

STATECZNOŚĆ NIEPRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW W STRUMIENIU PŁYNU

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Rozwój współczesnych metod budowy maszyn, rozwój lotnictwa i techniki raketowe istotnie rozszerzył klasę badanych dotychczas obciążeń elementów konstrukcji, głównie na tak zwane obciążenia niezachowawcze, a więc nie posiadające potencjału. Wśród nich wiele uwagi poświęcono obciążeniu elementów konstrukcji ciśnieniem wywieranym przez poruszający się z dużą prędkością strumień płynu.

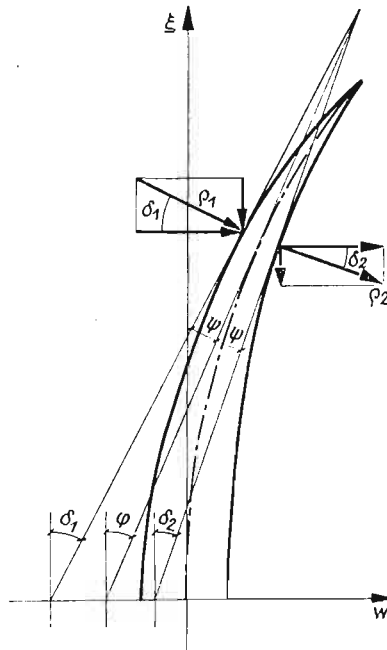
W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem stateczności pręta (płytki) niepryzmatycznego, jednostronnie utwierdzonego, umieszczonego w strumieniu płynu. Prędkość płynu jest równa U , a jej kierunek równoległy do nieodkształconej osi pręta. Ciśnienie boczne wywierane przez strumień płynu obliczymy z możliwie najprostszego prawa opływu, z podanego przez ILIUSZYNA [10] oraz ASHLEYA i ZARTARIANA [1], tzw. prawa *tłokowego*. Prawo to i zakres jego stosowania omawia w elementarny sposób WOLMIR [18], a ściślej wyprowadzenie zamieszczone jest w pracy ILIUSZYNA [10], w której autor formułuje tzw. hipotezę *plaskich przekrojów*. Przyjmując prawo tłokowe BOŁOTIN [3] bada stateczność płyty w strumieniu gazu, a MOWCZAN [16], [17] drgania wspornikowej płyty o nieskończonej szerokości, poruszającej się w gazie z dużą prędkością naddźwiękową, w kierunku od utwierdzenia do swobodnego brzegu, oraz stateczność pokrycia skrzydła samolotu poruszającego się w gazie. Ponadto prawo tłokowe jest wykorzystane w pracach HEDGEPEETHA [9], BIOTA [2] i innych, a w Polsce przez KORDAS [14], która zbadała stateczność pręta wspornikowego opływanego równoległym strumieniem płynu, z równoczesnym uwzględnieniem działania siły śledzącej. Znacznie ściślejsze prawa opływu, oparte na założeniu istnienia potencjału prędkości, są wykorzystane w pracach KACPRZYŃSKIEGO i KALISKIEGO [11], DŻYGADŁY [5], [6], KALISKIEGO i SOLARZA [12], KALISKIEGO i WOROSZYŁA [13], oraz w innych pracach tych samych autorów. Na ogół dotyczą one drgań samowzbudnych (typu flatteru) powłok cylindrycznych i stożkowych opływanych strumieniem płynu oraz stateczności drgań raket sprężystych. Przyjęty tu rozkład sił aerodynamicznych jest zgodny z podaną przez DORRANCE'A [4] i MILESA [15] teorią opływu ciał smukłych. Ponadto w pracach tych porównano rozwiązania uzyskane w oparciu o prawo tłokowe z rozwiązaniami ściślejszymi.

Celem niniejszej pracy jest znalezienie rozwiązań jak najprostszych, które, chociaż nie-
ściśle, pozwolą ocenić wpływ niepryzmatyczności pręta na prędkość krytyczną strumienia

gazu. Założymy, że utrata stateczności następuje przez wyboczenie i będziemy stosowali tylko statyczne kryterium stateczności.

