

UPROSZCZONA ANALIZA STATECZNOŚCI BOCZNEJ SZYBOWCA
HOLOWANEGO NA LINIE

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

b_1	[m]	rozpiętość skrzydeł szybowca,
C_n, C_t		bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły normalnej i stycznej do liny, określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
d	[m]	średnica liny holowniczej,
g	[m/s ²]	przyspieszenie ziemskie,
h_{z_1}	[m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona pionowo względem środka ciężkości,
J_x	[kG/ms ²]	moment bezwładności szybowca względem osi podłużnej,
J_z	[kG/ms ²]	moment bezwładności szybowca względem osi pionowej,
J_{xz}	[kG/ms ²]	moment dewiacji szybowca,
k_{z_1}	[m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona poziomo względem środka ciężkości,
m	[kGs ² /m]	masa szybowca,
n	[kGm]	siła aerodynamiczna normalna do liny działająca na 1 m długości,
q	[kGm]	ciężar jednostkowy metra bieżącego liny,
Q_1	[kG]	ciężar szybowca,
S_1	[m ²]	powierzchnia nośna skrzydeł szybowca,
t	[kGm]	siła aerodynamiczna styczna do liny działająca na 1 m długości,
T	[kG]	bieżący naciąg liny holowniczej,
T_1	[kG]	siła pochodząca od liny działająca na zaczepie holowniczym szybowca,
V	[m/s]	prędkość holowania,
φ_1, φ_2	[rad]	kąty nachylenia liny holowniczej w stosunku do linii lotu mierzone na zaczepach szybowca i samolotu,
λ	[1/kG]	współczynnik wydłużalności liny holowniczej,
ρ	[kGs ² /m ⁴]	gęstość powietrza.

1. Wstęp

Przedstawiona praca stanowi kontynuację badania stateczności szybowców holowanych na linie; badania te są przedmiotem wcześniejszych prac autora [4, 5, 6].

Między innymi w pracy [4] rozpatrzono uproszczoną stateczność podłużną szybowca holowanego za samolotem o nieskończenie dużej masie, przy czym przy wyprowadzaniu

pochoďnych linowych stateczności podłużnej niewłaściwie uwzględniono wpływ wydłużalności liny holowniczej. Wyprowadzone pochodne linowe są słuszne dla lin niewydłużalnych podłużnie, tzn. przy $\lambda = 0$. Ze względu na bardzo małe poprawki nie wpłynęło to jednak znacząco na wyniki liczbowe.

Praca [5] zawiera stateczność podłużną zespołu holowniczego, w którego skład wchodzi: samolot holujący, lina holownicza i szybowiec holowany. W pracy tej wyniki uzyskane dla zespołu porównano z wynikami otrzymanymi w pracy [4].

Praca [1] zawiera szereg publikacji BRYANTA, BROWNA i SWEETINGA dotyczących stateczności latawców i szybowców holowanych na linie. Brown rozpatrując pochodne linowe stateczności bocznej pominął całkowicie ciężar liny i siły aerodynamiczne działające na linę holowniczą.

NEUMARK w pracach [7, 8] rozpatrywał zagadnienia stateczności balonów na nierozciągliwej linie. Wyprowadził w [8] pochodne linowe i określił konfigurację liny nie uwzględniając pełnego obciążenia aerodynamicznego liny utrzymującej balon.

W niniejszej pracy rozpatrzono stateczność boczną szybowca holowanego na linie w ustalonym, prostoliniowym, poziomym locie. Szybowiec holowany znajdował się w płaszczyźnie pionowej zgodnej z kierunkiem lotu samolotu holującego. Linę holowniczą traktowano jako ciągnio idealnie wiotkie, podłużnie sprężyste, ciężkie, obciążone siłami aerodynamicznymi. Pominięcie momentów zginających wynikających ze sztywności poprzecznej liny (duży stosunek promienia krzywizny liny do jej średnicy) i tłumienia wewnętrznego (bardzo małe obciążenie liny w locie ustalonym, poziomym) jest dopuszczalne dla szybowcowych lin holowniczych. W pracy uwzględniono statyczne oddziaływanie liny holowniczej przy założeniu, że samolot holujący o nieskończonej dużej masie znajdował się w ustalonym, prostoliniowym, poziomym locie. W pracy nie uwzględniono dynamicznego oddziaływania liny holowniczej, jak również zakłóceń, wynikających z odchyłeń od założonego ruchu samolotu holującego.

Do badania stateczności zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Pozwoliło to na określenie współczynników równania charakterystycznego i zastosowanie kryteriów stateczności Routha-Hurwitza [11, 12], jak również obliczenie pierwiastków równania charakterystycznego metodą Bairstowa [9].

Zagadnienie rozwiązano metodą przyjętą przy rozważaniu stateczności samolotów w locie swobodnym [2, 3, 13, 14]. Pozwoliło to na przeprowadzenie wzajemnej konfrontacji wyników odpowiadających lotowi swobodnemu i na holu, oraz na stosunkowo prostą analizę.

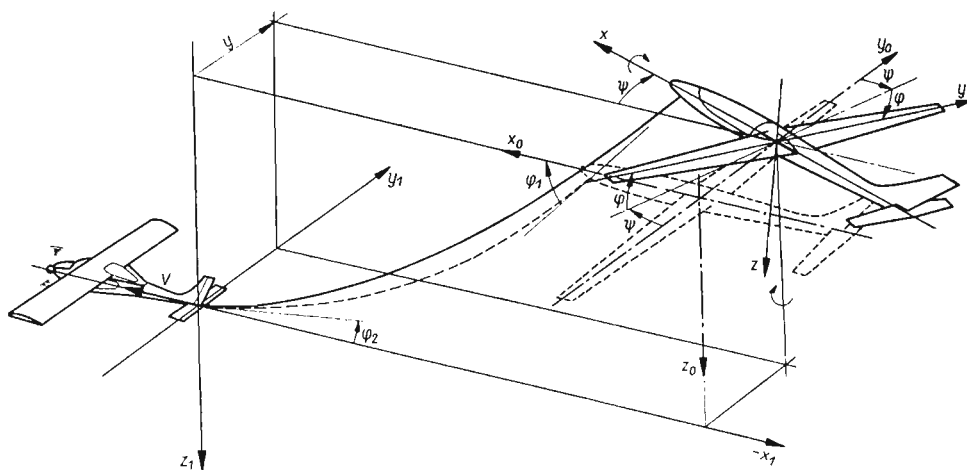
Na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER, dla produkowanego w kraju szybowca wyczynowego i obecnie stosowanego samolotu holującego dokonano analizy stateczności i wpływu na nią zmian parametrów konstrukcyjnych i holowania.

2. Różniczkowe równania ruchu

Równania ruchu szybowca w locie na holu wyprowadzono rozpatrując małe zakłócenia od ustalonego lotu poziomego, prostoliniowego. Pozwoliło to na linearyzację równań. Linearyzacja umożliwiła uzyskanie rozwiązania w prostej postaci, wygodniejszej do analizy

stateczności i porównanie z wynikami otrzymanymi dla szybowca w równoważnym locie swobodnym.

Założono, że przed zakłóceniem holowany szybowiec znajdował się w płaszczyźnie pionowej zgodnej z kierunkiem lotu samolotu holującego. Przy rozpatrywaniu stateczności bocznej małe zakłócenia stanowiły: liniowe przemieszczenie boczne y , zmiana kąta odchylenia ψ i zmiana kąta przechylenia φ (rys. 1).



