

SPOSÓB ELEKTRYCZNEGO MODELOWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH
ZWYCZAJNYCH I CZĄSTKOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH I CZŁONACH
RZĘDU PARZYSTEGO

ALEKSANDER LISOWSKI (KRAKÓW)

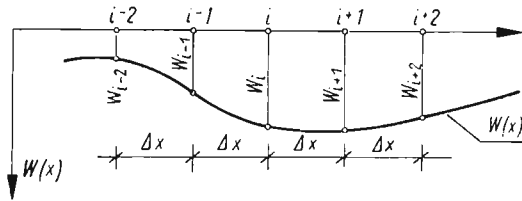
1. Ilorazy różnicowe

Dowolne równanie różniczkowe zwyczajne o postaci

$$a_n \frac{d^n w}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dx} + a_0 = 0$$

można, przy spełnieniu pewnych warunków, którymi nie będziemy się tutaj zajmowali, zastąpić równaniem różnicowym zamieniając różniczki na różnice skończone

$$a_n \frac{\Delta^n w}{\Delta x^n} + a_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} w}{\Delta x^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{\Delta w}{\Delta x} + a_0 = 0.$$



Rys. 1. Oznaczenia punktów w metodzie różnic skończonych

W pracy niniejszej zajmiemy się modelowaniem dowolnych równań różnicowych o członach parzystych

$$(1.1) \quad a_n \frac{\Delta^n w}{\Delta x^n} + a_{n-2} \frac{\Delta^{n-2} w}{\Delta x^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + a_0 = 0,$$

gdzie n jest dodatnią liczbą parzystą.

Wyraźmy kolejne ilorazy różnicowe przez wartości funkcji w w okolicy punktu i , który przyjmujemy za centralny (dla którego pisać będziemy wyrażenia różnicowe). Oznaczając wartości funkcji w (zgodnie z oznaczeniem punktów na rys. 1, przyjmując odstępy zmiennej niezależnej $\Delta x = \text{const}$) w punkcie i przez w_i , a punktów sąsiednich przez w_{i-1} oraz w_{i+1} , otrzymamy pierwsze ilorazy różnicowe «w przód»

$$\frac{\Delta w_i}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (w_{i+1} - w_i),$$

albo ilorazy różnicowe centralne

$$(1.2) \quad \frac{\Delta w_i}{\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} (w_{i+1} - w_{i-1}).$$

Ilorazy różnicowe parzystego rzędu, które będą omawiane dalej, wyrażają się wzorami

$$(1.3) \quad a_2 \frac{\Delta^2 w_i}{\Delta x^2} = \frac{a_2}{\Delta x^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}),$$

$$(1.4) \quad a_4 \frac{\Delta^4 w_i}{\Delta x^4} = \frac{a_4}{\Delta x^4} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}),$$

$$(1.5) \quad a_6 \frac{\Delta^6 w_i}{\Delta x^6} = \frac{a_6}{\Delta x^6} (w_{i-3} - 6w_{i-2} + 15w_{i-1} - 20w_i + 15w_{i+1} - 6w_{i+2} + w_{i+3}),$$

$$(1.6) \quad a_8 \frac{\Delta^8 w_i}{\Delta x^8} = \frac{a_8}{\Delta x^8} (w_{i-4} - 8w_{i-3} + 28w_{i-2} - 56w_{i-1} + 70w_i - 56w_{i+1} + \\ + 28w_{i+2} - 8w_{i+3} + w_{i+4}).$$

2. Modelowanie członów równań różnicowych w sieci elektrycznej

Modelując np. człon różnicowy

$$(2.1) \quad a_n \frac{\Delta^n w}{\Delta x^n} + a_0 = \frac{a_n}{\Delta x^n} (w_{i-\frac{n}{2}} - \dots + w_{i+\frac{n}{2}}) + a_0$$

przyjmujemy następujące współczynniki przeniesienia analogii: współczynnik przeniesienia prądowego m_i

$$(2.2) \quad I_i^0 = a_0 m_i,$$

współczynnik przeniesienia napięciowego m_u

$$(2.3) \quad U_i = w_i m_u,$$

współczynnik przeniesienia oporności m_r

$$(2.4) \quad r_{i,i-1} = k \frac{\Delta x^n}{a_n} m_r,$$

gdzie I_i , U_i i $r_{i,i-1}$ oznaczają wielkości elektryczne, mianowicie I_i — natężenie prądu w amperach, U_i — napięcie w woltach oraz $r_{i,i-1}$ — opór w omach, a k — pewien współczynnik proporcjonalności.

Pomiędzy współczynnikami przeniesienia istnieje znany związek wynikły z prawa Ohma (patrz np. [3])

$$(2.5) \quad m_u = m_i m_r.$$

Przejdźmy do podania schematów sieci modelujących poszczególne ilorazy różnicowe.

