

## KSZTAŁTOWANIE DYNAMICZNE ELEMENTÓW KONSTRUKCJI

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

### 1. Wprowadzenie

Stały wzrost wymagań odnośnie jakości projektowanych urządzeń i konstrukcji otwiera coraz szersze perspektywy dla zastosowań metod i koncepcji matematycznej teorii optymalizacji. Jedną z ważnych dziedzin, w których metody te mogą znaleźć szerokie zastosowanie, jest kształtowanie dynamicznych własności elementów konstrukcji. Kształtowanie takie jednak, w ścisłym tego słowa znaczeniu, praktycznie jeszcze dzisiaj nie istnieje. Obliczenia dynamiczne wykonywane w stadium projektowania są zazwyczaj tylko obliczeniami sprawdzającymi, czy zaprojektowana konstrukcja spełnia ograniczenia i warunki wymagane przez obowiązujące normy i przepisy, a dotyczące wartości amplitud drgań, naprężeń itd. W wyniku takiego sposobu projektowania uzyskuje się jedno z wielu możliwych rozwiązań dopuszczalnych pod względem dynamicznym. Nie wiadomo nawet w jakim stopniu rozwiązanie to jest zbliżone do pewnego optimum, które pozostaje nadal nieznanne. Nie chodzi nawet o to, aby każdą konstrukcję projektować jako dynamicznie optymalną, choć to byłoby na pewno najlepsze. Znajomość rozwiązania optymalnego poza swym znaczeniem teoretycznym ma jednak również istotne znaczenie praktyczne, gdyż umożliwiałaby świadome kształtowanie dynamicznych własności konstrukcji tak, aby była ona możliwie zbliżona do optymalnej.

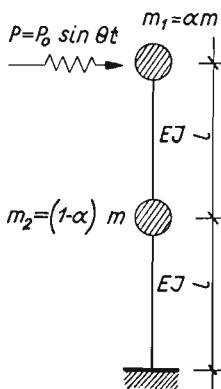
Praca ma na celu omówienie jednej z możliwości optymalnego kształtowania układu o dwóch stopniach swobody przedstawionego na rys. 1. W rozważanym przypadku kształtowanie polega na odpowiednim doborze wartości obu mas skupionych  $m_1$  i  $m_2$  układu, przy ustalonej sztywności pręta  $c$  i założeniu, że działa nań przyłożone do górnej masy poprzeczne wymuszenie harmoniczne o ustalonej częstotliwości kołowej  $\theta$ . Optymalizacja została przeprowadzona czterokrotnie przy zastosowaniu czterech różnych kryteriów jakości charakteryzujących pod względem ilościowym odpowiedź badanego układu na dane wymuszenie. Ponieważ struktura układu jest ustalona przez założenie konkretnego schematu (rys. 1), mamy tu do czynienia z typowym przypadkiem optymalizacji parametrycznej [1]. Jako parametry wprowadzono dwie niezależne wielkości bezwymiarowe  $\alpha$  i  $\lambda$ , przy czym parametr  $\alpha$  określa stosunek masy  $m_1$  do sumy  $m$  obu mas układu, zaś parametr  $\lambda$  — bezwymiarową wartość tej sumy wyrażoną przez wielkości stałe  $c$  i  $\theta$ . Parametrom tym należy nadać takie wartości ze zbioru wartości dopuszczalnych, aby minimalizowały one odpowiedni wskaźnik jakości.