2. Założenia upraszczające i równania podstawowe

Pręt (płytkę) niepryzmatyczny, jednostronnie utwierdzony, znajduje się w strumieniu płynu. Prędkość płynu jest równa U i jest równoległa do nieodkształconej osi pręta. Zakładając, że mamy do czynienia z opływem stacjonarnym przyjmujemy, że ciśnienie boczne jest określone prawem *tłokowym*. W przypadkach pręta niepryzmatycznego ciśnienie z jednej jego strony jest większe od ciśnienia płynu w obszarze niezaburzonym (w nieskończoności), a z drugiej mniejsze, przy czym po obu stronach jest prostopadłe do odpowiednich ścianek pręta.



Rys. 1

Wielkość tych ciśnień jest, zgodnie z prawem *tłokowym*, proporcjonalna do prędkości płynu i do kąta nachylenia ścianki względem osi pręta nieodkształconego. Ograniczając się do badania utraty stateczności przez wyboczenie, rozważymy działanie sił statycznych na niepryzmatyczny pręt, przedstawiony na rys. 1. Na jedną stronę pręta działa ciągle obciążenie na jednostkę długości równe

$$(2.1) \quad p_1 = BUb(x)\delta_1,$$

gdzie $B = p_0\kappa/c_0$ jest stałą charakteryzującą własności płynu. Dla gazu c_0 , p_0 i U oznaczają odpowiednio: prędkość dźwięku, ciśnienie i prędkość płynu w obszarze niezaburzonym, κ — wykładnik politropy. Dla cieczy stałą B należy wyznaczyć doświadczalnie. Funkcja

$b(x)$ określa zmienną szerokość pręta (płytki) w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wyboczenia, a kąt δ_1 jest zawarty między osią x i styczną do pręta.

Podobnie na drugą stronę działa ciągłe obciążenie

$$(2.2) \quad p_2 = BU b(x)\delta_2.$$

Jak widać z rysunku, kąty δ_1 i δ_2 zależą od ugięcia pręta oraz od stopnia zbieżności pręta

$$(2.3) \quad \delta_1 = \varphi + \psi, \quad \delta_2 = \varphi - \psi,$$

gdzie φ jest kątem zawartym między osią pręta po ugięciu i osią pręta nieodkształconego, ψ — kątem zawartym między osią pręta i styczną do powierzchni. Obciążenia p_1 i p_2 należy rozłożyć na składowe poziome i pionowe, co w rezultacie daje wypadkowe obciążenie poziome równe

$$(2.4) \quad p = p_1 \cos \delta_1 + p_2 \cos \delta_2$$

oraz obciążenie pionowe równe

$$(2.5) \quad q = p_1 \sin \delta_1 + p_2 \sin \delta_2.$$

Ograniczymy się w dalszym ciągu do małych kątów δ_1 i δ_2 , tzn. do teorii małych ugięć ($\varphi \ll 1$) oraz do prętów smukłych ($\psi \ll 1$). Rozwijając (2.4) i (2.5) w szeregi typu Maclaurina, otrzymujemy po wykorzystaniu (2.2) i (2.3)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p &= 2BUb(x)\varphi \left(1 - \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots \right), \\ q &= 2BUb(x)(\varphi^2 + \psi^2 + \dots). \end{aligned}$$

Ponadto przyjmiemy, że na końcu pręta działa siła P , której kierunek jest styczny do odkształconej osi na końcu swobodnym, tzn. że jest ona siłą śledzącą. Uwzględniając ciągłe obciążenie pionowe, równanie ugiętej osi pręta przybiera postać

$$(2.7) \quad (EJw'')'' + \left[P + \int_{\xi}^l q(\eta) d\eta \right] y'' - q(\xi)y' = p(\xi),$$

skąd otrzymujemy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} (EJw'')'' + \left[P + 2BU \int_{\xi}^l b(\eta)(\varphi^2 + \psi^2 + \dots) d\eta \right] y'' - \\ - 2BUb(\xi) \left(1 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\psi^2 + \dots \right) y' = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ do dalszych rozważań przyjmiemy tylko pręty smukłe, więc, jak wynika z rysunku oraz równania (2.8), nie popełniając większego błędu możemy pominąć wyrazy zawierające drugie i wyższe potęgi kątów φ i ψ .