2.1. Różnica rzędu drugiego. Równanie (1.3) może być łatwo modelowane w sieci elektrycznej. Rozpatrzmy układ podany na rys. 2. Wypiszmy warunek równowagi węzła i (pierwsze prawo Kirchhoffa) z uwzględnieniem występowania wyrazu wolnego

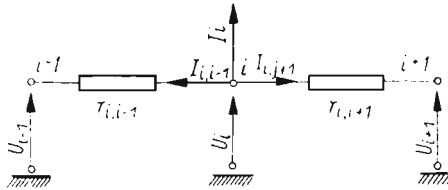
$$I_i = I_{i,i-1} + I_{i,i+1} + I_i^0 = 0.$$

Wyrażając prądy przez napięcia w węzłach sieci otrzymamy (zgodnie z prawem Ohma)

$$\frac{U_i - U_{i-1}}{r_{i,i-1}} + \frac{U_i - U_{i+1}}{r_{i,i+1}} + I_i^0 = 0,$$

a przyjmując stałą wartość oporów $r_{i,i-1} = r = \text{const}$, można napisać

$$(2.6) \quad \frac{1}{r} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) - I_i^0 = 0.$$



Rys. 2. Modelowanie różnicy rzędu drugiego w sieci elektrycznej

Jest oczywiste, że równanie (2.6) spełnia iloraz różnicowy drugiego rzędu (1.3), gdy przyjmie się podstawienie

$$r = \frac{\Delta x^2}{a_2} m_r, \quad U_i = w_i m_u \quad \text{oraz} \quad I_i^0 = a_0 m_i.$$

Odpowiednie zależności, które narzucają miana współczynników przeniesienia (w efekcie opór r musi być wyrażony w omach itd.) podane zostały w sposób ogólny we wzorach (2.2) do (2.5).

2.2. Różnica rzędu czwartego. Analizując równanie różnicowe dowolnego rzędu widzimy, że suma współczynników dodatnich i ujemnych jest sobie równa. Obecnie rozważane równanie nie da się zmodelować w ramach jednej siatki, gdyż łącząc bezpośrednio np. węzeł k z węzłem i otrzymamy wartość rzędu

$$I_{i,k} = \frac{U_i - U_k}{r_{ik}};$$

nie można więc uwzględnić różnych znaków funkcji w węzłach sąsiednich. Gdybyśmy jednak to zrobili według schematu podanego na rys. 3a, to otrzymamy

$$\Sigma I_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{r_{i,i-1}} + \frac{U_i - U_{i+1}}{r_{i,i+1}} + \frac{U_i - U_{i-2}}{r_{i,i-2}} + \frac{U_i - U_{i+2}}{r_{i,i+2}} = 0.$$

Czyniąc zadość równaniu (1.4), przyjmiemy

$$(a) \quad r_{i,i-2} = r_{i,i+2} = r \quad \text{oraz} \quad r_{i,i-1} = r_{i,i+1} = \frac{1}{4} r$$

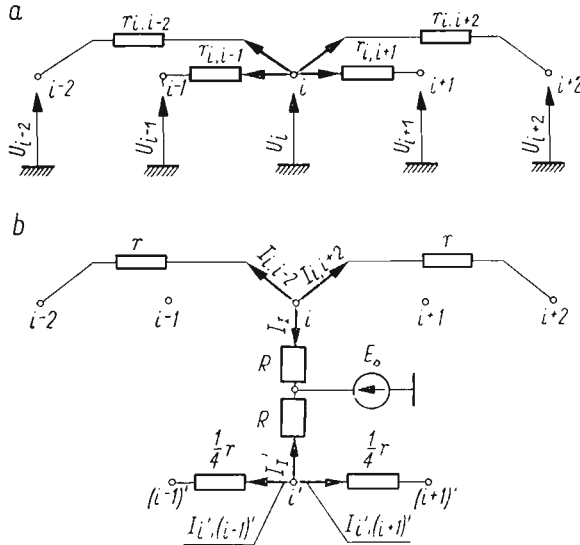
i otrzymamy

$$\frac{1}{r} (U_{i-2} + 4U_{i-1} - 10U_i + 4U_{i+1} + U_{i+2}) = 0.$$

W celu uwzględnienia ujemnych znaków przy niewiadomych U_{i-1} oraz U_{n+1} zastosować można układ dwóch siatek podany na rys. 3b (górnej i dolnej)¹.