Jakość układu rzeczywistego oceniać można przez porównywanie go z układem idealnym, jakim jest układ pozostający w spoczynku mimo działającego nań obciążenia zmiennego w czasie. Podejście takie pozwala przedstawić wskaźnik jakości w postaci odpowiedniego funkcjonału zależnego od zmiennych stanu układu [2]. W rozważanym przypadku zmiennymi stanu są przemieszczenia mas układu liczone od położenia równowagi statycznej. Ograniczając się do analizy stanu ustalonego przy wymuszeniu harmonicznym, za zmienne stanu przyjmiemy amplitudy drgań  $A_1$  i  $A_2$  obu mas układu i potraktujemy je jako składowe wektora  $\bar{A}$  stanu układu. Wskaźnik jakości możemy więc przedstawić w postaci pewnej funkcji zmiennych  $A_1$  i  $A_2$ . Odpowiedni dobór tej funkcji z jednej strony warunkuje własności układu optymalnego, z drugiej zaś decyduje o pracochłonności obliczeń. Właściwą ocenę różnych kryteriów jakości można przeprowadzić tylko w oparciu o wyniki optymalizacji uzyskane na podstawie tych kryteriów. Z tego też powodu w dalszym ciągu przedstawiono cztery różne podejścia do tego samego zagadnienia.

## 2. Macierz transmitancji

Ruch układu przedstawionego na rys. 1 opisany jest układem równań różniczkowych

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \alpha m \ddot{x}_1 + r_{11} x_1 + r_{12} x_2 &= P_1(t), \\ (1 - \alpha) m \ddot{x}_2 + r_{21} x_1 + r_{22} x_2 &= P_2(t), \end{aligned}$$



Rys. 1

gdzie  $r_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) jest reakcją sprężystą układu w punkcie  $i$ , wywołaną jednostkowym przemieszczeniem w punkcie  $k$ . Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.2) \quad \begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = cR_0, & M &= mM_0, \\ \bar{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, & \bar{P}(t) &= \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie dla układu z rys. 1

$$(2.3) \quad R_0 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

$$(2.4) \quad c = \frac{6EI}{7l^3}, \quad m = m_1 + m_2, \quad \alpha = \frac{m_1}{m},$$

możemy układ równań (2.1) zapisać w postaci macierzowej

$$(2.5) \quad M\ddot{\bar{x}} + R\bar{x} = \bar{P}(t).$$

Dla harmonicznego sygnału wejściowego (wymuszenia)  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \sin \theta t$  odpowiedź układu (ruch mas) w stanie ustalonym  $\bar{x}(t) = \bar{A} \sin \theta t$  określimy wykorzystując jego macierz transmitancji wyznaczoną na podstawie równania ruchu (2.5).

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.6) \quad \bar{a} = \frac{\bar{A}}{l}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{P}_0}{cl}, \quad \lambda = \vartheta^2 = \frac{m}{c} \theta^2 = \frac{7ml^3}{6EI} \theta^2,$$

transmitancja ta wyraża się wzorem

$$(2.7) \quad G = (R_0 - \lambda M_0)^{-1} = W^{-1} G_0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad W = \alpha(1-\alpha)\lambda^2 - 2(1+7\alpha)\lambda + 7$$

jest wielomianem charakterystycznym macierzy  $R - \theta^2 M$ , zaś

$$(2.9) \quad G_0 = \begin{pmatrix} 16 - \lambda(1-\alpha) & 5 \\ 5 & 2 - \lambda\alpha \end{pmatrix}.$$

Związek między bezwymiarowymi wektorami  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  można teraz zapisać w postaci

$$(2.10) \quad \bar{a} = G\bar{b}.$$

W dalszych rozważaniach zajmiemy się przypadkiem szczególnym, gdy  $\bar{b} = (1, 0)$ . Na podstawie (2.7), (2.9) i (2.10) otrzymujemy w tym przypadku

$$(2.11) \quad \bar{a} = W^{-1} \begin{pmatrix} 16 - \lambda(1-\alpha) \\ 5 \end{pmatrix}.$$

### 3. Minimalizacja energii

Zadanie nasze będzie teraz polegać na zminimalizowaniu wektora odpowiedzi  $\bar{a}$ . Minimalizacja ta może być przeprowadzona na różne sposoby w zależności od przyjętego kryterium jakości.

