

O PEWNYM PRZYPADKU ANIZOTROPII

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

Dotychczasowe badania eksperymentalne warunku plastyczności sprowadzały się głównie do śledzenia zmian pewnej powierzchni, która jest geometrycznym przedstawieniem matematycznego sformułowania takiego warunku w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń. Ze względu na trudności związane z techniką eksperymentu, doświadczenia przeprowadza się zazwyczaj dla płaskiego stanu naprężenia, gdy jedna ze składowych stanu naprężenia jest równa zero; na przykład $\sigma_z = 0$. Taki schemat doświadczalny odpowiada przeprowadzaniu prób na cienkościennych próbkach rurkowych lub na blachach rozciąganych w odpowiedni sposób. Zwykle doświadczenia takie są przeprowadzane dla materiałów, które można uważać za izotropowe przy małych wartościach odkształceń, na przykład $\epsilon_{\max} \approx 0,005$. Wyniki są przedstawiane w postaci powierzchni lub przekrojów tej powierzchni dla jednakowych wartości odkształceń w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Jak wiadomo, podczas odkształcania metali w stanie wyżarzonym do wartości odkształceń w przybliżeniu większych niż 0,5%, ($\epsilon \geq 0,005$), daje się wyraźnie zauważyć zjawisko anizotropii. Wówczas poszczególne krzywe umocnienia są funkcją kierunku, przy czym główne kierunki anizotropii mogą się różnić od kierunków naprężeń głównych.

Zwykle można wyróżnić dwa przypadki anizotropii, a mianowicie:

a. Materiał, który można uznać początkowo za izotropowy nabywa cech anizotropowych podczas procesu deformacji. Jest to przypadek tzw. anizotropii odkształceniowej. Jako przykład takiego zachowania się można wymienić rury lub blachy w stanie wyżarzonym poddawane odkształceniowi plastycznemu o odpowiednio dużej wartości.

b. Anizotropia, która istnieje już w materiale przed przystąpieniem do badań. Jest to przypadek tzw. anizotropii rodzimej. Przykładem takiego zachowania się są plastiki zbrojone, drewno itp.

Przedmiotem dyskusji w niniejszej pracy jest przypadek a.

Jednym z warunków plastyczności dla ciał anizotropowych jest warunek przedyskutowany w pracy [2] oraz [3]

$$(1) \quad F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1,$$

gdzie F, G, H, L, M, N są pewnymi parametrami charakteryzującymi bieżący stan anizotropii w ciele. Równocześnie pomija się efekt Bauschingera i wpływ ciśnienia hydro-

statycznego, a główne osie anizotropii pokrywają się z układem współrzędnych x, y, z , w których opisuje się stan naprężenia. W przypadku istnienia izotropii równanie (1) redukuje się do warunku plastyczności Hubera-Misesa; wówczas

$$L = M = N = 3H = 3G = 3F$$

oraz

$$2F = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \sigma^2 = 3k^2,$$

gdzie σ jest naprężeniem plastycznego płynięcia przy jednoosiowym rozciąganiu, k stanowi analogiczną wielkość przy czystym ścinaniu. Bardziej ogólną dyskusję warunków plastyczności z uwzględnieniem anizotropii zamieszczono w pracy [5], gdzie warunek (1) wynika jako jeden z przypadków szczególnych.

Dla przypadku płaskiego stanu naprężenia, tj. dla $\sigma_z = 0$, warunek (1) przyjmuje postać

$$(2) \quad (G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1;$$

gdzie istnieje izotropia, warunek plastyczności przedstawia elipsoidę (3) w przestrzeni naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,

$$(3) \quad \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2.$$

Tak więc w przypadku płaskiego stanu naprężenia pozostają do wyznaczenia cztery stałe F, G, H, N , oczywiście o ile traktować je jako stałe, a nie jako parametry zależne od odkształcenia.