Napiżmy warunek równowagi węzła i siatki górnej (oznaczenia bez indeksów)

$$(b) \quad \Sigma I_i = I_{i,i-2} + I_{i,i+2} + I_I = \frac{U_i - U_{i-2}}{r} + \frac{U_i - U_{i+2}}{r} + \frac{U_i - E_0}{R} \approx 0.$$



Rys. 3. Modelowanie różnicy rzędu czwartego w sieci elektrycznej

Odpowiednio warunek równowagi dla węzła i' siatki dolnej da zależność

$$\Sigma I_{i'} = I_{i',(i-1)'} + I_{i',(i+1)'} + I_{I'} = \frac{U_{i'} - U_{(i-1)'}}{\frac{1}{4}r} + \frac{U_{i'} - U_{(i+1)'}}{\frac{1}{4}r} + \frac{U_{i'} - E_0}{R} = 0,$$

a stąd

$$(c) \quad \frac{U_{i'} - E_0}{R} = - \left(\frac{4(U_{i'} - U_{(i-1)'})}{r} + \frac{4(U_{i'} - U_{(i+1)'})}{r} \right).$$

Przyjmujemy następnie, że odpowiednie potencjały węzłów siatki górnej i dolnej są sobie równe, czyli w rozważanym przypadku

$$(d) \quad U_{i'} = U_i, \quad U_{(i-1)'} = U_{i-1} \quad \text{oraz} \quad U_{(i+1)'} = U_{i+1}.$$

Podstawiając wyrażenie (c) do równania (b) z uwzględnieniem (d) otrzymamy

$$(2.7) \quad \frac{1}{r} (U_{i-2} - 4U_{i-1} + 6U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2}) = 0.$$

Widzimy zatem, że warunek analogii został spełniony².

¹) Sposób ten w zastosowaniu do równania biharmonicznego oraz równań przemieszczeniowych płaskiej teorii sprężystości podany jest np. w pracach [1, 3].

²) Wartość siły elektromotorycznej E_0 jest zasadniczo bez znaczenia. W praktyce regulujemy zmienną wartość zasilania napięciowego do tego momentu, aż oba potencjały siatki górnej i dolnej się wyrównają, co łatwo stwierdzić na woltomierzu.

Należy podkreślić, że w możliwościach modelowania równania różnicowego w sieci elektrycznej decydującą rolę odgrywa symetria współczynników względem punktu środkowego, dla którego jest to równanie wypisane oraz warunek, aby suma współczynników przy odpowiednich rzędnych funkcji w równaniu była równa zeru. Jeżeli zatem można uzyskać właściwe wartości wszystkich współczynników dla punktów sąsiednich, to i wartość współczynnika dla punktu i musi być spełniona.

Wyjaśnione założenia pozwalają już bez trudu podać układ sieci elektrycznej spełniającej równanie różnicowe dowolnego parzystego rzędu.

2.3. Różnica rzędu szóstego. Uwzględniając znaki współczynników przy równaniu (1.5) od razu można powiedzieć, że do węzła i należy wziąć 1 i 1 dla węzła $i-2$, 2 i 1 dla

dla pozostałych połączeń otrzymamy

$$r_{i',(i-2)'} = r_{i',(i+2)'} = \frac{1}{6} r \quad \text{oraz} \quad r_{i,i-1} = r_{i,i+1} = \frac{1}{15} r.$$

Przyjęcie równych oporów R łączących węzły dolnej i górnej siatki konieczne jest dla spełnienia warunku równości prądów spływających z węzłów i oraz i' na masę.

2.4. Różnica rzędu ósmego. Uwzględniając wyżej podane objaśnienia od razu możemy przejść do modelowania równania (1.6) w sieć elektrycznej. Węzłami górnej siatki będą punkty $i-4$, $i-2$, i , $i+2$ oraz $i+4$, a wartość oporu

$$r_{i,i-4} = r_{i,i+4} = r = \frac{\Delta x^3}{a_8} m_r.$$

Połączenia węzłów siatki oraz wartości oporów podane zostały na rys. 5.

3. Modelowanie dowolnego równania różnicowego złożonego z członów rzędu parzystego

Rozważmy dla przykładu równanie różnicowe

$$(a) \quad a_6 \frac{\Delta^6 w_i}{\Delta x^6} + a_4 \frac{\Delta^4 w_i}{\Delta x^4} - a_2 \frac{\Delta^2 w_i}{\Delta x^2} + k w_i + a_0 = 0.$$

W równaniu powyższym oprócz członów rzędów parzystych dodano człon zawierający samą funkcję w_i . Z następującego rozważania okaże się, że ten dodatkowy człon łatwo jest zmodelować w sieci.

Równanie (a) z uwzględnieniem wartości poszczególnych członów (1.3)–(1.5) i uwzględnieniem znaków przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \frac{a_6}{\Delta x^6} (w_{i-3} - 6w_{i-2} + 15w_{i-1} - 20w_i + 15w_{i+1} - 6w_{i+2} + w_{i+3}) + \frac{a_4}{\Delta x^4} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + \\ & + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}) - \frac{a_2}{\Delta x^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) + k w_i + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Po zgrupowaniu wyrazów otrzymamy