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne $y = w/l$ i $x = \xi/l$, bezwymiarowe obciążenia

$$(2.9) \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0J_0}, \quad \alpha = \frac{Bb_0Ul^3}{E_0J_0}$$

oraz zakładając, że sztywność zmienia się według wzoru $EJ = E_0J_0g(x)$, a szerokość pręta $b = b_0f(x)$, przekształcimy równanie (2.8) do postaci

$$(2.10) \quad [g(x)y'']'' + \beta y'' - 2\alpha f(x)y' = 0.$$

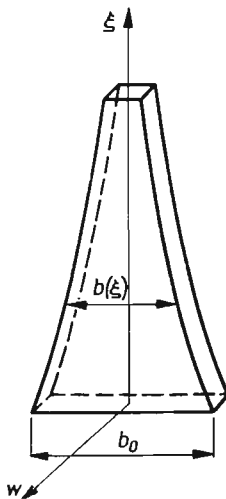
Do równania tego dołączamy warunki brzegowe, wynikające z założenia, że siła czołowa ma charakter siły śledzącej oraz z warunków utwierdzenia

$$(2.11) \quad y(0) = y'(0) = g(1)y''(1) = [(gy'')]_{x=1} = 0.$$

Przejdziemy obecnie do podania rozwiązań dla dwóch typów prętów: płasko-zbieżnego o stałej wysokości przekroju poprzecznego, wybaczonego się z płaszczyzny zbieżności, oraz płasko-zbieżnego o stałej szerokości $b = b_0$, wybaczonego się w płaszczyźnie zbieżności. W pierwszym przypadku stosowność prawa tłokowego jest nie mniej uzasadniona niż w zagadnieniach stateczności prętów (płytek) przyzmatycznych, natomiast w drugim popełniamy większe błędy z powodu odrzucenia składowych pionowych ciśnienia. Jednakże przy założeniu małego kąta ψ (niewielkiej zbieżności pręta), również i tu stosowanie prawa tłokowego wydaje się uzasadnione.

3. Stateczność pręta płaskiego o wykładniczo zmiennej szerokości

Pręt jednostronnie utwierdzony, przedstawiony na rys. 2, poddany jest działaniu ciśnienia bocznego na ściankę o zmiennej szerokości $b(x) = b_0 f(x)$. Założymy, że wysokość przekroju pręta jest stała i znacznie mniejsza niż szerokość oraz że opór czołowy jest pomijalnie mały w porównaniu z ciśnieniem bocznym, $\beta = 0$. To ostatnie założenie jest, jak widać z rysunku, uzasadnione w przypadku małej powierzchni przekroju poprzecznego swobodnego końca pręta.



Rys. 2

Moment bezwładności jest tu zmienny w taki sam sposób jak szerokość pręta: $J = J_0 f(x)$ i równanie (2.10) ulega uproszczeniu

$$(3.1) \quad [f(x)y'']'' - 2\alpha f(x)y' = 0 \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{Bb_0 U l^3}{E_0 J_0}.$$

Założymy w dalszym ciągu, że szerokość pręta zmienia się wykładniczo, tzn.

$$(3.2) \quad f(x) = e^{\varepsilon x},$$

gdzie ε jest dowolną stałą, określającą stopień zbieżności pręta. Podstawiając (3.2) do równania (3.1) otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe czwartego rzędu o stałych współczynnikach

$$(3.3) \quad y^{IV} + 2\varepsilon y''' + \varepsilon^2 y'' - 2\alpha y' = 0.$$

Poszukując rozwiązania tego równania w postaci

$$(3.4) \quad y(x) = C e^{\lambda x},$$

dostajemy równanie charakterystyczne

$$(3.5) \quad \lambda^4 + 2\varepsilon \lambda^3 + \varepsilon^2 \lambda^2 - 2\alpha \lambda = 0,$$

którego jeden pierwiastek jest równy zeru, $\lambda_1 = 0$, a pozostałe określone są wzorami Cardana. Przez podstawienie $\lambda = z - 2/3\varepsilon$ sprowadzamy równanie (3.5) do postaci kanonicznej

$$(3.6) \quad z^3 - \frac{1}{3} \varepsilon^2 z - \left(\frac{2}{27} \varepsilon^3 + 2\alpha \right) = 0.$$

Ponieważ $\Delta = \alpha(\alpha + 2/27\varepsilon^3) > 0$ przynajmniej dla dodatnich ε (jak okaże się później również dla dowolnych ujemnych), więc

$$(3.7) \quad \lambda_2 = -2\mu - 2\varepsilon, \quad \lambda_3 = \mu + i\gamma, \quad \lambda_4 = \mu - i\gamma,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(3.8) \quad \mu = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} - \sqrt{\Delta}} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} - \sqrt{\Delta}} \right).$$

Całką ogólną równania (3.3) jest więc funkcja

$$(3.9) \quad y(x) = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\mu x} \sin \gamma x + C_4 e^{\mu x} \cos \gamma x,$$

w której dowolne stałe $C_1 \dots C_4$ należy wyznaczyć z warunków brzegowych (2.11).

