{ni} określimy ze wzorów (2.14) składowe tensora naprężenia p^{rr} , $p^{r\varphi}$, $p^{\varphi\varphi}$. W analogiczny sposób rozwiązanie zadania przebiega dla przypadku tarcz perforowanych. Zmianie ulegają jedynie wyrażenia tensorów sztywności sprężystej (2.2). Zadanie to jest także łatwe do rozwiązania dla obciążeń innych rozwijalnych na brzegu w szereg Fouriera. Obciążenie to jednak spełniać musi warunki podane w pracy [2].

3. Porównanie metody efektu brzegowego z rozwiązaniami ścisłymi dla tarcz kołowych o strukturze siatkowej

Porównanie przeprowadzono dla przypadków obciążenia podanych na rys. 2a i 2b. Charakterystykę geometryczną siatki przedstawia rys. 3. Przyjmijmy, że

$$(3.1) \quad l_{II} = \Psi r, \quad l_I = \kappa r, \quad \Psi = \kappa = \frac{2\pi}{n},$$



Rys. 2

gdzie n określa gęstość siatki (n jest liczbą prętów obwodowych i promiennowych), sztywności zginania $(EJ)_d$ w płaszczyźnie tarczy są stałe oraz

$$A \equiv \frac{r_z}{r_w}, \quad \varrho \equiv \frac{r}{r_z}.$$

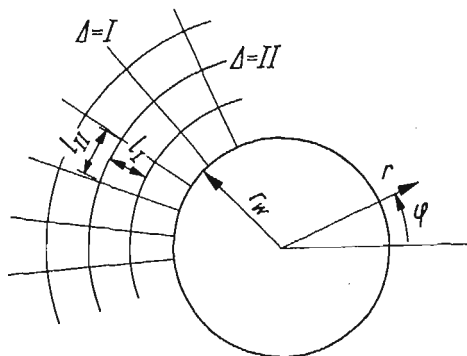
Zgodnie z rys. 2 warunki brzegowe dla przypadku *a* mają postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} r = r_z: \quad m^r &= M, \quad p^{rr} = p^{r\varphi} = 0; \\ r = r_w: \quad m^r &= 0, \quad p^{rr} = 0, \quad p^{r\varphi} = p_w^{r\varphi}; \end{aligned}$$

a dla przypadku *b* są określone równościami

$$(3.3) \quad \begin{aligned} r = r_z: \quad m^r &= 0, \quad p^{rr} = 0, \quad p^{r\varphi} = p_z^{r\varphi}; \\ r = r_w: \quad m^r &= M, \quad p^{rr} = p^{r\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Dla podanych powyżej danych przeprowadzono porównanie wyników otrzymanych metodą ścisłą [3] z wynikami otrzymanymi metodą przybliżoną efektu brzegowego. Porównanie to przeprowadzono dla siatek o gęstościach $n = 12$ i $n = 48$. Najbardziej poglą-



Rys. 3

dowym sposobem tego porównania jest zestawienie wielkości momentów promieniowych m^r otrzymanych za pomocą obydwu metod. Zestawienie to przedstawiono na wykresach rys. 4. Dla przypadku *a* metoda efektu brzegowego prowadzi do wyników

$$\begin{aligned} n = 12: \quad m^r &= M\varrho^{6,6}; \\ n = 48: \quad m^r &= M\varrho^{26,4}; \end{aligned}$$

Z obliczeń zaś ścisłych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} n = 12: \\ m^r &= M(1,06396\varrho^{5,4} + 0,06396A^{-7,4}\varrho^{-8,4} - 0,06396)\varrho^{-1}; \\ n = 48: \\ m^r &= M(1,0043\varrho^{24} + 0,0043A^{-27}\varrho^{-28} - 0,0043\varrho^{-1}). \end{aligned}$$

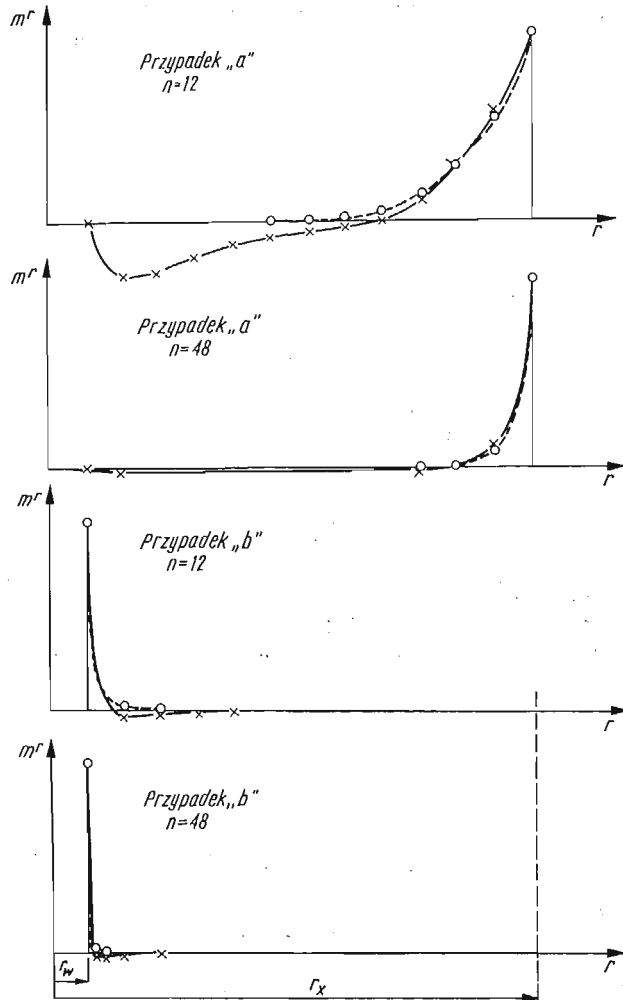
Dla przypadku *b* metoda efektu brzegowego daje