$$(b) \quad \begin{aligned} & w_{i-3} \frac{a_6}{\Delta x^6} - w_{i-2} \left(6 \frac{a_6}{\Delta x^6} - \frac{a_4}{\Delta x^4} \right) + w_{i-1} \left(15 \frac{a_6}{\Delta x^6} - 4 \frac{a_4}{\Delta x^4} - \frac{a_2}{\Delta x^2} \right) + w_i \left(k + \right. \\ & \left. + 20 \frac{a_6}{\Delta x^6} + 6 \frac{a_4}{\Delta x^4} + 2 \frac{a_2}{\Delta x^2} \right) + w_{i+1} \left(15 \frac{a_6}{\Delta x^6} - 4 \frac{a_4}{\Delta x^4} - \frac{a_2}{\Delta x^2} \right) + \\ & \left. - w_{i+2} \left(6 \frac{a_6}{\Delta x^6} - \frac{a_4}{\Delta x^4} \right) + w_{i+3} \frac{a_6}{\Delta x^6} + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Połączenia węzła i z węzłami $i-1$, $i-2$, $i-3$ oraz $i+1$, $i+2$, $i+3$ zależy od znaków przy odpowiednich członach. Oznaczając wartość oporu łączącego punkt i z węzłami skrajnymi przez

$$(c) \quad r = r_{i,i-3} = r_{i,i+3} = \frac{\Delta x^6}{a_6} m_r$$

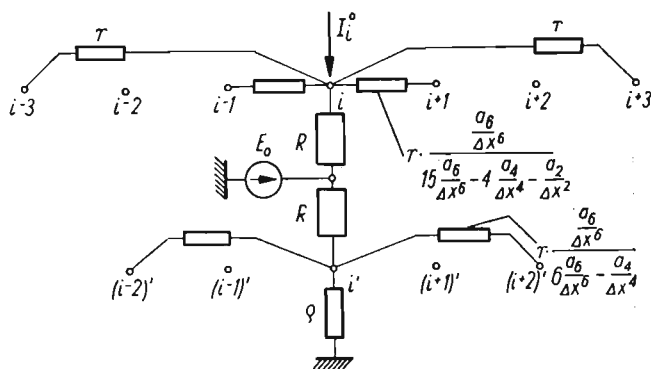
oraz przyjmując wartości w nawiasach za dodatnie (w konkretnym przypadku należy to sprawdzić)

$$6 \frac{a_6}{\Delta x^6} - \frac{a_4}{\Delta x^4} > 0,$$

(d)
$$15 \frac{a_6}{\Delta x^6} - 4 \frac{a_4}{\Delta x^4} - \frac{a_2}{\Delta x^2} > 0,$$

$$-k + 20 \frac{a_6}{\Delta x^6} - 6 \frac{a_4}{\Delta x^4} - 2 \frac{a_2}{\Delta x^2} > 0$$

otrzymamy dodatnie współczynniki funkcji dla punktów $i-3, i-1, i+1$ oraz $i+3$, wobec czego węzły te (razem z punktem i) należą do siatki górnej, a węzły pozostałe tj. $i-2, i+2$ — do dolnej. Model równania (b) w sieci elektrycznej z uwzględnieniem przy-



Rys. 6. Modelowanie równania różnicowego rzędu szóstego w sieci elektrycznej

jętych założeń (d) podany został na rys. 6. Należy jeszcze wyjaśnić modelowanie przedostatniego członu równania (a), czyli kw_i . Człon ten wchodzi do równania węzła dolnego i' i w równaniu równowagi węzła pojawi się jako człon U_i/ϱ .

Przyjmując zależność

(3.1)
$$\varrho = \frac{1}{k} m_r,$$

równanie (b) będzie w sieci spełnione.

Należy podkreślić, że przedstawiony sposób modelowania różnicowych członów rzędu parzystego zastosować można także do równań cząstkowych, gdzie występuje więcej niż jedna zmienna, zależna lub niezależna, wraz z uwzględnieniem członów różnicowych względem dwóch (lub więcej) niewiadomych. Rozpatrzmy dla przykładu człon rzędu parzystego (przy przyjęciu $\Delta x = \Delta y = c$)

$$\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} = \frac{1}{c^4} [4w_{i,j} - 2(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1})].$$

Oznaczenia węzłów siatki w układzie osi x, y wraz z podaniem współczynników równania (3.2) podane zostały na rys. 7a.

Zgodnie z oznaczeniami poprzednimi przyjęto dla siatki górnej

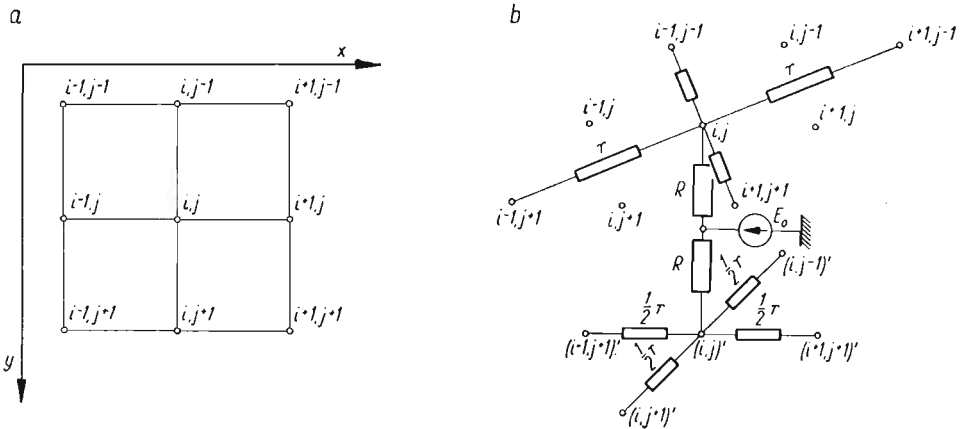
$$r = r_{i,j;+1j+1} = \frac{c^4}{1} m_r$$