Gdy próbki wycina się z arkusza blachy pod kątem α w stosunku do kierunku walcowania, wówczas naprężenie plastycznego płynięcia σ w funkcji kierunku α można przedstawić jako następującą zależność

$$(4) \quad \sigma(\alpha) = [F\sin^4\alpha + G\cos^4\alpha + H(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2N\sin^2\alpha\cos^2\alpha]^{-1/2}.$$

Równocześnie w przypadku płaskiego stanu naprężenia, stosunek odkształcenia w kierunku poprzecznym do osi wyciętej pod kątem α próbki do odkształcenia po grubości blachy wyraża się zależnością

$$(5) \quad q = \frac{H(2N - F - G - 4H)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{F\sin^2\alpha + G\cos^2\alpha}.$$

Geometryczne przedstawienie warunku (2) w postaci pewnej powierzchni różni się nieco od elipsoidy (3). Kilka tego typu powierzchni dla różnych materiałów anizotropowych zostało przedstawionych w pracy [1].

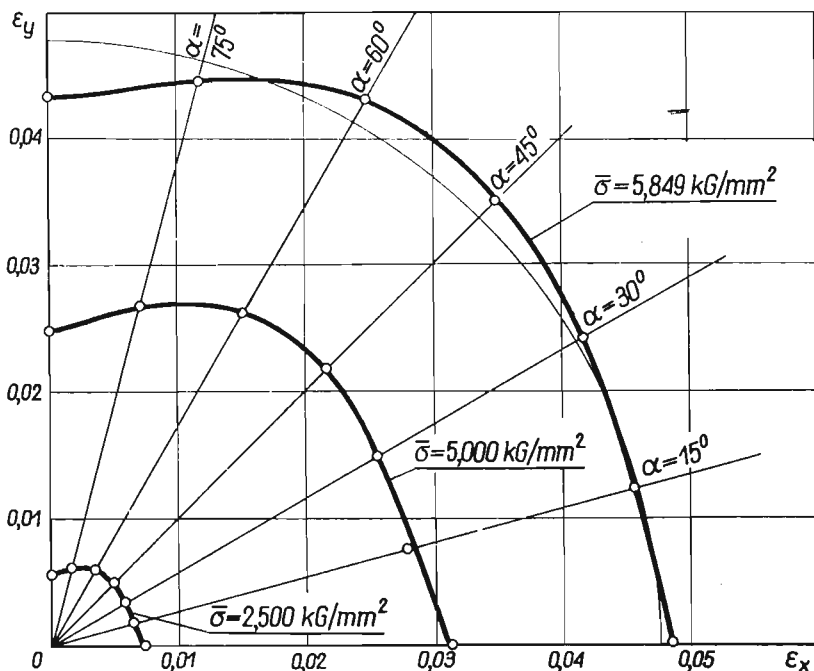
Celem obecnej pracy jest dyskusja stwierdzonego doświadczalnie pewnego przypadku anizotropii blachy z technicznie czystego aluminium w stanie wyżarzonym.

Eksperymenty przeprowadzono w następujący sposób. Arkusz blachy aluminiowej (99,6% Al) o grubości $g = 1,40$ mm pocięto na duże próbki o wymiarach 250×300 mm i następnie wyżarzono rekrytalizacyjnie w temperaturze 450°C w czasie jednej godziny. Tak przygotowane próbki służyły bądź do pocięcia na małe próbki celem przeprowadzenia prób rozciągania w siedmiu kierunkach w odniesieniu do kierunku walcowania, bądź do rozciągania w postaci dużej próbki w kierunku zgodnym z kierunkiem walcowania, a następ-

nie do dalszych prób rozciągania dla kolejnych siedmiu kierunków. W ten sposób badano anizotropię odkształceniową lub wpływ wstępnego odkształcenia przy $\alpha = 0$ (kierunek wstępnego rozciągania pokrywa się z kierunkiem walcowania) na późniejszy stan anizotropii blachy. Podobną metodę badań, jednak w innym celu, zastosowano w pracy [6].