Rys.1. Przyjęte układy współrzędnych i zależności geometryczne między nimi

Małe zakłócenia oznaczono na rys. 1: y — zmiana położenia środka ciężkości szybowca względem układu x_1, y_1, z_1 związanego z samolotem holującym; φ — zmiana kąta przechylenia szybowca, obrót względem osi podłużnej x związanej z szybowcem; ψ — zmiana kąta odchylenia szybowca, obrót względem osi pionowej z związanej z szybowcem; v_1 — zmiana składowej bocznej prędkości szybowca w kierunku osi y_1 związanej z samolotem holującym; p — zmiana kątowej prędkości przechylenia szybowca; r — zmiana kątowej prędkości odchylenia szybowca.

Równania ruchów asymetrycznych szybowca holowanego względem układu osi x_1, y_1, z_1 (rys. 1) związanych z samolotem holującym mają postać:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \frac{Q_1}{g} \dot{v}_1 = Y_v v_1 + Y_y y + (Q_1 + Y_\varphi) \varphi + (Y_\psi - Y_v V) \psi, \\
 & J_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} = L_v v_1 + L_p p + L_r r + L_y y + L_\varphi \varphi + (L_\psi - L_v V) \psi, \\
 & J_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} = N_v v_1 + N_p p + N_r r + N_y y + N_\varphi \varphi + (N_\psi - N_v V) \psi, \\
 & v_1 = \dot{y}, \quad p = \dot{\varphi}, \quad r = \dot{\psi}.
 \end{aligned}$$

Pochodne aerodynamiczne $Y_v, L_v, L_p, L_r, N_v, N_p,$ i N_r występujące w układzie równań (2.1) są wyprowadzone i omówione w pracy [3] i nie zajmowano się nimi w niniejszej pracy. W celu rozwiązania układu równań (2.1), wyprowadzono poniżej pochodne linowe stateczności bocznej szybowca $Y_y, Y_\varphi, Y_\psi, L_y, L_\varphi, L_\psi, N_y, N_\varphi$ i N_ψ . Wyprowadzeniem tym jest poświęcony rozdział 4.

3. Współczynnik siły bocznej pochodzącej od liny holowniczej (pochodna linowa)

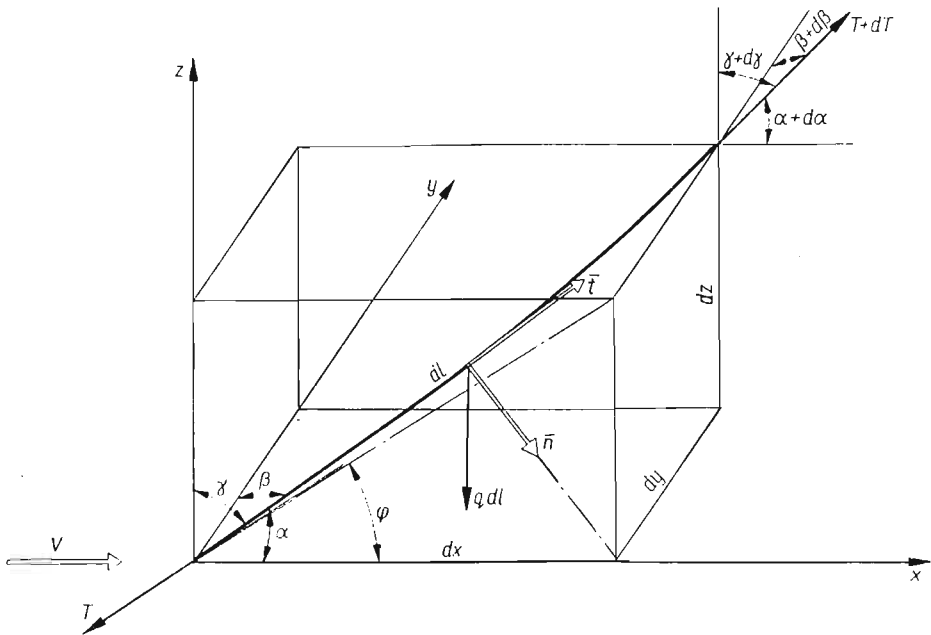
W celu określenia składowej bocznej siły działającej na zaczepie szybowca pochodzącej od liny holowniczej założono liniowy charakter zmiany siły w zależności od przemieszczenia końca liny.

Przez analogię do pochodnych aerodynamicznych, stosowanych przy rozpatrywaniu stateczności samolotów [2, 3, 13, 14], wprowadzono pochodną linową siły bocznej względem przemieszczenia bocznego zgodnie z [4, 5, 8], którą określono następująco:

$$Y_y^l = \frac{\partial Y_1}{\partial y}$$

W oparciu o prace [4, 6, 8] wyprowadzono poniżej zależność na pochodną linową Y_y^l .

Rozpatrzono przypadek holowania szybowca, gdy samolot holujący znajdował się w ustalonym, poziomym, prostoliniowym locie. Szybowiec, znajdujący się w z góry zadanym położeniu w płaszczyźnie pionowej zgodnej z linią lotu samolotu holującego, może doznawać małych przemieszczeń bocznych.



Rys.2. Zależności geometryczne i układ sił działających na element liny holowniczej

Rozpatrzono element liny holowniczej dl obciążony naciągiem liny T i $T+dT$, ciężarem własnym $q dl$, oraz siłami aerodynamicznymi: normalną \bar{n} i styczną \bar{t} . Element liny jest opływany powietrzem z prędkością V zgodną z kierunkiem osi x_1 (rys. 2).

Składowe prędkości na kierunek normalny i styczny do liny otrzymano w postaci (rys. 2):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} V_n &= V \sin \alpha, \\ V_t &= V \cos \alpha. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu zależności wg [4, 6]:

$$n = \frac{1}{2} \rho dV^2 C_n,$$

$$t = \frac{1}{2} \rho dV^2 C_t,$$

gdzie $C_n = 1,15$, $C_t = 0,035$, otrzymano zgodnie z [8] składową normalną i styczną siły aerodynamicznej działającej na element linii dl :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{n} &= n \sin^2 \alpha dl, \\ \bar{t} &= t \cos^2 \alpha dl, \end{aligned}$$

przy czym n jest siłą aerodynamiczną działającą na jednostkę długości linii umieszczonej prostopadle do przepływu, t jest siłą aerodynamiczną działającą na jednostkę długości linii umieszczonej równoległe do przepływu.

Równania równowagi elementu linii otrzymano rzutując siły działające na element linii dl (rys. 2) na kierunek osi x_1 , y_1 , z_1 . Po przekształceniach otrzymano układ równań w postaci:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} dT \cos \alpha - T \sin \alpha d\alpha + n \sin^3 \alpha dl + t \cos^3 \alpha dl &= 0, \\ dT \cos \beta - T \sin \beta d\beta - n \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta dl + t \cos^2 \alpha \cos \beta dl &= 0, \\ dT \cos \gamma - T \sin \gamma d\gamma - n \sin \alpha \cos \alpha \cos \gamma dl + t \cos^2 \alpha \cos \gamma dl - q dl &= 0. \end{aligned}$$

Układ równań (3.3) pomnożono odpowiednio przez $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$, dodano i po przekształceniu otrzymano:

$$(3.4) \quad dT = (q \cos \gamma - t \cos^2 \alpha) dl.$$

Po podstawieniu zależności (3.4) do dwóch pierwszych równań układu (3.3) uzyskano je w postaci:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (q \cos \gamma \cos \alpha + n \sin^3 \alpha) dl &= T \sin \alpha d\alpha, \\ (q \cos \gamma - n \sin \alpha \cos \alpha) \cos \beta dl &= T \sin \beta d\beta. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu z równań (3.5) naciągu linii T , wykorzystaniu związku zachodzącego między cosinusami kątów α , β , γ (rys. 2)

$$\cos \gamma = \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

oraz przyjęciu, że przemieszczenia boczne y są bardzo małe, tzn.

$$\cos \gamma \approx \sin \alpha; \quad \alpha \approx \varphi; \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

otrzymano zgodnie z [8]:

$$(3.6) \quad \frac{d(\cos \beta)}{\cos \beta} = \frac{q - n \cos \varphi}{n \sin^2 \varphi + q \cos \varphi} d(\cos \varphi).$$

Po wprowadzeniu nowej stałej

$$(3.7) \quad \frac{q}{n} = 2 \operatorname{ctg} 2\psi,$$

równanie (3.6) scałkowano.