Po wstawieniu (3.9) do (2.1) otrzymujemy układ równań liniowych i jednorodnych ze względu na stałe C_i , który ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy jego wyznacznik główny jest równy zeru. Obliczając ten wyznacznik, dostajemy po przekształceniach równanie przestępne na poszukiwaną bezwymiarową prędkość strumienia α w zależności od parametru ε

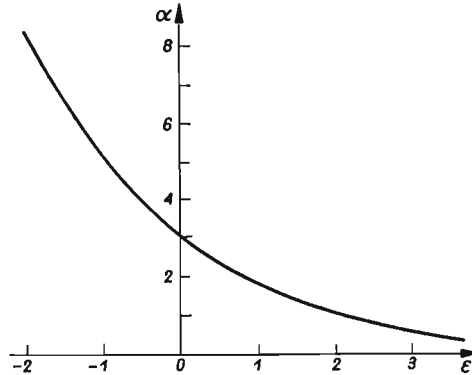
$$(3.10) \quad 2(\mu + \varepsilon) e^{-3\mu - 2\varepsilon} [(3\mu^2 - \gamma^2 + 2\varepsilon\mu) \sin \gamma + 2\gamma(2\mu + \varepsilon) \cos \gamma] + \gamma(\mu^2 + \gamma^2) = 0.$$

W przypadku, gdy $\varepsilon = 0$ otrzymujemy równanie podane już przez MOWCZANA [17], BIOTA [2], BOŁOTINA [3] i KORDASA [14]

$$(3.11) \quad 2e^{-3\mu_0} \cos(-\sqrt{3}\mu_0) + 1 = 0, \quad \text{gdzie} \quad \mu_0 = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{2\alpha}.$$

Pierwiastki równania przestępnego (3.10) obliczono dla czterech wartości ε , mianowicie: dla $\varepsilon = -2$, $\alpha = 8,325$; dla $\varepsilon = -1$, $\alpha = 5,239$; dla $\varepsilon = 0$, $\alpha = 3,1651$, dla $\varepsilon = +3$, $\alpha = 0,544$ i na tej podstawie sporządzono wykres (rys. 3).

Należy zaznaczyć, że problem optymalizacji parametrycznej (jak w [7]) nie może być w tym przypadku w ogóle postawiony, ponieważ ze zmniejszeniem się parametru ε rośnie



Rys. 3

prędkość krytyczna. Przy przekroju zmieniającym się według funkcji typu $\delta(x)$ Diraca, prędkość krytyczna jest nieskończenie wielka.

4. Stateczność prętów niepryzmatycznych o stałej szerokości

Jako drugi przypadek rozważymy pręt wspornikowy umieszczony w strumieniu płynu, o stałej szerokości ściany bocznej, prostopadłej do płaszczyzny wyboczenia (rys. 4). Zakładając, że ściana boczna w płaszczyźnie wyboczenia jest bardzo wąska, tym bardziej możemy pominąć obciążenie pionowe pochodzące od parcia płynu. Uwzględnimy tu natomiast opór czołowy, scharakteryzowany współczynnikiem β . W równaniu (2.10), założymy wobec tego, że $f(x) \equiv 1$, otrzymując

$$(4.1) \quad [g(x)y']'' + \beta y'' - 2\alpha y' = 0.$$

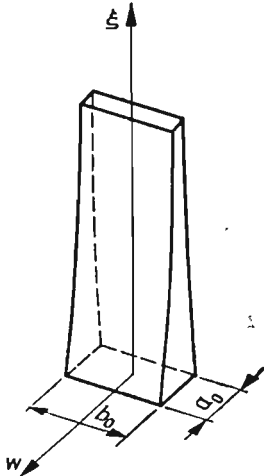
Nawet przy założeniu najprostszych funkcji $g(x)$, całkę ogólną tego równania jest bardzo trudno znaleźć. Można jednak postąpić inaczej, mianowicie zastosować metodę odwrotną, tzn. założyć ściśłą postać równania linii ugięcia $y(x)$, spełniającą warunki brzegowe (2.11), a obliczać nieznaną rozkład sztywności $g(x)$. Całkując jednokrotnie (4.1) otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu na funkcję $g(x)$

$$(4.2) \quad g' + \frac{y'''}{y''} g = \frac{C_1 + 2\alpha y - \beta y'}{y''},$$