Duże próbki rozciągano w specjalnych uchwytach na zrywarce hydraulicznej typu ZD-10 z automatyczną rejestracją wydłużenia za pomocą urządzenia typu Mke z tensometrem indukcyjnym. Taka technika eksperymentu umożliwiała uzyskiwanie dokładnych krzywych umocnienia do odkształcenia maksymalnego $\epsilon_{\max} \approx 0,05$; baza tensometru $l_0 = 20$ mm. Mniejsze próbki rozciągano na odpowiednio mniejszej maszynie. Wszystkie doświadczenia przeprowadzono w przybliżeniu stałej prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{sek}^{-1}$.

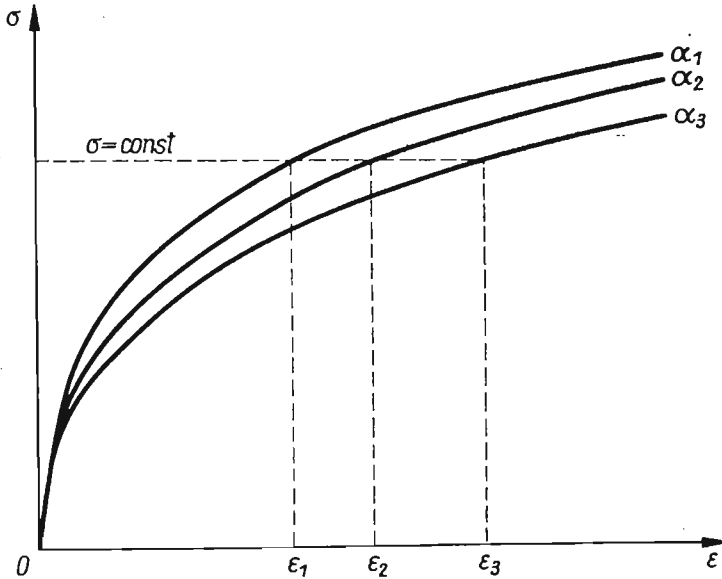
Jako jeden z wyników doświadczeń przeprowadzonych dla badanego aluminium w stanie wyżarzonym uzyskano wykresy biegunowe wielkości odkształceń w funkcji kierunku α przy stałej średniej wartości naprężenia $\bar{\sigma} = \text{const}$, ($\bar{\sigma} = 2,500 \text{ kG/mm}^2$) oraz $\bar{\sigma} = 5,849 \text{ kG/mm}^2$. Wykres przedstawiono na rys. 1. Korzyści z przedstawienia



Rys. 1. Wykres biegunowy wielkości odkształceń w funkcji kierunku α dla stałych wartości naprężenia $\bar{\sigma} = 5,849 \text{ kG/mm}^2$ oraz $\bar{\sigma} = 2,500 \text{ kG/mm}^2$; $\alpha = 0^\circ$ jest kierunkiem walcowania. Poszczególne punkty stanowią średnie dla trzech próbek

własności anizotropowych w takich współrzędnych przy większych odkształceniach plastycznych wynikają z rys. 2 i są oczywiste, gdyż wówczas anizotropia jest bardziej wyraźnie widoczna. Podobne wykresy sporządzono również dla innych wartości naprężeń uzyskując podobne krzywe. Na podstawie rys. 1 można stwierdzić, że badana blacha

aluminiowa ma najwyższe własności wytrzymałościowe w kierunku prostopadłym do kierunku walcowania, tj. dla $\alpha = 90^\circ$. Dla tego kierunku krzywa umocnienia leży najwyżej. Minimum własności wytrzymałościowych obserwuje się w zakresie $45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$, natomiast dla kierunku walcowania własności wytrzymałościowe są zbliżone do wartości średniej. Średnią wartość wydłużenia dla $\bar{\sigma} = 5,849 \text{ kG/mm}^2$ zaznaczono łukiem okręgu cienką linią.