oraz dla siatki dolnej

$$r_{(i,j;+1,j+1)'} = \frac{1}{2} r.$$

Schemat układu podany został na rys. 7b.

Zagadnieniem modelowania elektrycznego warunków brzegowych i początkowych nie będziemy się w tej pracy zajmowali; jest ono przedmiotem osobnego opracowania.



Rys. 7. Modelowanie członu cząstkowego rzędu czwartego w sieci elektrycznej

4. Zastosowania w zakresie teorii sprężystości

Po przedstawieniu możliwości modelowania elektrycznego równań różnicowych przejdziemy do podania kilku praktycznych zastosowań w zakresie teorii sprężystości. Układy sieci, które będą podane dotyczyć będą punktów, w których nie są modelowane warunki brzegowe lub początkowe.

4.1. Równanie belki na sprężystym podłożu. Równanie belki na sprężystym podłożu winklewskim ma postać

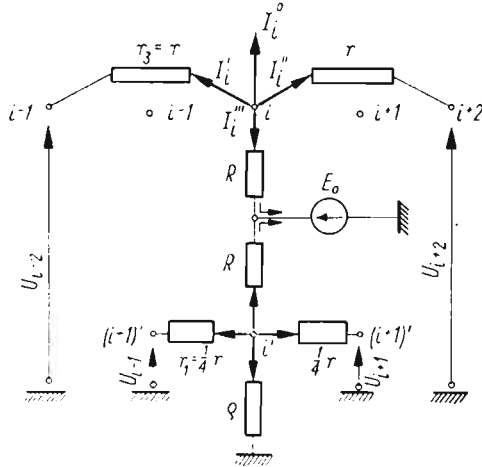
$$(4.1) \quad EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = p(x),$$

gdzie EJ — sztywność zginania belki (przyjmujemy ją jako stałą), k — stała podłoża (wartość siły powodująca jednostkowe ugięcie sprężyny modelującej podłoże sprężyste), $p(x)$ — obciążenie zewnętrzne działające na belkę prostopadle do jej osi.

Równanie (4.1) w zapisie różnicowym przyjmie postać

$$(4.2) \quad \frac{EJ}{\Delta x^4} (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) + k_i y_i - P_i = 0,$$

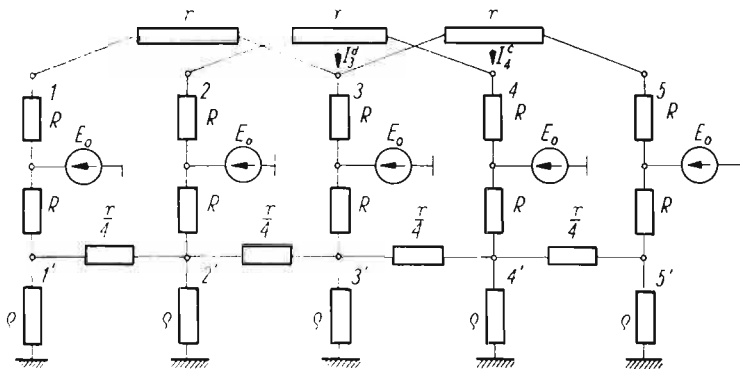
gdzie P_i przedstawia wypadkowe obciążenie przypadające na węzeł i .



Rys. 8. Modelowanie równania belki na sprężystym podłożu

Układ sieci modelującej równanie (4.2) podany został na rys. 8. Odpowiednie wielkości oznaczone na rysunku wynoszą

$$r = \frac{\Delta x^4}{EJ} m_r, \quad \varrho = \frac{1}{k_i} m_r, \quad I_i^0 = P_i m_i \quad \text{oraz} \quad U_i = y_i m_u.$$



Rys. 9. Model belki leżącej na sprężystym podłożu (część środkowa belki)

Układ sieci dla kilku punktów podany został na rys. 9.