Stałą całkowania wyznaczono z warunków na zaczepie holowniczym szybowca; w wyniku otrzymano związek przedstawiający zmianę kąta β w zależności od kąta holu φ_1 (rys. 2)

$$(3.8) \quad \cos \beta = \cos \beta_1 \sqrt{\frac{n\tau(\varphi_1)}{n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1}} \sqrt{\frac{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}{n\tau(\varphi)}},$$

gdzie zgodnie z pracami [4, 6, 8]

$$(3.9) \quad \tau(\varphi) = \left(\frac{\operatorname{ctg}\psi - \cos\varphi}{\operatorname{tg}\psi + \cos\varphi} \right)^{\cos 2\psi}.$$

Z zależności geometrycznych (rys. 2) wynika, że

$$(3.10) \quad dy = dl_1 \cos \beta,$$

gdzie

$$(3.11) \quad dl_1 = dl(1 + \lambda T),$$

dl_1 [4, 6] jest długością elementu liny obciążonego naciągiem T . Siłę T wyznaczono z równania naciągu liny, które na podstawie prac [4, 6] ma postać:

$$(3.12) \quad \frac{Te^{n(\varphi)}}{\tau(\varphi)} = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} = \text{const},$$

gdzie

$$(3.13) \quad \eta(\varphi) = \frac{C_t}{C_a} \cos 2\psi \left[-\frac{2\varphi}{\sin 2\psi} + \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\psi}} \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\psi}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\operatorname{ctg}^2\psi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\psi-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\psi-1}{\operatorname{ctg}\psi+1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

przy czym

$$C_a = \frac{q}{\frac{1}{2} \rho dV^2}; \quad \tau_1 = \tau(\varphi_1); \quad \eta_1 = \eta(\varphi_1).$$

Podstawiając zależności (3.12), (3.11), (3.8) do (3.10) oraz zależność na dl przyjętą wg prac [4, 6]:

$$dl = \frac{T_1}{\tau_1} \frac{\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi} d\varphi,$$

otrzymano

$$(3.14) \quad dy = \frac{T_1 \cos \beta_1}{\sqrt{n\tau_1(n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1)}} \sqrt{\frac{n\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}} \left(1 + \lambda T_1 \frac{\tau(\varphi)}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta} \right) d\varphi.$$

Po scałkowaniu (3.14) w granicach φ_2 do φ_1 [są to kąty wyznaczone na zaczepach holowniczych samolotu holującego i szybowca holowanego (rys. 1)], otrzymano

$$(3.15) \quad y = \frac{Y_1}{\sqrt{n\tau_1(n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1)}} (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \vartheta(\varphi_1); \quad \vartheta_2 = \vartheta(\varphi_2),$$

przy czym

$$(3.16) \quad \vartheta(\varphi) = \vartheta'(\varphi) + \vartheta''(\varphi),$$

$$(3.17) \quad \vartheta'(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{\frac{n\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}} d\varphi,$$

$$(3.18) \quad \vartheta''(\varphi) = \lambda \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \int_0^\varphi \tau(\varphi) e^{-\eta(\varphi)} \sqrt{\frac{n\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}} d\varphi.$$

Korzystając z (3.15) zgodnie z [8] określono pochodną linową siły bocznej Y_1 względem bocznego przemieszczenia końca liny y :

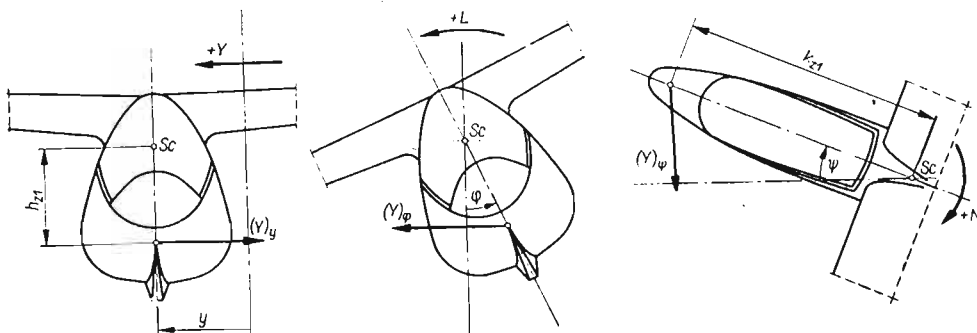
$$(3.19) \quad Y'_y = \frac{Y_1}{y} = \frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta_2} \sqrt{n\tau_1(n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1)}.$$

4. Pochodne linowe stateczności bocznej szybowca holowanego

Pochodne linowe siły bocznej, momentów przechylających i odchylających względem przesunięcia poziomego y , kąta przechylenia φ i kąta odchylenia ψ szybowca, określono następująco:

$$(4.1) \quad Y_\varphi = \frac{\partial Y}{\partial \varphi}; \quad N_\psi = \frac{\partial N}{\partial \psi},$$

analogicznie oznaczono pozostałe pochodne linowe.



Rys.3. Zmiany siły bocznej wywołane przemieszczeniem bocznym, przechyleniem i odchyleniem szybowca

Zmianę siły bocznej działającej na zaczep holowniczy szybowca przedstawiono wprowadzając pochodne linowe (4.1)

$$(4.2) \quad dY = Y_y dy + Y_\varphi d\varphi + Y_\psi d\psi.$$

Korzystając z pochodnej linowej siły bocznej względem bocznego przemieszczenia końca liny (3.19) i zależności geometrycznych (rys. 3), określono zmianę siły bocznej:

$$(4.3) \quad dY = -Y'_y dy + Y'_y h_{z1} d\varphi - Y'_y k_{z1} d\psi.$$

Przyrównując do siebie współczynniki przy dy , $d\varphi$ i $d\psi$ w równaniach (4.3) oraz (4.2) otrzymano odpowiednie pochodne linowe siły bocznej dla szybowca:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} Y_y &= -Y'_y, \\ Y_\varphi &= Y'_y h_{z1}, \\ Y_\psi &= -Y'_y k_{z1}. \end{aligned}$$

Rozpatrując zmianę momentów przechylającego L i odchylającego N wywołanych zmianą siły bocznej Y i pionowej Z , otrzymano:

— pochodne linowe momentu przechylającego szybowca

$$(4.5) \quad \begin{aligned} L_y &= Y'_y h_{z1}, \\ L_\varphi &= -(Y'_y h_{z1} + Z_1) h_{z1}, \\ L_\psi &= Y'_y h_{z1} k_{z1}; \end{aligned}$$

— pochodne linowe momentu odchylającego szybowca

$$(4.6) \quad \begin{aligned} N_y &= -Y'_y k_{z1}, \\ N_\varphi &= Y'_y h_{z1} k_{z1}, \\ N_\psi &= -(Y'_y k_{z1} + X_1) k_{z1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.7) \quad Z_1 = X_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$

przy czym

$$(4.8) \quad X_1 = P_{x1} = \frac{1}{2} \rho S_1 V^2 C_{x1}$$

jest to opór aerodynamiczny szybowca holowanego.