Rys. 2. Schematyczne wyjaśnienie sposobu w jaki otrzymano rys. 1

Pamiętając o zależności (4) dla płaskiego stanu naprężenia należy stwierdzić, iż aby wyznaczyć parametry anizotropii F , G , H , N należałoby znać wartości naprężenia plastycznego płynięcia dla czterech wybranych kierunków. Jednak zagadnienie to jest niewyznaczalne w ten sposób, gdyż nawet w płaskim stanie naprężenia stałe anizotropii F , G oraz H są również funkcjami naprężenia plastycznego płynięcia w kierunku z , tj. po grubości blachy. Z tego powodu należy równocześnie uwzględnić równanie (5).

Celem wyznaczenia stałych anizotropii dla badanego aluminium, przyjęto zgodnie z rys. 1 charakterystyczne wartości naprężenia plastycznego płynięcia dla trzech kątów α , a mianowicie dla $\alpha = 0^\circ$, $\sigma(0^\circ)$; dla $\alpha = 60^\circ$, $\sigma(60^\circ) = \sigma_{\min}$; dla $\alpha = 90^\circ$, $\sigma(90^\circ) = \sigma_{\max}$. W ten sposób warunek (5) dla $\alpha = 0^\circ$ i równanie (4) dla trzech podanych wartości kątów α dostarczają układu czterech równań z niewiadomymi F , G , H , N . Otrzymano następujący układ równań

$$\begin{aligned}
 qG - H &= 0, \\
 G + H &= \frac{1}{\sigma^2(0^\circ)}, \\
 F + H &= \frac{1}{\sigma^2(90^\circ)},
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$9F + G + 4H + 6N = \frac{16}{\sigma^2(60^\circ)}.$$

W wyniku rozwiązania układu równań (6) otrzymuje się szukane parametry anizotropii

$$F = \frac{1}{\sigma^2(90^\circ)} - \frac{q}{1+q} \frac{1}{\sigma^2(0^\circ)},$$

$$G = \frac{1}{1+q} \frac{1}{\sigma^2(0^\circ)},$$

$$H = \frac{q}{1+q} \frac{1}{\sigma^2(0^\circ)},$$

$$N = \frac{10q-2}{12(1+q)} \frac{1}{\sigma^2(0^\circ)} + \frac{8}{3} \frac{1}{\sigma^2(60^\circ)} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma^2(90^\circ)}.$$

Dla znalezienia liczbowych wartości współczynników anizotropii wybrano z danych doświadczalnych następujące wartości $\sigma(\alpha)$

$$\sigma(0^\circ) = 5,90 \text{ kG/mm}^2,$$

$$\sigma(60^\circ) = 5,77 \text{ kG/mm}^2,$$

$$\sigma(90^\circ) = 6,30 \text{ kG/mm}^2.$$

Wszystkie dane odnoszą się do wartości odkształcenia $\varepsilon_x \approx 0,05$. Zmierzono również dla jednej serii próbek wartości q ; średnia wartość q dla $\varepsilon_x = 0,05$ wynosi $q \approx 1,05$. W wyniku obliczeń uzyskano następujące wartości liczbowe współczynników anizotropii dla $\varepsilon = 0,05$:

$$F = 0,01048 \text{ mm}^4/\text{kG}^2,$$

$$G = 0,01401 \text{ mm}^4/\text{kG}^2,$$

$$H = 0,01471 \text{ mm}^4/\text{kG}^2,$$

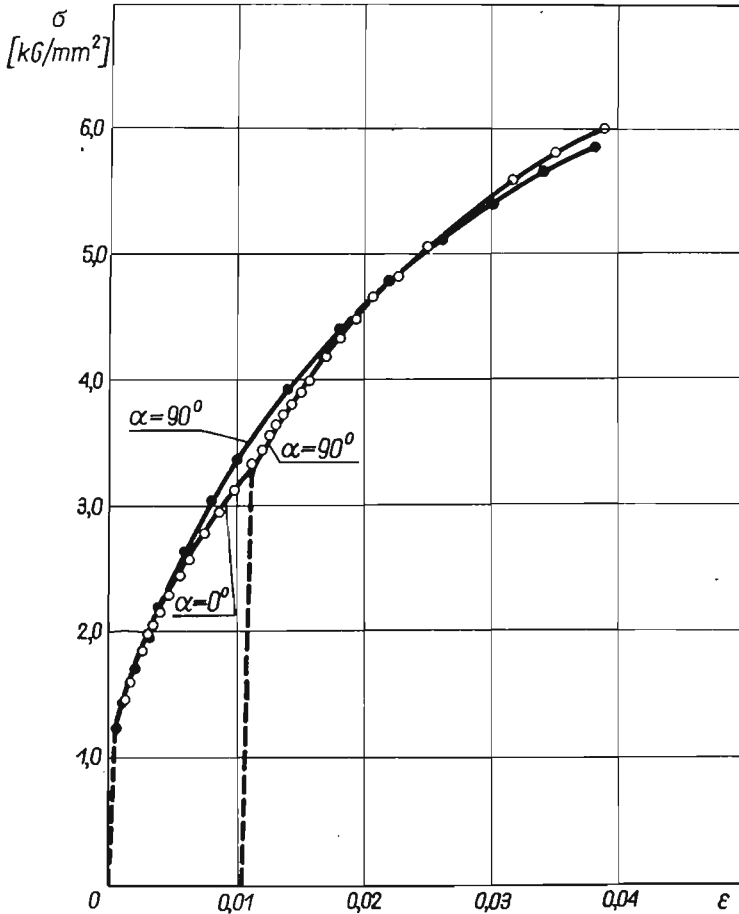
$$N = 0,06613 \text{ mm}^4/\text{kG}^2.$$

Jak wspomniano poprzednio, przeprowadzono również badania celem stwierdzenia wpływu wstępnego odkształcenia dla $\alpha = 0^\circ$ (odkształcenie wstępne zgodne z kierunkiem walcowania) na późniejsze własności anizotropowe blachy. W tym celu duże próbki odkształcano wstępnie do trzech wartości odkształceń ε_0 ; $(\varepsilon_0)_1 \approx 0,01$, $(\varepsilon_0)_2 \approx 0,03$, $(\varepsilon_0)_3 \approx 0,05$, dalej wycinano próbki mniejsze i poddawano je dalszemu odkształcaniu dla pozostałych sześciu kierunków. Wartości wybranych kątów podano na rys. 1. Na wykresach rys. 3 i 4 przedstawiono uzyskane wyniki dla $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$. Ponieważ tensometr indukcyjny wraz z układem rejestrującym został przystosowany do pomiaru odkształceń większych, przeto otrzymane krzywe umocnienia nie są zbyt dokładne w obszarze odkształceń sprężystych, z tego też powodu te części krzywych zaznaczono liniami przerywanymi.

W wyniku tych doświadczeń można stwierdzić, że odkształcanie wstępne blachy wykazującej cechy anizotropii odkształceniowej w kierunku słabszym, tj. dla $\alpha = 0^\circ$, powoduje równoczesne bardziej intensywne umacnianie się tej blachy w kierunku prostopadłym, tj. dla $\alpha = 90^\circ$. Podczas ponownego odkształcania dla $\alpha = 90^\circ$ omawiany efekt daje się zauważyć jednak wyłącznie przy większych wartościach odkształcenia ε^* , tj. około $\varepsilon^* \geq 0,5\%$ dla odkształcenia wstępnego $\varepsilon_0 \approx 0,05$. Przy mniejszych odkształceniach dodat-

kowych ε^* efekt ten może pozostać w ogóle niezauważony i materiał mógłby być uważany za w przybliżeniu izotropowy. Anizotropia odkształceniowa może pozostawać również niezauważalna dla stanu wyżarzonego przy małych wartościach odkształceń początkowych. Zagadnienie to jest szczególnie ważne z punktu widzenia weryfikacji doświadczalnej warunków plastyczności dla materiałów odkształconych wstępnie.