4.2. Równanie zginania płyty. Różniczkowe równanie powierzchni odkształconej płyty ma postać

$$(4.3) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D},$$

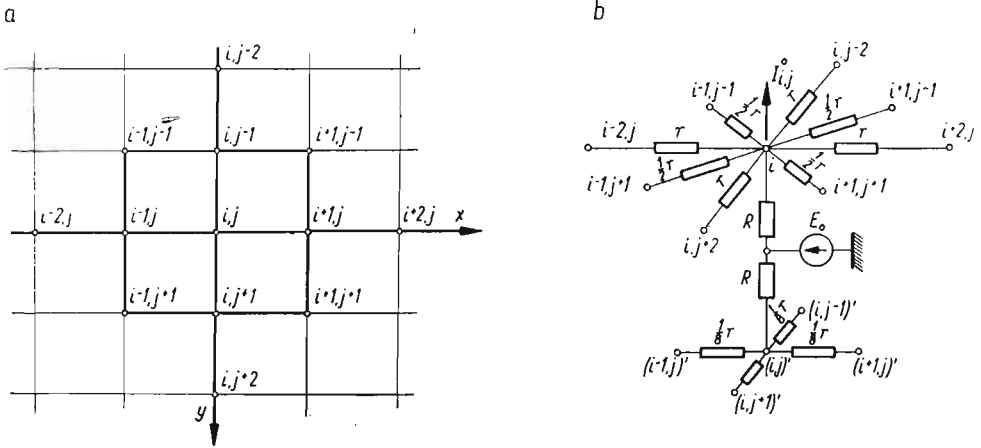
gdzie D — sztywność zginania płyty, a $q(x, y)$ — obciążenie działające na jednostkę powierzchni płyty.

Równanie różnicowe o postaci

$$\frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta y^4} = \frac{Q_{i,j}}{D}$$

można zapisać uwzględniając oznaczenia podane na rys. 10a oraz wzory (1.3) i (3.2)

$$\frac{1}{\Delta x^4} (w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}) + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} \left[4w_{i,j} - 2(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) + \frac{1}{\Delta y^4} (w_{i,j-2} + w_{i,j-1} + w_{i,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j+2}) \right] = \frac{Q_{i,j}}{D}$$



Rys. 10. Modelowanie równania płyty

Przy założeniu siatki o oczkach kwadratowych, czyli dla $\Delta x = \Delta y = c$, otrzymamy po zsumowaniu

$$(4.4) \quad \frac{1}{\Delta x^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}) + (w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2})] - \frac{Q_{ij}}{D} = 0.$$

Model powyższego równania w sieci podany został na rys. 10b¹⁾. Odpowiednie wielkości oznaczone na rysunku wynoszą

$$r = \frac{\Delta x^4}{D} m_r, \quad I_{i,j}^0 = Q_{i,j} m_i \quad \text{oraz} \quad U_{i,j} = w_{i,j} m_u,$$

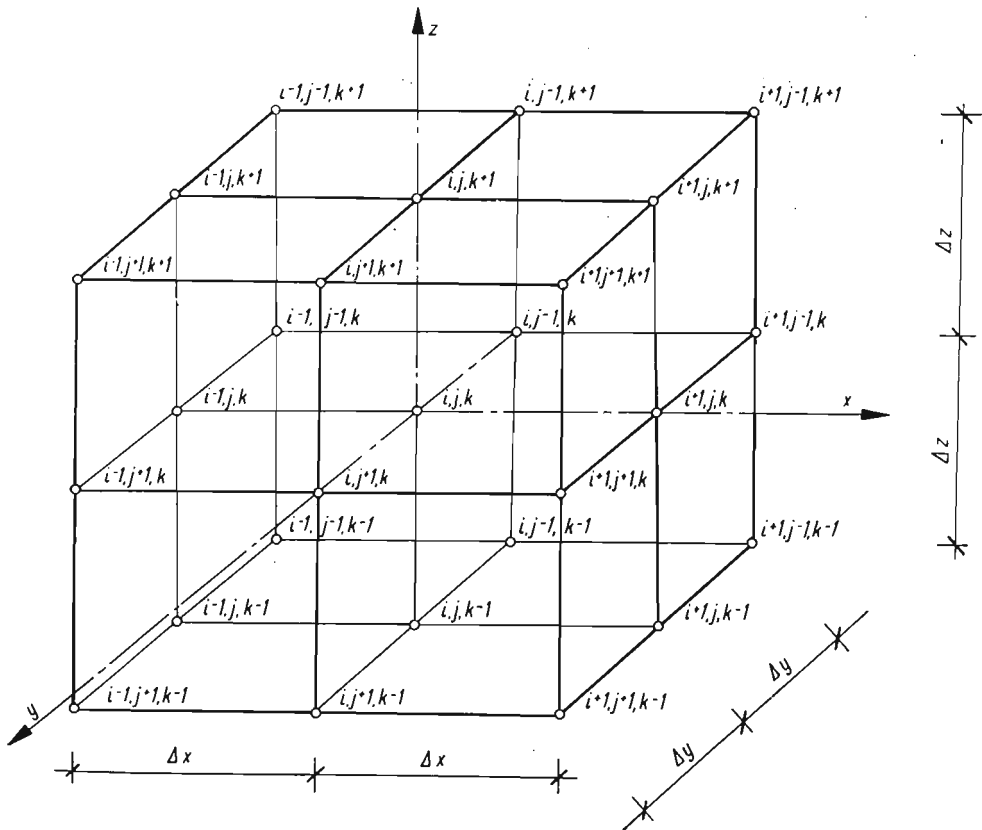
gdzie $Q_{i,j}$ przedstawia obciążenie zewnętrzne działające na węzeł i, j .