Znając pochodne linowe (4.4), (4.5) i (4.6) można przystąpić do rozwiązania układu równań (2.1) i badania stateczności bocznej szybowca holowanego na linii.

5. Rozwiązanie różniczkowych równań ruchu i badanie stateczności

Układ równań (2.1) przekształcono do postaci bezwymiarowej, dzieląc równanie sił przez $\rho S_1 V^2$, równania momentów przez $\rho S_1 V^2 b_1/2$ oraz wprowadzając następujące wyrażenia zgodnie z nazwami przyjętymi w lotnictwie [2, 3, 13, 14]:

$$\hat{t} = \frac{Q_1}{\rho S_1 V g} \quad \text{— czas aerodynamiczny,}$$

$$\mu_2 = \frac{2Q_1}{\rho S_1 g b_1} \quad \text{— względna gęstość szybowca.}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\hat{t}} \quad \text{— czas bezwymiarowy,}$$

$$j_x = \frac{2J_x g}{Q_1 b_1} \quad \text{— bezwymiarowy moment bezwładności względem osi podłużnej szybowca } x,$$

$$j_z = \frac{2J_z g}{Q_1 b_1} \quad \text{— bezwymiarowy moment bezwładności względem osi pionowej szybowca } z,$$

$$j_{xz} = \frac{2J_{xz}g}{Q_1 b_1} \quad \text{— bezwymiarowy moment dewiacji,}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{V} \quad \text{— bezwymiarowa prędkość liniowa,}$$

$$\bar{p} = p\hat{t}, \quad \bar{r} = r\hat{t} \quad \text{— bezwymiarowa prędkość kątowa przechylenia i odchylenia.}$$

Przyjęto również, że osie związane z szybowcem zostały dobrane tak, aby kierunek prędkości V przed zakłóceniem od stanu równowagi był zgodny z kierunkiem obranej osi x .

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń i przekształceniach otrzymano układ równań w postaci bezwymiarowej:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{v}_1}{dt} - y_v \bar{v}_1 - y_y \bar{y} - (y_\varphi + y_{\varphi 1}) \varphi - (y_\psi - y_v) \psi &= 0, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} - \frac{j_{xz}}{j_x} \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{l}_v \bar{v}_1 + \bar{l}_p \bar{p} + \bar{l}_r \bar{r} + \bar{l}_y \bar{y} + \bar{l}_\varphi \varphi + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v) \psi &= 0, \\ \frac{d\bar{r}}{dt} - \frac{j_{xz}}{j_z} \frac{d\bar{p}}{dt} + \bar{n}_v \bar{v}_1 + \bar{n}_p \bar{p} + \bar{n}_r \bar{r} + \bar{n}_y \bar{y} + \bar{n}_\varphi \varphi + (\bar{n}_\psi - \bar{n}_v) \psi &= 0, \\ \bar{v}_1 = \frac{d\bar{y}}{dt}, \quad \bar{p} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \bar{r} = \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}$$

Przyjęty układ osi x, y, z związanych z szybowcem jest w locie poziomym odchylny od głównych centralnych osi bezwładności o bardzo mały kąt, co pozwala w układzie równań (5.1) pominąć człony $j_{xz}/j_x \approx 0, j_{xz}/j_z = 0$. Układ równań (5.1) po przekształceniach otrzymano w następującej formie:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{y}} - y_v \dot{\bar{y}} - y_y \bar{y} - (y_\varphi - y_{\varphi 1}) \varphi - (y_\psi - y_v) \psi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \bar{l}_p \dot{\varphi} + \bar{l}_r \dot{\psi} + \bar{l}_v \dot{\bar{y}} + \bar{l}_\varphi \varphi + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v) \psi + \bar{l}_y \bar{y} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \bar{n}_p \dot{\varphi} + \bar{n}_r \dot{\psi} + \bar{n}_v \dot{\bar{y}} + \bar{n}_\varphi \varphi + (\bar{n}_\psi - \bar{n}_v) \psi + \bar{n}_y \bar{y} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie bezwymiarowe pochodne linowe mają postać:

$$\begin{aligned} y_y &= \frac{Y_y b_1}{\rho V^2 S_1}, & y_{\varphi 1} &= \frac{Y_\varphi}{\rho V^2 S_1}, & y_\psi &= \frac{Y_\psi}{\rho V^2 S_1}, \\ l_y &= -\frac{\mu_2}{j_x} \frac{L_y}{\rho V^2 S_1}, & \bar{l}_\varphi &= -\frac{\mu_2}{j_x} \frac{2L_\varphi}{\rho V^2 S_1 b_1}, & \bar{l}_\psi &= -\frac{\mu_2}{j_x} \frac{2L_\psi}{\rho V^2 S_1 b_1}, \\ \bar{n}_y &= -\frac{\mu_2}{j_z} \frac{N_y}{\rho V^2 S_1}, & \bar{n}_\varphi &= -\frac{\mu_2}{j_z} \frac{2N_\varphi}{\rho V^2 S_1 b_1}, & \bar{n}_\psi &= -\frac{\mu_2}{j_z} \frac{2N_\psi}{\rho V^2 S_1 b_1}. \end{aligned}$$

Bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne w postaci przekształconej są wyprowadzone i podane w pracy [3].

Rozwiązanie ogólne układu (5.2) równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami przewiduje się w postaci:

$$\bar{y} = y_0 e^{\lambda \bar{t}}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{\lambda \bar{t}}, \quad \psi = \psi_0 e^{\lambda \bar{t}}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności do układu równań (5.2), podzieleniu przez $e^{\bar{\lambda}t}$ i uporządkowaniu względem y_0, φ_0, ψ_0 otrzymano układ równań jednorodnych. Warunkiem rozwiązania tego układu jest, by wyznacznik ze współczynników przy y_0, φ_0, ψ_0 był równy zeru. Po rozwinięciu wyznacznika i uporządkowaniu względem potęg $\bar{\lambda}$ otrzymano następujące równanie charakterystyczne:

$$(5.3) \quad \bar{\lambda}^6 + B\bar{\lambda}^5 + C\bar{\lambda}^4 + D\bar{\lambda}^3 + E\bar{\lambda}^2 + F\bar{\lambda} + G = 0.$$

Współczynniki równania charakterystycznego (5.3) rozdzielono na części odpowiadające lotowi swobodnemu B_2, C_2, D_2, E_2 wg [3] i części uwzględniające wpływ liny holowniczej $C_2^I, D_2^I, E_2^I, F_2^I$ i G_2^I :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} B &= B_2, \\ C &= C_2 + C_2^I, \\ D &= D_2 + D_2^I, \\ E &= E_2 + E_2^I, \\ F &= F_2^I, \\ G &= G_2^I. \end{aligned}$$

Współczynniki równania charakterystycznego w przypadku lotu swobodnego wg [3] mają postać:

$$\begin{aligned} B_2 &= \bar{l}_p + \bar{n}_r - y_v, \\ C_2 &= (\bar{n}_r - y_v)\bar{l}_p - (1 + y_v)\bar{n}_r - \bar{l}_r\bar{n}_p, \\ D_2 &= (\bar{n}_p + y_\varphi)\bar{l}_v + (\bar{l}_r\bar{n}_p - \bar{l}_p\bar{n}_r)y_v - \bar{l}_p\bar{n}_v, \\ E_2 &= (\bar{l}_v\bar{n}_r - \bar{l}_r\bar{n}_v)y_\varphi. \end{aligned}$$