W pierwszym wariantcie obliczenia przyjmijmy, że funkcją, którą będziemy minimalizować, jest maksymalna energia sprężysta układu

$$U = \frac{1}{2} \bar{A}' R \bar{A} = \frac{1}{2} c l^2 \bar{a}' R_0 \bar{a} = c l^2 W^{-2} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 7(1-\alpha)\lambda + 56].$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie posługiwać się energią bezwymiarową

$$(3.1) \quad z = \frac{U}{cI^2} = W^{-2}[(1-\alpha)^2\lambda^2 - 7(1-\alpha)\lambda + 56].$$

Dla jakościowego zbadania funkcji  $z(\alpha, \lambda)$  wykorzystamy wyrażenia dla jej pochodnych cząstkowych.

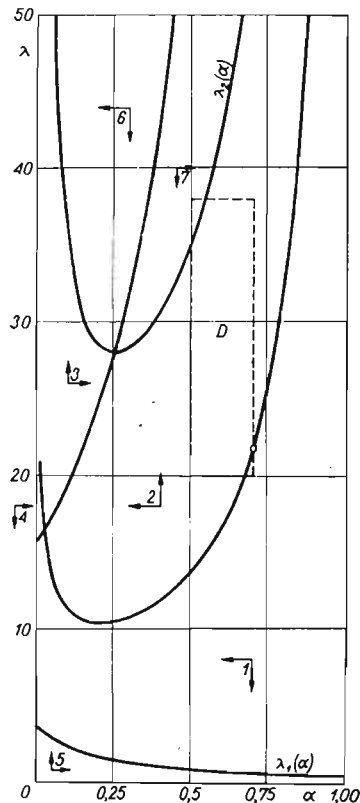
$$(3.2) \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 2\lambda W^{-3}[-2(1-\alpha)^3\lambda^3 + (1-\alpha)(46 - 21\alpha)\lambda^2 - 336(1-\alpha)\lambda + 1617],$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2W^{-3}[-2\alpha(1-\alpha)^3\lambda^3 + 21\alpha(1-\alpha)^2\lambda^2 - 336\alpha(1-\alpha)\lambda + 175 + 1617\alpha].$$

Wykreślając na płaszczyźnie parametrów  $(\alpha, \lambda)$  krzywe określone równaniami

$$W = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

otrzymujemy podział tej płaszczyzny na obszary charakteryzujące się stałością znaków obu składowych wektora grad  $z$ . Kierunki tych składowych dla poszczególnych obszarów



Rys. 2

płaszczyzny  $(\alpha, \lambda)$  przedstawiono na rys. 2. Zauważyć należy, że równanie  $W = 0$  określa dwie krzywe  $\lambda_1(\alpha)$  i  $\lambda_2(\alpha)$  obrazujące zależności bezwymiarowych częstości drgań własnych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  od parametru  $\alpha$ . Wzdłuż obu tych krzywych  $z = \infty$ .

4. Minimalizacja kwadratu normy  $|\bar{a}|^2$  wektora  $\bar{a}$ 

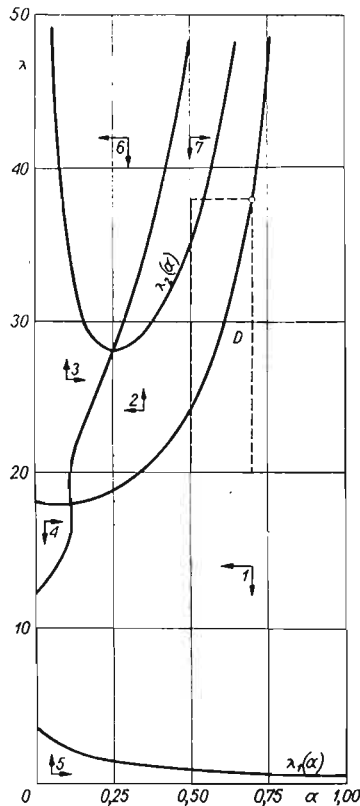
Minimalizację odpowiedzi układu możemy również przeprowadzić wychodząc z rozważań czysto geometrycznych. Przyjmijmy za kryterium jakości funkcję  $z(\alpha, \lambda)$  określoną jako kwadrat normy wektora (2.11):