Podane fakty prowadziłyby do dalszych wniosków, a mianowicie po pierwsze, przy obciążeniach proporcjonalnych ze stanu wyżarzonego powierzchnia plastyczności, posiadająca początkowo w obecnym przypadku kształt zbliżony do elipsoidy, stopniowo,



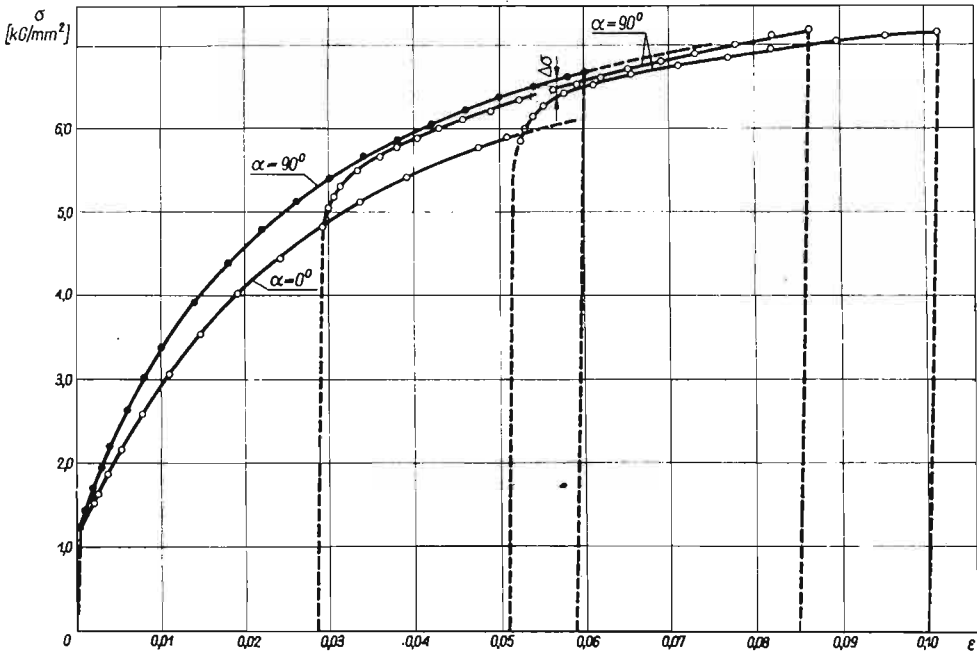
Rys. 3. Krzywe umocnienia badanej blachy aluminiowej dla dwóch kierunków, $\alpha = 0^\circ$ oraz $\alpha = 90^\circ$; kierunek równoległy i prostopadły do kierunku walcowania; ● uśredniona krzywa umocnienia z trzech prób dla $\alpha = 90^\circ$, ○ krzywa umocnienia ze zmianą kierunku rozciągania, odkształcenie wstępne $\varepsilon_0 \approx 0,01$ dla $\alpha = 0^\circ$, a następnie dalsze odkształcenie dla $\alpha = 90^\circ$

w miarę wzrostu odkształcenia deformuje się odbiegając coraz bardziej od kształtu początkowego. Jednak proces deformacji elipsoidy przebiega w ten sposób, że kolejne bryły są podobne. Fakt ten stwierdzono doświadczalnie, gdy sporządzono wykres przedstawiony na rys. 5. Na wykresie tym zaznaczono punktami dla trzech próbek wartości stosunku

$$\chi = \frac{\sigma(90^\circ)}{\sigma(0^\circ)}$$

w funkcji odkształcenia ε ; wykres odnosi się do obciążania proporcjonalnego. Otrzymano praktycznie stałą wartość χ , $\bar{\chi} = 1,088$, oprócz małych wartości odkształceń, gdzie wartość χ powinna być zbliżona do jedności.