¹⁾ Rozwiązanie w sieci elektrycznej równania płyty podano np. w pracach [1, 2, 4].

4.3. Równania przemieszczeniowe teorii sprężystości ciał izotropowych. Przeszczenia dowolnego punktu wewnątrz ciała liniowo sprężystego, izotropowego spełniają układ równań

$$(4.5) \quad \begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{X}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + n \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{Y}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{Z}{\lambda + G} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie X, Y, Z — składowe sił masowych wzdłuż odpowiednich osi układu ortogonalnego x, y, z w odniesieniu do jednostki objętości materiału, G — współczynnik sprężystości



Rys. 11. Oznaczenia punktów w układzie ortogonalnym osi x, y, z

poprzecznej (moduł Kirchhoffa) u, v i w — składowe przemieszczenia wzdłuż osi x, y, z . Współczynniki m, n i λ określone są wzorami

$$(4.6) \quad m = \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G}, \quad n = \frac{G}{\lambda + G} \quad \text{oraz} \quad \lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} G,$$

gdzie ν — współczynnik Poissona.

Przepiszmy równania (4.5) w postaci różnicowej dla punktu i, j, k

$$(4.7) \quad \begin{aligned} m \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta x^2} + n \left(\frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) + \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta x \Delta y} + \frac{X_{i,j,k}}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta y^2} + n \left(\frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) + \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta y \Delta x} + \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta y \Delta z} + \frac{Y_{i,j,k}}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta z^2} + n \left(\frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta y^2} \right) + \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta z \Delta x} + \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta w \Delta y} + \frac{Z_{i,j,k}}{\lambda + G} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $X_{i,j,k}$ $Y_{i,j,k}$ $Z_{i,j,k}$ — wypadkowe obciążenia działające na wyodrębniony węzeł siatki przestrzennej o odczkach $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

Dalej rozpiszemy pierwsze równanie (4.7) zgodnie z oznaczeniami punktów podanymi dla układu ortogonalnego osi x, y, z (patrz rys. 11). Dla uproszczenia przyjęto podział stały i jednakowy względem wszystkich trzech osi, czyli $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c$, przy czym współrzędna i określa położenie punktu względem osi x , współrzędne j — względem osi y oraz k — względem osi z .

Pierwsze równanie (4.7) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{m}{\Delta x^2} (u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}) + \frac{n}{\Delta y^2} (u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}) + \\ + \frac{n}{\Delta z^2} (u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}) + \frac{1}{2\Delta x 2\Delta y} (v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k} + \\ + v_{i-1,j-1,k} - v_{i+1,j-1,k}) + \frac{1}{2\Delta x 2\Delta z} (w_{i+1,j,k+1} - w_{i+1,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1} + \\ - w_{i-1,j,k+1}) + lX_{i,j,k} = 0, \end{aligned}$$

gdzie $l = 1/(\lambda + G)$.

Grupując wyrazy otrzymamy przy uwzględnieniu $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} - \left(2 \frac{m}{c^2} + 4 \frac{n}{c^2} \right) u_{i,j,k} + \frac{m}{c^2} u_{i-1,j,k} + \frac{m}{c^2} u_{i+1,j,k} + \frac{n}{c^2} u_{i,j-1,k} + \frac{n}{c^2} u_{i,j+1,k} + \\ + \frac{n}{c^2} u_{i,j,k-1} + \frac{n}{c^2} u_{i,j,k+1} + \frac{1}{4c^2} (v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k} + v_{i-1,j-1,k} - v_{i+1,j-1,k}) + \\ + \frac{1}{4c^2} (w_{i+1,j,k+1} - w_{i+1,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1} - w_{i-1,j,k+1}) + lX_{i,j,k} = 0. \end{aligned}$$