$$(4.1) \quad z = |\bar{a}|^2 = W^{-2}[(1-\alpha)^2\lambda^2 - 32(1-\alpha)\lambda + 281],$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 2\lambda W^{-3}[-(1-\alpha)^3\lambda^3 + 48(1-\alpha)^2\lambda^2 - (768 - 793\alpha)\lambda + 4046],$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2W^{-3}[-\alpha(1-\alpha)^3\lambda^3 + 48\alpha(1-\alpha)^2\lambda^2 - (1-\alpha)(25 + 793\alpha)\lambda + 450 + 4046\alpha].$$

Podział płaszczyzny  $(\alpha, \lambda)$  na obszary monotoniczności funkcji  $z(\alpha, \lambda)$  pokazano na rys. 3. W porównaniu z rys. 2 stwierdzamy pewne podobieństwo obu podziałów. Podobieństwo



Rys. 3

to wynika stąd, że oba kryteria jakości są odpowiednimi formami kwadratowymi współrzędnych wektora odpowiedzi  $\bar{a}$ .

W wyrażeniu (4.1) dla funkcji kryterialnej kwadraty obu współrzędnych wektora  $\bar{a}$  występują z jednakowymi współczynnikami równymi jedności. Z tego też powodu obie amplitudy drgań  $a_1$  i  $a_2$  minimalizowane są w równym stopniu. W przypadkach, kiedy

zaśleży nam na tym, aby jedna z amplitud była minimalizowana skuteczniej niż druga, należy posłużyć się ogólniejszym kryterium jakości o postaci  $z = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2$  z odpowiednio dobranymi dodatnimi współczynnikami  $c_1$  i  $c_2$ . Z przypadkiem takim spotykamy się na przykład wówczas, kiedy w poziomie jednej z mas istnieje ostrzejsze ograniczenie dla amplitudy.

### 5. Minimalizacja normy $z = |a_1| + |a_2|$

Przyjmijmy teraz za kryterium jakości normę wektora  $\bar{a}$  o postaci  $z = |a_1| + |a_2|$ . Na podstawie wzoru (2.11) otrzymujemy

$$(5.1) \quad z(\alpha, \lambda) = \begin{cases} z_1 = |W|^{-1}[21 - (1-\alpha)\lambda], & \text{gdy } a_1 = 16 - (1-\alpha)\lambda > 0, \\ z_2 = |W|^{-1}[(1-\alpha)\lambda - 11], & \text{gdy } a_1 = 16 - (1-\alpha)\lambda < 0, \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = \lambda W^{-1} |W|^{-1} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - (37 - 42\alpha)\lambda + 301],$$

$$(5.3) \quad \frac{\partial z_2}{\partial \alpha} = -\lambda W^{-1} |W|^{-1} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - (27 - 22\alpha)\lambda + 161],$$

$$(5.4) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = W^{-1} |W|^{-1} [\alpha(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 42\alpha(1-\alpha)\lambda + 35 + 301\alpha],$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial z_2}{\partial \lambda} = -W^{-1} |W|^{-1} [\alpha(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 22\alpha(1-\alpha)\lambda + 15 + 161\alpha].$$

Obszary monotoniczności funkcji  $z(\alpha, \lambda)$  pokazano na rys. 4. Zamiast przyjętego kryterium można i w tym przypadku posłużyć się kryterium ogólniejszym  $z = c_1 |a_1| + c_2 |a_2|$ .