Po drugie, przy nagłej zmianie kierunku obciążania materiał «zapomina» stopniowo o tej zmianie, co przejawia się w stopniowym zbliżaniu się dwóch krzywych uzyskanych dla jednakowej wartości α , np. $\alpha = 90^\circ$. Przy czym jedna z tych krzywych odnosi się do



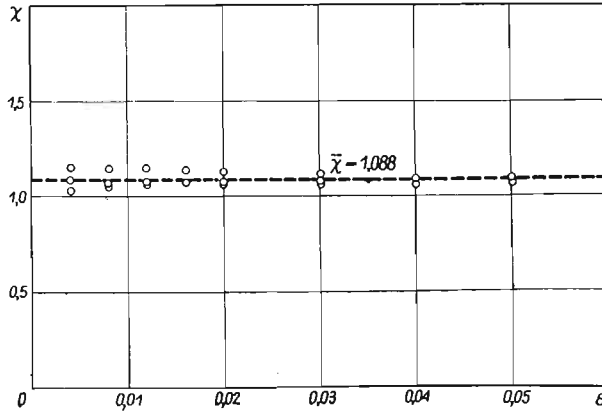
Rys. 4. Krzywe umocnienia badanej blachy aluminiowej dla $\alpha = 0^\circ$ oraz $\alpha = 90^\circ$; ● uśredniona krzywa umocnienia z trzech prób rozciągania dla $\alpha = 90^\circ$, ○ krzywe umocnienia ze zmianą kierunku rozciągania, odkształcenie wstępne $\varepsilon_0 \approx 0,03$ oraz $\varepsilon_0 \approx 0,05$ dla $\alpha = 0^\circ$, następnie dalsze odkształcenie dla $\alpha = 90^\circ$

stałej wartości α , druga do zmienianej podczas procesu deformacji. Należy podkreślić, że zaobserwowany efekt pamięci nie ma nic wspólnego z efektem pamięci reologicznej wywołanej lepkością.

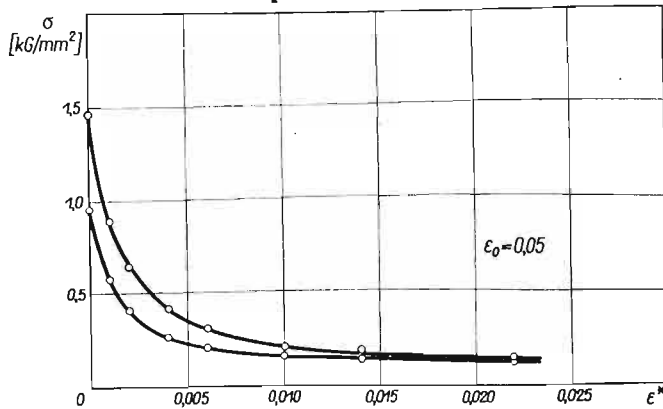
Funkcje «zapominania» o zmianie kierunku α uzyskane dla dwóch próbek przedstawiono na rys. 6; odkształcenie wstępne dla tych próbek wynosi $\varepsilon_0 \approx 0,05$. Z rysunku wynika, że odkształcenie dodatkowe ε^* , $\varepsilon^* \approx 0,01$ można praktycznie uznać za wartość powyżej której materiał praktycznie zapomniał o zmianie kierunku odkształcenia; oczywiście stwierdzenie to odnosi się wyłącznie do wartości odkształcenia wstępnego $\varepsilon_0 \approx 0,05$. Przez $\Delta\sigma$ oznaczono $\Delta\sigma = \sigma(90^\circ) - \sigma^*(90^\circ)$; $\sigma^*(90^\circ)$ oznacza naprężenie plastycznego płynięcia krzywej umocnienia po zmianie kierunku z $\alpha = 0^\circ$ do $\alpha = 90^\circ$. Dla mniejszych wartości odkształcenia wstępnego ε_0 efekt praktycznie całkowitego zapominania zachodzi przy nieco mniejszych wartościach odkształceń dodatkowych ε^* . Przy czym jako definicję

całkowitego zapomnienia przyjęto, że $\Delta\sigma$ stanowi około 10% wartości początkowej dla $\varepsilon^* = 0$.