Zmiany współczynników równania charakterystycznego wywołane linią holowniczą są następujące:

$$\begin{aligned} C_2^I &= \bar{l}_\varphi + \bar{n}_\psi - y_y, \\ D_2^I &= -(\bar{l}_p + \bar{n}_r)y_y - (\bar{n}_\psi + \bar{l}_\varphi)y_v + \bar{l}_\varphi\bar{n}_r - \bar{l}_r\bar{n}_\varphi + \bar{l}_p\bar{n}_\psi - \bar{l}_\psi\bar{n}_p + \bar{l}_v y_{\varphi l} + \bar{n}_v y_\psi, \\ E_2^I &= (\bar{n}_v - \bar{l}_\varphi - \bar{n}_\psi)y_y + y_\varphi\bar{l}_y + (\bar{n}_\psi - \bar{n}_v)\bar{l}_\varphi - \bar{l}_\psi\bar{n}_\psi + \bar{n}_\varphi\bar{l}_v + (y_\psi - y_v)\bar{n}_y + \\ &\quad + (\bar{n}_p\bar{l}_\psi - \bar{n}_r\bar{l}_\varphi)y_v + (\bar{n}_r y_{\varphi l} - \bar{n}_p y_\psi)\bar{l}_v + (\bar{n}_v y_\psi - \bar{n}_\psi y_v - \bar{n}_r y_y)\bar{l}_p + (\bar{n}_\varphi y_v - \bar{n}_v y_{\varphi l})\bar{l}_r, \\ F_2^I &= [(\bar{n}_v - \bar{n}_\psi)\bar{l}_p + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v)\bar{n}_p - \bar{l}_\varphi\bar{n}_r + \bar{l}_r\bar{n}_\varphi]y_y + \bar{l}_y y_{\varphi l} + (y_\varphi + y_{\varphi l})(\bar{l}_y\bar{n}_r - \bar{l}_\psi\bar{n}_v + \bar{l}_v\bar{n}_\psi) + \\ &\quad + y_\psi(\bar{l}_\varphi\bar{n}_v - \bar{l}_v\bar{n}_\varphi + \bar{l}_r\bar{n}_y - \bar{l}_y\bar{n}_p) + (\bar{l}_y\bar{n}_p - \bar{l}_p\bar{n}_y + \bar{l}_\varphi\bar{n}_v + \bar{l}_\psi\bar{n}_\varphi)y_v - \bar{l}_\varphi\bar{n}_\psi, \\ G_2^I &= [(\bar{n}_v - \bar{n}_\psi)\bar{l}_\varphi + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v)\bar{n}_\varphi]y_y + (\bar{l}_\varphi\bar{n}_y - \bar{l}_y\bar{n}_\varphi)y_\psi + (y_\varphi + y_{\varphi l})[(\bar{n}_\psi - \bar{n}_v)\bar{l}_y + \\ &\quad + (\bar{l}_v - \bar{l}_\psi)\bar{n}_y - \bar{l}_r\bar{n}_y] + [\bar{l}_y\bar{n}_\varphi - (\bar{n}_y + \bar{n}_v)\bar{l}_\varphi]y_v. \end{aligned}$$

W przypadku przejścia szybowca z lotu na holu do lotu swobodnego z utrzymanym sterem, zmiany współczynników równania charakterystycznego (5.3) wywołane holem znikają, tzn. $C_2^I = D_2^I = E_2^I = F_2^I = G_2^I = 0$.

Równanie (5.3) przechodzi w równanie charakterystyczne czwartego stopnia, otrzymane przy badaniu stateczności bocznej w locie swobodnym w pracach [2, 3, 13, 14]:

$$(5.5) \quad \bar{\lambda}^4 + B_2 \bar{\lambda}^3 + C_2 \bar{\lambda}^2 + D_2 \bar{\lambda} + E_2 = 0.$$

Przy położeniu zaczepu holowniczego w środku ciężkości szybowca holowanego, tzn. gdy $h_{z1} = k_{z1} = 0$, współczynnik $G_2^I = 0$ i równanie (5.3) przechodzi w równanie charakterystyczne piątego stopnia:

$$(5.6) \quad \bar{\lambda}^5 + B \bar{\lambda}^4 + C \bar{\lambda}^3 + D \bar{\lambda}^2 + E \bar{\lambda} + F = 0.$$

Rozwiązanie równań charakterystycznych (5.3) i (5.5) przeprowadzono numerycznie metodą BAIRSTOWA [9]. Pozwoliło to na porównanie wyników stateczności bocznej w locie na holu z wynikami otrzymanymi dla równoważnego lotu swobodnego badanego szybowca. W wyniku rozwiązania równań (5.3) i (5.5) otrzymano pierwiastki w postaci

$$(5.7) \quad \bar{\lambda}_k = \bar{\xi}_k \pm i \bar{\eta}_k,$$

gdzie $\bar{\xi}_k = \xi_k \hat{t}$ — bezwymiarowy współczynnik tłumienia, $\bar{\eta}_k = \eta_k \hat{t}$ — bezwymiarowa częstość oscylacji.

Dla szybowca statecznego części rzeczywiste (współczynniki tłumienia) wszystkich pierwiastków muszą być ujemne, $\bar{\xi}_k < 0$, tzn. ruch jest tłumiony i szybowiec jest stateczny dynamicznie.

Znając współczynniki tłumienia $\bar{\xi}_k$ i częstości oscylacji $\bar{\eta}_k$ możemy określić okres wahań T i czas sfumienia amplitudy do połowy $T_{1/2}$ lub czas podwojenia amplitudy T_2

$$T = \frac{2\pi}{\bar{\eta}_k} \hat{t}; \quad T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\bar{\xi}_k} \hat{t}; \quad T_2 = \frac{\ln 2}{\bar{\xi}_k} \hat{t}.$$

Stosując kryteria stateczności Routha-Hurwitza, dotyczące małych zakłóceń ruchu ustalonego można przeprowadzić badania stateczności bez rozwiązania równań (5.3) i (5.5). Po przekształceniach otrzymano warunki stateczności dla równania charakterystycznego szóstego stopnia (5.3). Warunkiem jest, aby wszystkie współczynniki równania były dodatnie [11, 12]

$$(5.8) \quad B, C, D, E, F, G > 0,$$

jak również, by wyróżnik Routha był dodatni [1]

$$(5.9) \quad R = \Delta_0 \Delta_2 - \Delta_1^2 > 0.$$

W powyższym wzorze oznaczają:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ F & E & D \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ 0 & G & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ F & E & D \\ 0 & G & F \end{vmatrix}.$$