### 6. Minimalizacja normy $z = \max(|a_1|, |a_2|)$

Jako ostatni rozważymy przypadek minimalizacji na podstawie kryterium jakości  $z = \max(|a_1|, |a_2|)$ . Wykorzystując wzór (2.11) stwierdzamy, że

$$|a_1| \leq |a_2|, \quad \text{gdy } \frac{11}{1-\alpha} \leq \lambda \leq \frac{21}{1-\alpha},$$

$$|a_1| \geq |a_2|, \quad \text{gdy } \lambda \leq \frac{11}{1-\alpha} \quad \text{lub} \quad \lambda \geq \frac{21}{1-\alpha}.$$

Dzięki temu rozważane kryterium przybiera postać

$$(6.1) \quad z(\alpha, \lambda) = \begin{cases} |a_1| = |W|^{-1}|16 - (1-\alpha)\lambda|, & \text{gdy } \lambda \leq \frac{11}{1-\alpha} \quad \text{lub} \quad \lambda \geq \frac{21}{1-\alpha}, \\ |a_2| = 5|W|^{-1}, & \text{gdy } \frac{11}{1-\alpha} \leq \lambda \leq \frac{21}{1-\alpha}, \end{cases}$$

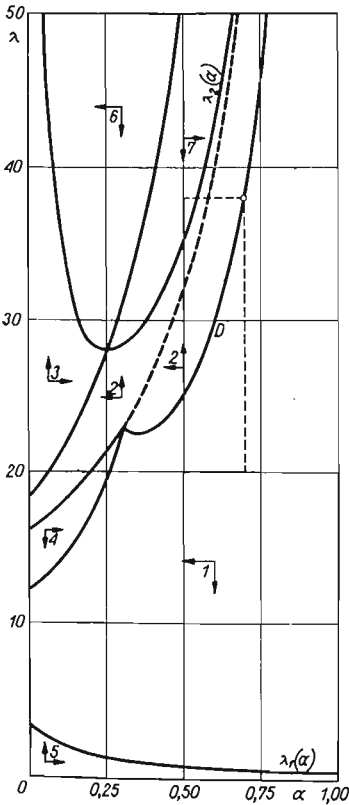
$$(6.2) \quad \frac{\partial |a_1|}{\partial \alpha} = \lambda a_1 |a_1|^{-1} W^{-2} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 32(1-\alpha)\lambda + 231],$$

$$(6.3) \quad \frac{\partial |a_2|}{\partial \alpha} = -5\lambda W^{-1} |W|^{-1} [(1-2\alpha)\lambda - 14],$$

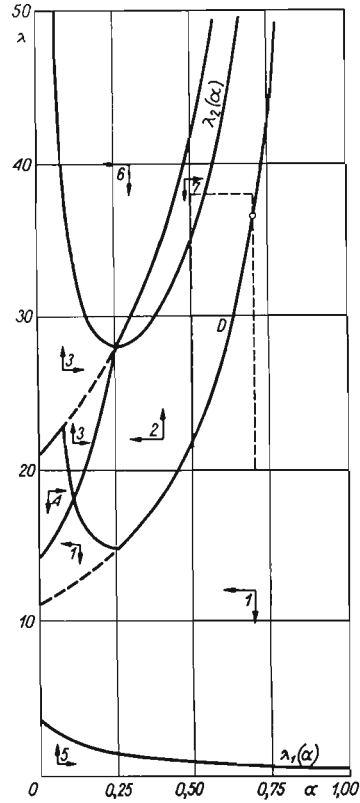
$$(6.4) \quad \frac{\partial |a_1|}{\partial \lambda} = a_1 |a_1|^{-1} W^{-2} [\alpha(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 32\alpha(1-\alpha)\lambda + 25 + 231\alpha],$$

$$(6.5) \quad \frac{\partial |a_2|}{\partial \lambda} = -10W^{-1} |W|^{-1} [\alpha(1-\alpha)\lambda - (1+7\alpha)].$$

Wyniki analizy ilustruje rys. 5. Podobnie jak i w poprzednich przypadkach rozważane kryterium można uogólnić do postaci  $z = \max(c_1|a_1|, c_2|a_2|)$ .