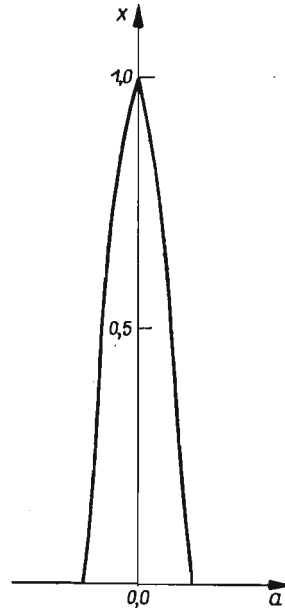
gdzie C_1 — stała dowolna. Całka ogólna tego równania może być zapisana w postaci

$$(4.3) \quad g(x) = \frac{1}{y''} \left[C_1 x + C_2 - \beta y + 2\alpha \int y(x) dx \right].$$

Kształt pręta w sposób istotny zależy będzie od przyjętej funkcji $y(x)$; najprostsze rozwiązanie otrzymamy wtedy, gdy przyjmiemy, $y(x) = Ax^2$. Spełnia ona tylko dwa geometryczne warunki brzegowe (2.11), dwa pozostałe muszą być spełnione poprzez funkcję $g(x)$. Z warunków statycznych na końcu pręta, wobec $y''(1) \neq 0$ wynika, że $g(1) = 0$



Rys. 4



Rys. 5

i $g'(1) = 0$. Dodatkowe założenie, że sztywność w przekroju utwierdzonym jest równa J_0 , tzn. $g(0) = 1$, pozwala wyrazić związek między obciążeniami α i β . Po prostych przeliczeniach otrzymujemy z (4.3)

$$(4.4) \quad g(x) = (1-x) + \frac{1}{2} \beta x(1-x) - \frac{1}{3} \alpha x(1-x^2), \quad \alpha = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \beta.$$

Przy braku siły czołowej (jest to uzasadnione w tym przypadku z uwagi na $g(1) = 0$ i $g'(1) = 0$) mamy

$$(4.5) \quad g(x) = \frac{1}{2} (x^3 - 3x + 2), \quad \alpha = \frac{3}{2}.$$

Kształt pręta pokazano na rys. 5.

Cały szereg innych rozwiązań, o niezerowych przekrojach końcowych, można otrzymać zakładając postać linii ugięcia w następujący sposób, zapewniający spełnienie dwóch statycznych warunków brzegowych na swobodnym końcu pręta

$$(4.6) \quad y'' = (1-x)^2 \sum_{n=0}^N a_n (1-x)^n = \sum_{n=0}^N a_n (1-x)^{n+2},$$

gdzie a_n i N są to dowolne współczynniki.

Całkując (4.6) dwukrotnie i uwzględniając geometryczne warunki brzegowe otrzymujemy linię ugięcia, spełniającą wszystkie warunki brzegowe

$$(4.7) \quad y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} (1-x)^{n+4} - (1-x) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4}.$$

Wstawiając (4.7) do (4.3) określimy sztywność pręta wzorem

$$(4.8) \quad g(x) = \frac{C_1(1-x) + C_2 - \beta \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} (1-x)^{n+4} - (1-x) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4} \right] - 2\alpha \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)(n+5)} (1-x)^{n+5} - \frac{1}{2} (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + (1-x) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4} \right]}{(1-x)^2 \sum_{n=0}^N a_n (1-x)^n}.$$