Równocześnie należy dodać, że podobny efekt zapomnienia, jednak w przypadku zmiany znaku odkształcenia przy ścinaniu, zaobserwowano dla miedzi w pracy [4].



Rys. 5. Wykres stosunku $\chi = \frac{\sigma(90^\circ)}{\sigma(0^\circ)}$ w funkcji odkształcenia. Dla trzech próbek otrzymano praktycznie stałą wartość χ dla $\varepsilon > 0,005$, $\bar{\chi} = 1,088$



Rys. 6. Funkcje «zapomnienia» $\Delta\sigma = \Delta\sigma(\varepsilon^*)$ dla dwóch próbek przy $\alpha = 90^\circ$. ε^* oznacza odkształcenie dodatkowe liczone od momentu zmiany kierunku rozciągania, ε_0 odkształcenie wstępne, $\Delta\sigma$ oznacza przyrost naprężenia zgodnie z rys. 5

Zarówno przedstawione fakty jak i dyskusja wskazują, że należałoby podjąć dalsze badania nad zjawiskiem anizotropii odkształceniowej ze szczególnym uwzględnieniem wpływu tego efektu na warunek plastyczności. Badania takie pozwoliłyby uściślić na gruncie teorii plastyczności propozycje opisów zachowania się ciał anizotropowych.

Literatura cytowana w tekście

1. Е. К. АШКЕНАЗИ, *Прочность анизотропных древесных и синтетических материалов*, Лесная Промышленность, Москва 1966.
2. R. HILL, *Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, second ed., 1956.
3. R. MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeit. für Angew. Math. u. Mech., 3, 8 (1928), 161.
4. Z. MARCINIAK, *Influence of the sign change of the load on the strain hardening curve of a copper test piece subject to torsion*, Arch. Mech. Stos., 6, 13 (1961), 743.
5. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Ortotropia i niejednorodność w teorii plastyczności*, Arch. Mech. Stos., 1, 8 (1956), 85.
6. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., 2, 15 (1963), 275.

Резюме

О НЕКОТОРОМ СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПИИ

Работа является анализом некоторого случая анизотропии для листового алюминия в отожженном состоянии. Обсуждение ограничивается для случая деформированной анизотропии, т. е. анизотропии приобретенной во время процесса, деформации образцов, в противоположность с естественной анизотропией, существующей в материале до начала исследований.

Приводились две серии экспериментов. В первой серии, образцы подвергались растяжению в отожженном состоянии в семи выбранных направлениях по отношению к прокатке. На этом основании, определяются коэффициенты анизотропии для плоского напряженного состояния. Во второй серии, деформированные образцы по направлению к прокатке, подвергались добавочному растяжению в других направлениях. В результате этих экспериментов, наблюдался эффект «забывания» об изменении направления деформации.

Summary

ON A CERTAIN CASE OF ANISOTROPY

This work represents an analysis of a certain case of anisotropy for an annealed aluminium sheet. The entire analysis is focused on the case when anisotropy takes place during the testing, contrary to the case when a tested material exhibits anisotropy before the testing. Two series of experiments have been carried out. In the first series the stress-strain characteristics for seven directions were taken. On this basis the anisotropy coefficients were obtained. In the second series, the specimens deformed in the rolling direction were reloaded in six different directions. As a result of reloading the «fading memory» effects were observed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 października 1968 r. po uzupełnieniu (dnia 7 października 1967 r. po raz pierwszy)