Rys. 4



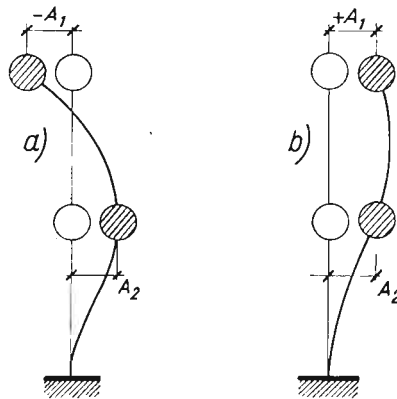
Rys. 5

### 7. Wnioski

Wyniki przeprowadzonej analizy przedstawione graficznie na rys. 2, 3, 4 i 5 pozwalają ustalić pewne fakty oraz wyciągnąć wnioski istotne dla praktycznego wykorzystania uzyskanych rezultatów.

Przede wszystkim jest sprawą oczywistą, że wyniki optymalizacji przeprowadzonej przy tych samych ograniczeniach, ale na podstawie różnych kryteriów jakości, mogą różnić się od siebie. Porównywanie tych wyników może mieć sens jedynie z punktu widzenia pewnego nowego kryterium. Porównywanie z punktu widzenia kryteriów zastososo-

wanych przy optymalizacji jest pozbawione sensu, gdyż każdy z wyników jest optymalny, choć każdy w innym sensie. Tak więc wyniki otrzymane na podstawie rys. 2, 3, 4 i 5 można by na przykład porównywać z punktu widzenia stateczności wartości  $z_{\min} = z(\alpha_0, \lambda_0)$  względem wariacji parametrów  $\alpha$  i  $\lambda$ . Problem stateczności nabiera szczególnej wagi w momencie, gdy deterministyczny model rozważanego układu zastąpimy modelem probabilistycznym uwzględniającym np. warunki wykonawstwa budowlanego. Rozważając wykresy z rys. 2, 3, 4 i 5 z tego punktu widzenia spostrzegamy od razu, że wyniki optymalizacji odznaczające się największą statecznością względem wariacji  $\alpha$  i  $\lambda$ , otrzymuje się na podstawie kryterium energetycznego (rys. 2). Rozważmy bowiem na przykład obszar dopuszczalny  $D$  określony nierównościami:  $0,5 \leq \alpha \leq 0,7$ ;  $20 \leq \lambda \leq 38$ . Na podstawie kryterium energetycznego otrzymujemy w tym przypadku rozwiązanie  $(\alpha_0, \lambda_0) = (0,7; 21,9)$ , zaś na podstawie pozostałych trzech kryteriów geometrycznych odpowiednio rozwiązania:  $(0,7; 38,0)$ ,  $(0,7; 38,0)$ ,  $(0,7; 36,6)$ .<sup>§</sup> Pomimo dużej zgodności



Rys. 6

trzech ostatnich wyników, wynik pierwszy wydaje się być najlepszy z punktu widzenia stateczności. Rozwiązanie  $(0,7; 21,9)$  znajduje się bowiem w obszarze małego gradientu funkcji kryterialnej, podczas gdy pozostałe rozwiązania wypadają zbyt blisko krzywej  $\lambda_2(\alpha)$  wzdłuż której  $z = \infty$ .

O wyższości kryterium energetycznego nad omówionymi trzema kryteriami geometrycznymi świadczy również fakt następujący. Minimalizacja energii układu jest równoważna nie tylko minimalizacji amplitud drgań tego układu, lecz również minimalizacji momentów zginających występujących w tym układzie. Z geometrycznego punktu widzenia, reprezentowanego przez kryteria geometryczne, oba przypadki przedstawione na rys. 6 są całkowicie równoważne, podczas gdy podejście energetyczne zdecydowanie kwalifikuje przypadek a) jako niekorzystniejszy ze względu na znacznie większe momenty zginające.