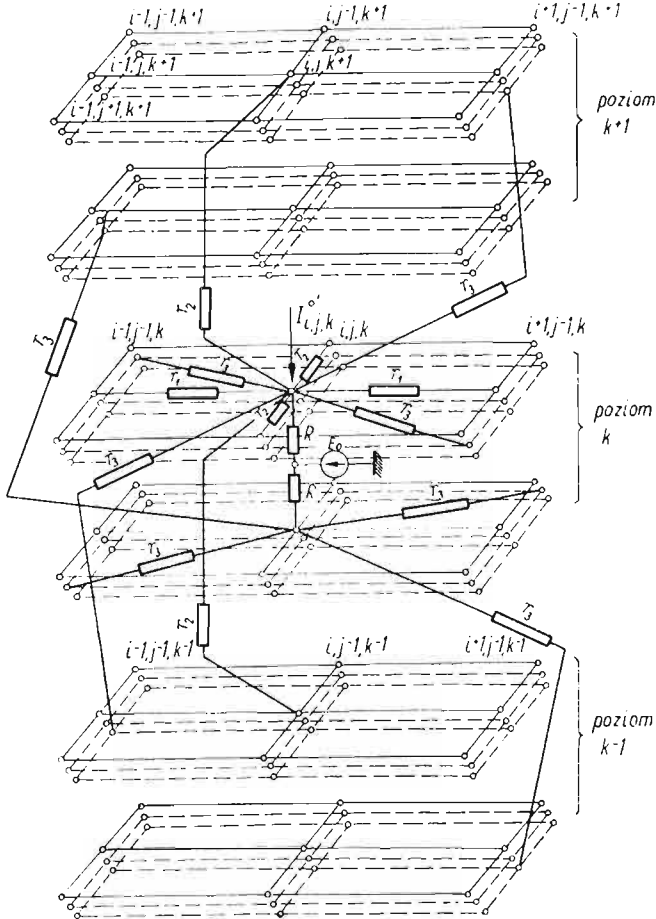
W rozpatrywanym punkcie i, j, k obszaru mamy układ trzech równań różnicowych, gdzie występują niewiadome $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$ i $w_{i,j,k}$. Dla wyznaczenia każdej składowej przesunięcia punktu i, j, k poprowadzimy potrójne siatki, które oznaczone są w odrębny sposób na rys. 12: względem osi x — w sposób ciągły, osi y — przerywany i osi z — kropkowany. Równania (4.8) zostały zmodelowane w sieci przy przyjęciu

$$(4.9) \quad r_1 = \frac{c^2}{m} m_r, \quad r_2 = \frac{c^2}{n} m_r \quad \text{oraz} \quad r_3 = \frac{4c^2}{1} m_r;$$

obciążenie sieci określa wartość $I_{i,j,k}^0 = lX_{i,j,k} m_i$.

W analogiczny sposób zapisać można dwa pozostałe równania (4.7) i zmodelować w sieci elektrycznej. Wówczas centralnymi punktami będą węzły i, j, k dla siatki oznaczonej linią przerywaną (współrzędne $v_{i,j,k}$) oraz linią kropkowaną (współrzędne $w_{i,j,k}$).

Modelowanie przesunięć układu przestrzennego jest niewątpliwie dość pracochłonne, gdyż każdy węzeł posiada w ogólnym przypadku trzy składowe przesunięć u, v, w , czyli dla modelowania n węzłów potrzebna będzie sieć złożona z $3n$ węzłów.



Rys. 12. Modelowanie równań przemieszczeniowych teorii sprężystości ciał izotropowych

Na przykład modelowanie sześcianu z podziałem krawędzi na połowy, czyli $\Delta x = \Delta y = \Delta z = a/2$ według rys. 11 wymagać będzie sieci elektrycznej o $27 \times 3 = 81$ węzłach.

W praktyce wykorzystać naturalnie można ewentualny warunek symetrii, co pozwala rozważyć przy tej samej liczbie niewiadomych układy kilkakrotnie bardziej złożone.

Oddzielną sprawą jest uwzględnienie warunków brzegowych lub początkowych. Wykorzystuje się tu te same związki, które występują w metodach obliczeniowych, a więc np. warunek zerowego ugięcia, czy zerowej wartości momentu zginającego lub siły poprzecznej. Sprawa ta będzie rozważona w oddzielnym artykule.

Literatura cytowana w tekście

1. К. К. Керопян, П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва 1963.
2. A. LISOWSKI, *Analogowe maszyny matematyczne* (skrypt), PWN, Kraków, Warszawa, Łódź 1967.
3. *Математическое моделирование и теория электрических цепей*, Академия Наук Украинской ССР, Институт Кибернетики, выпуск III, Киев 1965.
4. Г. Е. Пухов, В. В. Васильев, А. Е. Степанов, О. Н. Токарева, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. А. Н. Украинской ССР, Киев 1963.

Резюме

МЕТОД ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
И ЧЛЕНАМИ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Описывается метод построения электрических моделей дифференциальных выражений содержащих производные четного порядка. Применены две отдельные сети (верхняя и нижняя). Рассмотрены также неоднородные дифференциальные уравнения.

Приводится ряд примеров: дифференциального уравнения изгибаемой балки на упругом основании, изгиба тонкой плиты а также для системы уравнений на перемещения общей теории упругости.

Summary

ELECTRIC NETWORK MODELS OF ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND EVEN ORDER TERMS

The method of constructing the electric models of an even order finite difference expression has been described, two separate networks (the upper and lower ones) being introduced. Non-homogeneous differential equations are taken into consideration.

Examples of several types of models are given; the equations of bending of a beam on elastic foundation, bending of a thin elastic plate and the displacement equations of general elasticity theory have been discussed in particular.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1969 r. — przeredogowana (po raz pierwszy wpłynęła dnia 15 lipca 1968 r.)