$$\begin{aligned} n = 12: \quad m^r &= M(A\varrho)^{-6,6}; \\ n = 48: \quad m^r &= M(A\varrho)^{-26,4}; \end{aligned}$$

obliczenia zaś ścisłe

$$\begin{aligned} n = 12: \\ m^r &= M(0,06396A^{-1}\varrho^{5,4} + 1,06396A^{-8,4}\varrho^{-8,4} - 0,06396\varrho^{-1}A^{-1}); \\ n = 48: \\ m^r &= M(0,0043A^{-1}\varrho^{24} + 1,0043A^{-28}\varrho^{-28} - 0,0043A^{-1}\varrho^{-1}). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć porównując odpowiednie rzędne wykresów, że efekt brzegowy występuje tym silniej, im większa jest gęstość siatki n . Jest on także zależny od tego, czy obciążenie momentowe występuje na brzegu wewnętrznym czy zewnętrznym. Porównanie odpowiednich wykresów prowadzi jednocześnie do wniosku, że efektywne stosowanie metody przybliżonej (efektu brzegowego) jest możliwe ze względów praktycznych dla siatek



Rys. 4. Kreską przerywaną oznaczono momenty m^r obliczone metodą przybliżoną, linią ciągłą obliczone w sposób dokładny

dostatecznie gęstych. Za siatki dostatecznie gęste można uważać tu siatki o liczbie prętów obwodowych wynoszącej co najmniej $n = 48$ (przy tej samej liczbie prętów promienionych). Popęlniany wtedy błąd w przypadku obciążenia brzegu wewnętrznego momentami wynosi około 1%, w przypadku zaś obciążenia brzegu zewnętrznego momentami wynosi około 2,6%, co stanowi wystarczającą dokładność dla celów praktycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Load-carrying structures of the dense lattice type. The plane problem*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966).
2. Cz. WOŹNIAK, *Edge effect in lattice-type discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 1, 1967.
3. S. KONIECZNY, Cz. WOŹNIAK, *Obliczanie płyt siatkowych w oparciu o teorię efektu brzegowego*, Rozpr. Inżyn., 3, 15 (1967).
4. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *On the solution of axially symmetric problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 10, 1966.

Резюме

РАСЧЕТ СЕТЧАТЫХ ДИСКОВ ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ
ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

В статье [1] были даны основные уравнения дисков с сетчатой структурой. В качестве примеров таких дисков можно привести плоские регулярные и густые стержневые сетки, диски с густой и регулярной перфорацией и т. п. В рамках континуальной модели таких дисков, представленной в работе [1], определение напряженного состояния и перемещений сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений 6-го порядка. Эти уравнения аналогичны в некотором смысле уравнениям плоского анизотропного континуума Коссера с тремя степенями свободы (две составляющие вектора перемещений и локальное вращение в плоскости диска). В дифференциальном операторе высшего порядка участвует малый параметр, характеризующий «плотность» сетки. Благодаря этому становится возможным положение приближенного решения с использованием так называемой асимптотической теории (когда малый параметр приравняется нулю) и «краевого эффекта» [2].

В данной статье содержатся: 1) пример расчета сетчатого диска при использовании асимптотической теории и краевого эффекта; 2) численная оценка точности приближенного решения, в зависимости от густоты сетки. Далее, в разд. 1 настоящей статьи, на основе [2] дана сводка основных уравнений теории. Следует отметить, что приближенный способ расчета сетчатых дисков, основанный на краевом эффекте, значительно проще чем приближенный метод расчета сетчатых пластин, использующий аналогичный эффект в пластинах [3].

Summary

EDGE EFFECT IN DENSE LATTICE-TYPE DISC STRUCTURES

Basic equations of the lattice-type disc structures (such as plane gridworks, perforated plates etc.) were given in [1]. The problem was reduced to a boundary value problem for a 6th order differential equation, the discrete structure being replaced by a continuous model. These equations are analogous to those governing a plane anisotropic Cosserat continuum possessing three degrees of freedom (two components of the displacement vector and the local rotation). An additional small parameter characterizing the density of the lattice appears at the higher order terms of the equation. This makes it possible to obtain an approximate solution with the aid of the asymptotic theory — the parameter being made zero — and the edge effect.

The paper presents an example of calculations of a lattice structure, based upon the asymptotic theory and the edge effect theory, and a rough numerical estimate of the achieved accuracy depending on the lattice density. It should be mentioned that the presented method applied to plane lattice-type discs is considerably simpler than the analogous method applied in [3] to the problem of bending of lattice-type plate structures.

POLITECHIKA ŁÓDZKA, KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI, KATEDRA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1967 r.