Kryteria geometryczne w omawianym aspekcie energetycznym reprezentują więc podejście czysto formalne i nie uwzględniające bardzo istotnych czynników. Z powyższych rozważań wynika ponadto, że można by również sformułować takie kryteria jakości,



które pozwoliłyby minimalizować siły wewnętrzne układu np. w określonych jego przekrojach.

Wyznaczanie optymalnych wartości parametrów  $\alpha$  i  $\lambda$  polega, jak wiadomo, na poszukiwaniu takiego punktu danego obszaru dopuszczalnego  $D$ , w którym funkcja kryterialna  $z(\alpha, \lambda)$  przybiera wartość najmniejszą  $z_{\min} = z(\alpha_0, \lambda_0)$ . Jeżeli optymalizację przeprowadzamy dla prostokątnych obszarów dopuszczalnych  $D$  korzystając z odpowiedniego wykresu (rys. 2, 3, 4 lub 5), wówczas mogą mieć miejsce dwa przypadki. W przypadku pierwszym istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia:  $\alpha_0$  i  $\lambda_0$ . W przypadku drugim mamy do czynienia z niejednoznacznością rozwiązania spowodowaną występowaniem kilku minimów lokalnych funkcji  $z(\alpha, \lambda)$ . Niejednoznaczność tę usuwamy obliczając wartości wszystkich minimów i przyjmując za  $\alpha_0$  i  $\lambda_0$  współrzędne tego punktu, dla którego  $z = z_{\min}$ . Dla obszarów dopuszczalnych  $D$  o dowolnym kształcie rozwiązanie zagadnienia wymaga zastosowania metod programowania nieliniowego [3].

Na podstawie uzyskanego rozwiązania optymalnego  $\alpha_0, \lambda_0$  możemy już bezpośrednio obliczyć optymalne wartości obu mas  $m_1$  i  $m_2$  układu z rys. 1. Wykorzystując związki (2.4) otrzymujemy

$$m_1 = \alpha_0 \lambda_0 \frac{c}{\theta^2}, \quad m_2 = (1 - \alpha_0) \lambda_0 \frac{c}{\theta^2}.$$

Wyznaczenie wartości obu mas  $m_1$  i  $m_2$  kończy omawiany proces optymalizacji. Proces ten z założenia był procesem najkorzystniejszego doboru tylko dwóch wybranych parametrów przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów układu. Jasne jest, że takie ujęcie zagadnienia prowadzi do wyników, które mogą nie być zadowolające z bardziej ogólnego punktu widzenia. I tak, na przykład, ujmując sprawę optymalizacji kompleksowo można by zażądać dla układu z rys. 1 optymalnego doboru wszystkich jego parametrów przy spełnieniu wszystkich istotnych warunków, ograniczających amplitudy drgań, naprężenia itp. Jednak takie sformułowanie zagadnienia, jakkolwiek możliwe i celowe, wykraczałoby znacznie poza ramy niniejszej pracy. Jej głównym celem jest porównanie czterech wybranych kryteriów jakości w oparciu o uzyskane wykresy pozwalające przeprowadzić optymalizację przy danym obszarze dopuszczalnym. Takie graficzne przedstawienie wyników analizy jest możliwe jedynie przy optymalizacji dwuparametrowej, co było jednym z głównych powodów ograniczenia rozważań do dwóch zmiennych niezależnych.

Pewnego omówienia wymaga również kwestia przyjmowania obszarów dopuszczalnych. W rozważaniach ograniczono się do przypadku obszarów prostokątnych ze względu na to, że obszary takie otrzymuje się przez niezależne określenie dopuszczalnych przedziałów zmienności dla obu parametrów optymalizacji. Określenie tych przedziałów, które mogą być także nieograniczone, wynika z warunków wytrzymałościowych, konstrukcyjnych i innych jakie musi spełniać rozważany układ.