Wyrażenie to posiada osobliwość w punkcie $x = 1$, i aby uniknąć nieskończonych przekrojów na końcu pręta, należy ją usunąć przez odpowiedni dobór stałych C_1 i C_2 . Musimy zażądać, aby wartość $x = 1$ była podwójnym zerem licznika wzoru (4.8). Jak łatwo sprawdzić, gdy

$$C_1 = -\beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + 2\alpha \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4} \quad \text{i} \quad C_2 = \beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4},$$

można licznik wzoru (4.8) podzielić przez $(1-x)^2$. Uwzględniając ponadto dodatkowe założenie $g(0) = 1$ otrzymujemy następujący rozkład sztywności pręta oraz związek między bezwymiarowymi obciążeniami

$$(4.9) \quad g(x) = \frac{\alpha \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} - 2 \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)(n+5)} (1-x)^{n+3} \right] - \beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} (1-x)^{n+2}}{\sum_{n=0}^N a_n (1-x)^n},$$

$$(4.10) \quad \alpha \sum_{n=0}^N \frac{n^2 + 9(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)} a_n = \sum_{n=0}^N a_n + \beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)}.$$

Korzystając z powyższych wzorów możemy znaleźć dowolnie wiele rozwiązań podanego problemu stateczności. Oczywiście jesteśmy tu, wobec stosowania metody odwrotnej, «skazani» na rozwiązanie takie, jakie otrzymamy przy założonej linii ugięcia pręta. Mimo to, mając do dyspozycji ogromną ilość możliwości doboru parametrów a_n , możemy (co prawda z dużym nakładem pracy) starać się przybliżyć otrzymany kształt pręta do danego z góry.

Przechodząc do przykładu przyjmijmy $N = 0$, $a_0 \neq 0$ ($\alpha_i = 0$ dla $i > 0$); wobec czego

$$(4.11) \quad g(x) = \alpha \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{30} (1-x)^3 \right] - \frac{1}{12} \beta (1-x)^2, \quad 18\alpha = 60 + 5\beta.$$

Przy sile czołowej równej zeru otrzymujemy pręt bardzo zbliżony do pryzmatycznego

$$(4.12) \quad g(x) = \frac{1}{9} [10 - (1-x)^3], \quad \alpha = \frac{10}{3} = 3,3333$$

(wobec $\alpha = 3,1651$ dla pręta pryzmatycznego).

Na zakończenie należy zauważyć, że przyjęcie prędkości strumienia płynu równej zeru nie prowadzi do rozwiązań ($\beta < 0$), ponieważ stosowane przez nas statyczne kryterium stateczności nie może określić śledzącej siły krytycznej.

5. Sformułowanie problemu optymalnego kształtu pręta niepryzmatycznego o stałej szerokości, opływanego strumieniem płynu

Opierając się na metodzie Czencowa szczegółowo przedstawionej w pracy [8] i równaniu (4.1), w którym $\beta = 0$, możemy sformułować problem optymalizacji kształtu pręta pokazanego na rys. 4.

Do równania ugiętej osi pręta

$$(5.1) \quad [g(x)y'']'' - 2\alpha y' = 0$$

wprowadzimy nową zmienną zależną określoną wzorem

$$(5.2) \quad y' = t'',$$

$$(5.3) \quad [g(x)t''']'' - 2\alpha t'' = 0.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu (5.3) mamy

$$(5.4) \quad g(x)t'''' - 2\alpha t = C_1x + C_2,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, oraz po nowym podstawieniu

$$(5.5) \quad t = v - \frac{C_1x + C_2}{2\alpha},$$

otrzymujemy

$$(5.6) \quad g(x)v'''' - 2\alpha v = 0.$$

Z równania (5.6) obliczamy funkcję $g(x)$ i wstawiamy ją do wzoru na objętość pręta

$$(5.7) \quad V = A_0 l \int_0^1 g^{1/3} dx = A_0 l (2\alpha)^{1/3} \int_0^1 \left(\frac{v}{v''''} \right)^{1/3} dx = A_0 l (2\alpha)^{1/3} \int_0^1 F(v, v''') dx.$$

Pisząc równanie Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (5.7) otrzymujemy

$$(5.8) \quad \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial v''''} \right) - \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

$$(5.9) \quad \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{v}{v''''^2} \left(\frac{v}{v''''} \right)^{-2/3} \right] + \frac{1}{v''''} \left(\frac{v}{v''''} \right)^{-2/3} = 0,$$

a stąd ostatecznie

$$(5.10) \quad v\varphi'''' + v''''\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{v^{1/3}}{v''''^{4/3}}.$$

Rozwiązanie równań (5.10) wydaje się bardzo trudne bez użycia maszyn cyfrowych.