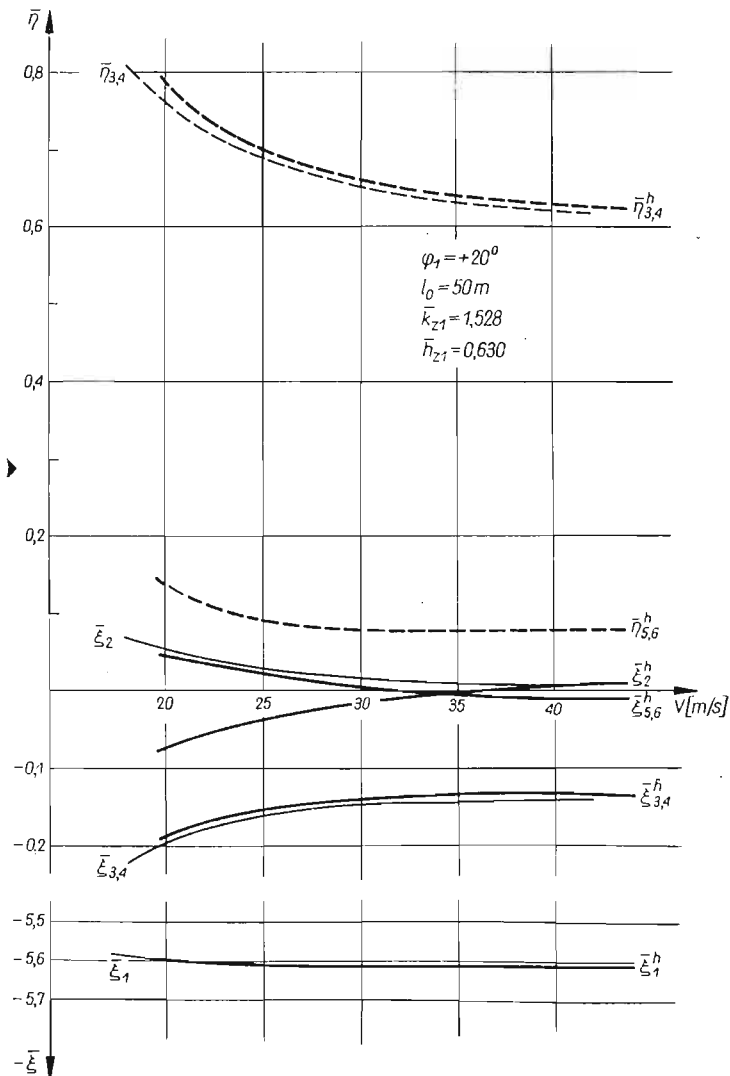
Właściwie tak sformułowane warunki (5.8) i (5.9) są przekształconymi kryteriami stateczności Lienarda i Chiparta wg [11, 12].

Stosując otrzymane powyżej związki i wzory wykonano przykładowo obliczenia numeryczne. Na ich podstawie dokonano analizy stateczności bocznej szybowca holowanego na linie.

6. Przykład liczbowy i wnioski

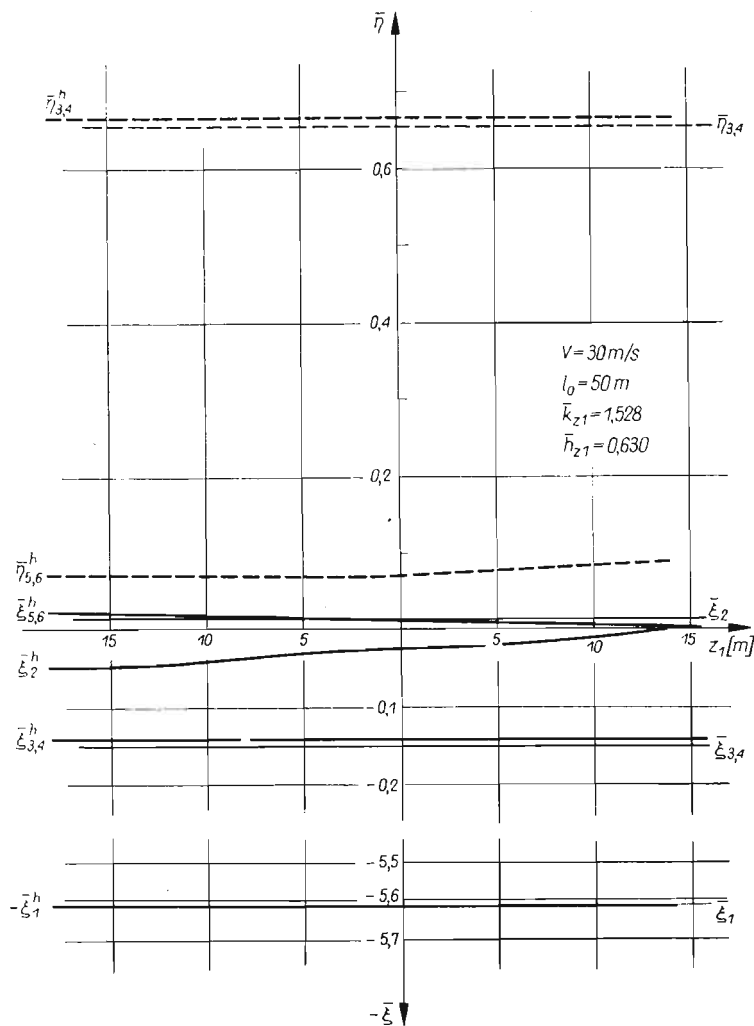
Przykładowe obliczenia numeryczne wykonano dla krajowego szybowca wyczynowego według danych projektu wstępnego.

W obliczeniach zmieniano kolejno parametry holowania: prędkość holowania, położenie szybowca względem samolotu holującego, usytuowanie zaczepu holowniczego szybowca względem jego środka ciężkości oraz długość liny holowniczej. Pozwoliło to znaleźć wpływ powyższych czynników na stateczność boczną szybowca holowanego. Jednocześnie przeprowadzono obliczenia stateczności bocznej w równoważnym locie swobodnym i porównano je z wynikami obliczeń dla szybowca holowanego.



Rys.4. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości holowania

Po numerycznym rozwiązaniu metodą Bairstowa równań charakterystycznych (5.3) i (5.5) otrzymano pierwiastki w postaci (5.7), sześć pierwiastków $\bar{\lambda}^h$ z równania (5.3) i cztery pierwiastki $\bar{\lambda}$ z równania (5.5). Pierwiastki $\bar{\lambda}_k^h$ i $\bar{\lambda}_k$ z jednakowym indeksem k , charakteryzują te same ruchy szybowca na holu i w locie swobodnym. Występują dwa pier-



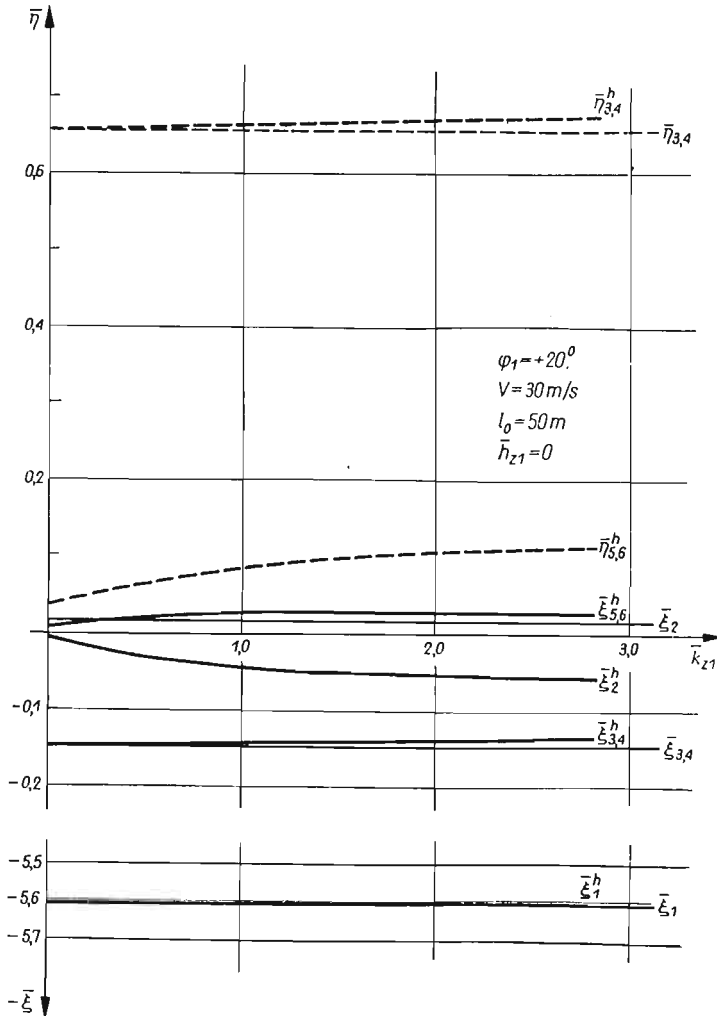
Rys.5. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego

wiastki rzeczywiste $\bar{\lambda}_1^h = \bar{\xi}_1^h$ i $\bar{\lambda}_2^h = \bar{\xi}_2^h$ ($\bar{\lambda}_1 = \bar{\xi}_1$ i $\bar{\lambda}_2 = \bar{\xi}_2$), odpowiadające ruchom aperiodycznym oraz dwie pary pierwiastków zespolonych sprzężonych $\bar{\lambda}_{3,4}^h = \bar{\xi}_{3,4}^h \pm i\bar{\eta}_{3,4}^h$, $\bar{\lambda}_{5,6}^h = \bar{\xi}_{5,6}^h \pm i\bar{\eta}_{5,6}^h$ ($\bar{\lambda}_{3,4} = \bar{\xi}_{3,4} \pm i\bar{\eta}_{3,4}$), które odpowiadają ruchom okresowym szybowca.

Pierwiastki rzeczywiste $\bar{\lambda}_1^h \approx \bar{\lambda}_1 < 0$ odpowiadają przechyleniu szybowca z prędkością kątową p wokół osi podłużnej x . W zakresie kątów natarcia poniżej krytycznego ruch ten jest ruchem aperiodycznym bardzo silnie tłumionym.

Ruch spiralny odpowiadający pierwiastkom $\bar{\lambda}_2^h(\bar{\lambda}_2)$ jest złożonym ruchem bocznym opisanym i omówionym w pracy [3], polega na odchyłaniu szybowca z równoczesnym przechyleniem.

Para pierwiastków zespolonych sprzężonych $\bar{\lambda}_{3,4}^h(\bar{\lambda}_{3,4})$ charakteryzuje ruch zwany holendrowaniem [2, 3]. Jest to ruch harmoniczny polegający na bocznych wahaniach szy-



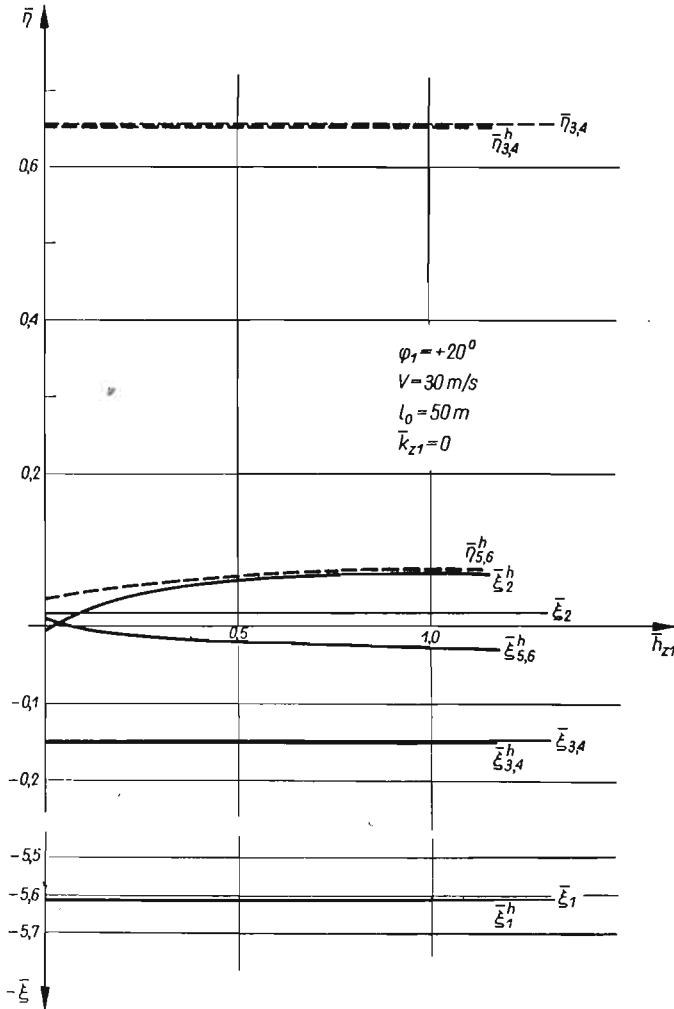
Rys.6. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji poziomego przemieszczenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca

bowca na kierunku osi poprzecznej y z równoczesnym przechyleniem harmonicznym wokół osi podłużnej x .

Dodatkowa para pierwiastków zespolonych $\bar{\lambda}_{5,6}^h$ występująca w locie na holu, odpowiada wężykowaniu, tzn. harmonicznemu ruchom odchyłającym szybowca względem osi pionowej z , o bardzo dużym okresie wahań.

Na wykresach liniami grubymi przedstawiono zmiany współczynników odnoszących się do lotu na holu, a linie cienkie przedstawiają współczynniki w równoważnym locie swobodnym.

Do obliczeń przykładowo wybrano szybowiec, którego prototyp wykazywał na małych prędkościach holowania pewne trudności w pilotażu.

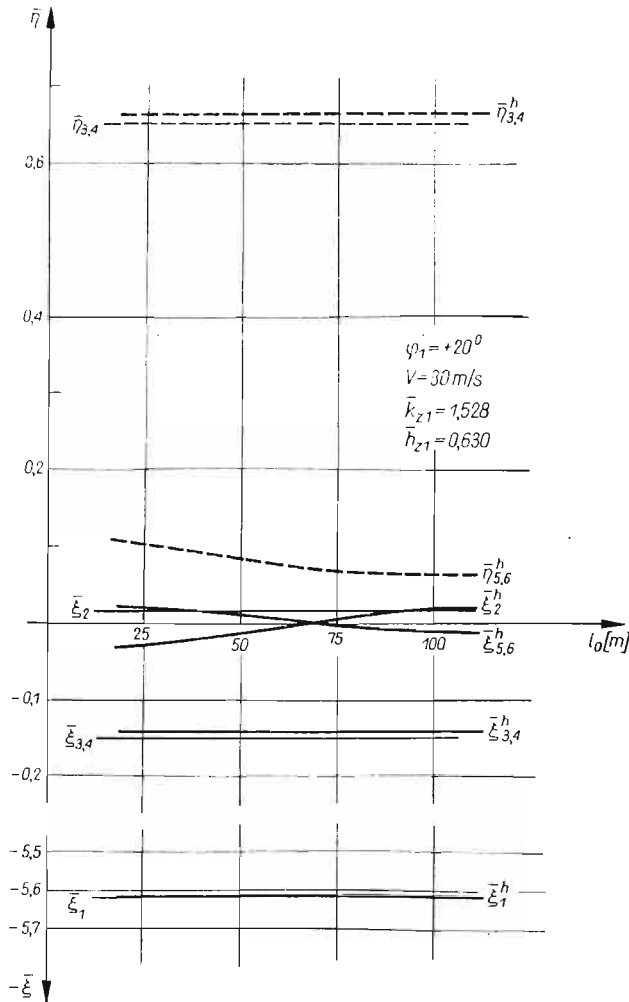


Rys. 7. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji pionowego przemieszczenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca

Wnioski wyciągnięte z obliczeń numerycznych są słuszne dla danego szybowca i nie wszystkie mogą być uogólnione. Szerokie uogólnienie wniosków wymagałoby wykonania obliczeń numerycznych dla wielu szybowców.