Przeprowadzona w p. 3 analiza ma również znaczenie praktyczne. Minimalizacja odpowiedzi układu na dane wymuszenie harmoniczne jest procesem strojenia, a raczej rozstrajania tego układu z uwagi na zjawiska rezonansowe. W naszym przypadku rozstrajanie odbywa się na drodze właściwego doboru mas. Znajomość rozwiązania najkorzyst-

niejszego z dynamicznego punktu widzenia, dla istniejącej, ale nie optymalizowanej konstrukcji, pozwala poprawiać jej dynamiczną pracę w przypadku, gdy nie jest ona zadowalająca. Ponieważ zmianę mas układu, w granicach określonych warunkami wytrzymałościowymi, można realizować w stosunkowo prosty sposób, zatem rezultaty omawianej analizy można z dużym powodzeniem wykorzystać w zagadnieniach czysto praktycznych. Zauważmy również, że do schematu z rys. 1 można sprowadzić jednonawowy płaski układ ramowy piętrowej hali przemysłowej wykonującej drgania antysymetryczne wymuszone harmonicznie. Źródłem wymuszenia może być np. wentylator zamocowany na konstrukcji dachu. Nawiasem trzeba tu nadmienić, że właśnie problemy praktyczne omawianego typu stały się bodźcem do napisania niniejszej pracy.

Pomimo dość zawężonego ujęcia omawiania optymalizacja jest jednak procesem bezpośredniego kształtowania własności dynamicznych układu na podstawie przyjętego kryterium jakości. Uogólnienie tego procesu przez odpowiednie powiększenie liczby parametrów biorących w nim udział oraz uwzględnienie wszystkich istotnych ograniczeń można uważać za nową metodę racjonalnego projektowania konstrukcji i ich elementów na obciążenia zmienne w czasie. Nowość metody należy oczywiście rozumieć w tym sensie, że opiera się ona na koncepcjach teorii sterowania i optymalizacji, które jak dotąd właściwie nie znalazły zastosowania w dynamice konstrukcji.

Problem optymalizacji liniowego układu drgającego jest jednak, jak widzieliśmy, problemem niestety nieliniowym z zakresu programowania matematycznego [3] i jego dostatecznie ogólne ujęcie wiąże się z poważnymi trudnościami matematycznymi. Dlatego też wydaje się, że zastosowanie optymalizacji jako ogólnej i powszechnej metody projektowania układów drgających jest dopiero sprawą przyszłości.

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. W. MERRIAM III, *Teoria optymalizacji i projektowanie układów sterowania automatycznego*, WNT, Warszawa 1967.
2. J. T. TOU, *Nowoczesna teoria sterowania*, WNT, Warszawa 1967.
3. G. HADLEY, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, London 1964.

#### Р е з ю м е

#### ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Рассматривается система, в виде консольного стержня, с двумя сосредоточенными массами  $m_1$  и  $m_2$  подверженного гармоническому вынуждению силой  $P_0 \sin \theta t$ , действующей на конце консоли (Рис. 1). В качестве параметров, подверженных оптимализации принимается соотношение масс  $m_1$ ,  $m_2$  и их суммарное значение. Применяется четыре разные критерия оптимизации, связанные с амплитудами колебаний системы. Проводится качественный анализ полученных результатов.

## S u m m a r y

## OPTIMUM DYNAMIC DESIGN OF STRUCTURAL ELEMENTS

An elastic cantilever rod with two concentrated masses  $m_1, m_2$  is subject to harmonic vibrations under the action of the force  $P_0 \sin \theta t$  applied to the free end of the rod (Fig. 1). The variable parameters of the optimization process are the total value and the proportions of masses  $m_1, m_2$ . Four different optimization criteria connected with the amplitudes of vibrations of the system have been adopted. Qualitative discussion of the results has been presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 grudnia 1968 r.*

---