Na zakończenie należy stwierdzić, że uzyskane rozwiązania są obarczone błędami, wynikającymi z przybliżonego charakteru stosowanego prawa opływu. Dalsze uściślenie wyników powinno polegać na zwiększeniu dokładności i uogólnieniu tego prawa.

Pragnę tu również wyrazić podziękowanie prof. dr inż. MICHAŁOWI ŻYCZKOWSKIEMU za cenne wskazówki, udzielone mi podczas wykonywania tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. H. ASHLEY, C. ZARTARIAN, *Piston theory — a new aerodynamics tool for the aeroelastician*, J. Aeronaut. Sci., 12, 23 (1956), 1109–1118.
2. M. A. БИОТ, *The divergence of supersonic wings including chord wise bending*, Report No 67, Cornell Aeronautical Lab., 1954.
3. В. В. БОЛОТИН, *К вопросу об устойчивости пластинки в потоке сжимаемого газа*, Вопросы прочности материалов и конструкций, Изд. А. Н. СССР, Москва 1959, 194–204.
4. W. H. DORRANCE, *Nonsteady supersonic flow about pointed bodies of revolution*, JAS, 8, 18 (1951), 505–511.
5. Z. DŻYGADŁO, *Drgania samowzbudne powłoki cylindrycznej o skończonej długości w opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 8, 10 (1961).
6. Z. DŻYGADŁO, *Drgania samowzbudne zaostrej powłoki stożkowej w opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 7, 10 (1961).
7. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności* (w druku).
8. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż., 2, 17 (1969).
9. J. M. HEDGERETH, *On the flutter of panels at high Mach number*, JAS, 6, 23 (1956), 609–610.
10. А. А. ИЛЮШИН, *Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей*, Прикл. мат. и мех., 6, 20 (1956), 733–755.
11. J. KACPRZYŃSKI, S. KALISKI, *Flutter odkształcalnej rakiety w opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 8, (97), 9 (1960), 3–19.
12. S. KALISKI, L. SOLARZ, *Drgania aerosprężyste i stateczność wirującej rakiety odkształcalnej w opływie zlinearyzowanym*, Biul. WAT, 7, (107), 10 (1961).
13. S. KALISKI, S. WOROSZYŁ, *Flutter odkształcalnej rakiety w opływie naddźwiękowym wg drugiego przybliżenia asymptotycznego*, Biul. WAT, 8 (144), 13 (1964).
14. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływanego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inż., 1, 13 (1965), 19–41.
15. J. W. MILES, *The potential theory of unsteady supersonic flow*, Cambridge 1959.
16. А. А. МОВЧАН, *О колебаниях пластинки, движущейся в газе*, Прикл. мат. и мех., 2, 20 (1956), 231–222.
17. А. А. МОВЧАН, *Об устойчивости панели, движущейся в газе*, Прикл. мат. и мех., 2, 21 (1957), 211–243.
18. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Опираясь на прямой поршневого закон и статический критерий устойчивости, в работе получены несколько решения проблемы устойчивости непризматического стержня, находящегося в потоке жидкости. После формулировки задачи и обсуждения принятых предположений опре-

делена критическая величина скорости потока, для плоского стержня, с экспоненциально изменяющейся шириной. Применяя обратный метод, получены формы плоских стержней, для выше предположенных линий прогиба. В заключении определена проблема оптимальной формы непризматического стержня с постоянной шириной, обтекаемого потоком жидкости и даются дифференциальные уравнения обсуждаемой задачи. Результаты работы надо принимать как приближенные, так как принятый закон не является точным.

S u m m a r y

STABILITY OF NONPRISMATIC BARS IN FLUID FLOW

Applying a simple law of flow about a bar (plate) i.e. «piston theory» (plane section law), some solutions of the stability problem of nonprismatic bars in parallel fluid flow were obtained in this paper.

After formulation of the problem and discussion of simplifying assumptions, the critical velocity value was determined for a flat bar with exponentially varying width.

By a further application of the inverse method, the shapes of flat bars were found under the assumed deflection lines.

Finally, the problem of optimization of a nonprismatic bar shape of constant width in fluid flow was formulated.

Results of this work cannot be treated as exact ones inasmuch as the «piston theory» is an approximate one.

OLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 stycznia 1969 r.