Wyniki uzyskane w przedstawionej pracy wskazują na to, że lot na holu rozpatrywanego szybowca jest lotem niestacymym. Występują pierwiastki o częściach rzeczywistych

dodatnich $\bar{\xi}_2^h > 0$ lub $\bar{\xi}_{5,6}^h > 0$ (rys. 4–8). Słaba niestateczność spiralna lub niestateczność wężykowania zmusza pilota do interwencji sterami. W przykładowo rozpatrywanych warunkach lotu, dla położenia szybowca w linii lotu samolotu holującego (rys. 5), okres wahań wężykowania $T = 50$ s, a czas podwojenia amplitudy $T_2 = 28$ s. W warunkach tych pilot zdąży zareagować na zakłócenia lotu, bowiem czas reakcji złożonej pilota t_r jest $0,20 \text{ s} < t_r \leq 0,54 \text{ s}$. W opisanym położeniu szybowiec jest stateczny spiralnie $\bar{\xi}_2^h < 0$.



Rys.8. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji długości liny holowniczej

Wiele aparatów latających wykazuje niestateczność, jednak w ograniczonym przedziale czasu pewne rodzaje niestateczności są dopuszczalne. W związku z tym w badanym zagadnieniu jest sens mówić tylko o stateczności technicznej w ograniczonym przedziale czasu, tzn. od momentu zakłócenia do chwili interwencji pilota t_r , a nie dla $t \rightarrow \infty$.

Z wykonanych obliczeń można wyciągnąć następujące wnioski odnośnie stateczności bocznej rozpatrywanego szybowca holowanego na linii:

— Holowanie szybowca w niewielkim stopniu wpływa na stateczność holowania szybowca, zarówno na tłumienie $\bar{\xi}_{3,4}^h \approx \bar{\xi}_{3,4}$, jak i na częstość wahań $\bar{\eta}_{3,4}^h \approx \bar{\eta}_{3,4}$ (rys. 4-8).

— Holowanie szybowca nie wpływa na aperiodyczne ruchy przechylające $\bar{\xi}_1^h = \bar{\xi}_1$ (rys. 4-8).

— Holowanie szybowca na linii ma wpływ na tłumienie ruchów spiralnych $\bar{\xi}_2^h$ oraz powoduje pojawienie się wężykowania. Ruchy powyższe są wzajemnie od siebie zależne, ustalenie spirale $\bar{\xi}_2^h < 0$ powoduje niestateczność wężykowania $\bar{\xi}_{5,6}^h > 0$ i odwrotnie (rys. 4-8).

— Korzystniejsze jest położenie szybowca w linii lotu samolotu holującego lub poniżej, gdyż zapewnia to stateczność spiralną przy słabej niestateczności wężykowania (rys. 5).

— Przemieszczenie zaczepu holowniczego do przodu względem środka ciężkości szybowca ustalenie spirale powodując równocześnie słabą niestateczność wężykowania (rys. 6). Korzystne jest położenie zaczepu dostatecznie daleko przed środkiem ciężkości bez przemieszczenia pionowego (rys. 7).

— Przemieszczenie zaczepu holowniczego pionowo w dół względem środka ciężkości szybowca, uniestalenie spirale $\bar{\xi}_2^h > 0$ zapewniając słabe tłumienie wężykowania $\bar{\xi}_{5,6}^h < 0$ (rys. 7).

— Ze względu na stateczność spiralną korzystne jest stosowanie lin holowniczych do długości $l_0 = 70$ m (rys. 8).

Metody podane w niniejszej pracy oraz w pracach [4, 5, 6], dotyczących stateczności podłużnej, pozwalają na ilościowe wyznaczenie parametrów wpływających na równowagę i stateczność szybowca holowanego na linii. Pozwalają już w fazie konstrukcji szybowca na z góry określone rozwiązania lub kierunki zmian.

Literatura cytowana w tekście

1. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected researches on the stability kites and towed gliders*, Reports and Memoranda, Nr 2303/1942.
2. B. ETKIN, *Dynamics of flight*, New York-London 1959.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
4. J. MARYNIAK, *Uproszczona stateczność podłużna szybowca w locie holowanym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Nr 1/1967.
5. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Nr 3/1967.
6. J. MARYNIAK, *Konfiguracja liny holowniczej szybowca z uwzględnieniem sil aerodynamicznych*, *Technika Lotnicza i Astronautyczna*, Nr 7/1967.
7. S. NEUMARK, *Działanie wiatru na linę balonu na uwięzi*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa, Nr 1(19), Warszawa 1936.
8. S. NEUMARK, *Equilibrium configurations of flying cables of captive balloons and cable derivatives for stability calculations*, Reports and Memoranda, Nr 3333/1963.
9. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington, Middlesex, PWN, Warszawa 1965.

10. З. И. Бурман, *Анализ влияния буксирного троса на картину флаттера планера — Исследование по теории пластин и оболочек*, Сборник II, Издательство Казанского Университета, 1964.
11. Ф. П. Гантмахер, *Теория матриц*, Издательство Наука, Москва 1966.
12. М. Ш. Косс, *Обзор доказательств теоремы Рауса-Гурвица*, Вопросы вычислительной математики, Академия Наук Узбекской ССР, Ташкент 1963.
13. И. В. Остославский, *Аэродинамика самолета*, Москва 1957.
14. И. В. Остославский, И. В. Стражева, *Динамика полета — Устойчивость и управляемость летательных аппаратов*, Издательство Машиностроение, Москва 1965.

Р е з ю м е

УПРОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ БОКОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНЕРА БУКСИРУЕМОГО НА КАНАТЕ

В предлагаемой работе рассмотрена боковая устойчивость планера буксируемого на канате во время стационарного прямолинейного горизонтального полета. Буксируемый планер находится в вертикальной плоскости совпадающей с направлением полета самолета-буксира. Буксирный канат рассматривается как идеально-гибкая весома нить, обладающая упругими свойствами в продольном направлении и нагруженная аэродинамическими силами.

Для исследования устойчивости была применена теория малых возмущений. Уравнения движения были получены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения шестого порядка для этой системы были найдены по методу Бэрстоу. Применялись критерии устойчивости Рут-Гурвица.

Результаты численного решения показывают как влияют на боковую устойчивость изменения скорости буксирования, расположения планера по отношению к самолету-буксиру, длины буксирного каната и расположения сцепного устройства по отношению к центру тяжести планера. Полученные результаты сравниваются с расчетами эквивалентного свободного полета планера.

S u m m a r y

SIMPLIFIED ANALYSIS OF LATERAL STABILITY OF TOWED GLIDER

The paper deals with the lateral stability of towed glider in steady straightline horizontal flight in the vertical plane passing through the towing airplane in the direction of its flight (route). The tow is considered as being ideally flexible, elastic in longitudinal direction, heavy and under aerodynamic forces.

The problem was treated by the method of small perturbations. The equations of motion have been derived in the form of a system of ordinary, second order differential equations with constant coefficients. The six roots of the characteristic equation have been calculated by the Birstow method, and the Routh-Hurwitz stability criteria have been also applied.

On the basis of numerical calculations, the influence on the lateral stability of such parameters as: towing speed, the relative glider-towing airplane position, the tow length and the localization of the towing hook relatively to the glider centre of gravity, has been determined. The results are compared with the similar calculations performed for the glider in equivalent free flight.

KATEDRA MECHANIKI
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1968 r.