

STAN SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY I PEŁZANIE GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ

HENRYK KOPECKI (RZESZÓW)

1. Wstęp

Reologiczne zagadnienia geometrycznie nieliniowych powłok (przy założeniach upraszczających: obrotowej symetrii i braku stanu giętnego) było przedmiotem rozważań autora w pracy [11]. W pracy tej została uogólniona na zakres powłok obrotowo-symetrycznych w stanie błonowym podana przez BYCHAWSKIEGO [1] metoda rozwiązania problemu złożonej deformacji sprężysto-plastycznej i pełzania płaskiej membrany kołowej. Jednym z rozwiązań szczegółowych podanych przez autora w pracy [11] było analityczne rozwiązanie problemu deformacji sprężysto-plastycznych oraz pełzania powłoki stożkowej o małej wyniosłości, przy czym proces pełzania opisywało równanie konstytutywne odpowiadające prawu pełzania metali ODQVISTA [12].

Obecna praca stanowi rozszerzenie wyżej wspomnianego zagadnienia geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej dla przypadku, gdy materiał powłoki podlega pełzaniu zgodnie z równaniem konstytutywnym nieliniowej teorii dziedziczenia podanej w pracach [4, 5].

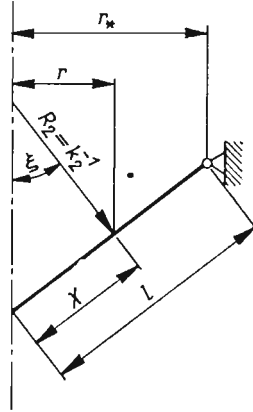
2. Podstawowe zależności geometryczne, związki fizykalne oraz warunki równowagi

Zależności geometryczne. Rozważamy cienką powłokę w kształcie stożka obrotowo-symetrycznego, obciążoną wewnętrznym ciśnieniem zmiennym w czasie. Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych krzywoliniowych związanych z liniami krzywizn (rys. 1) oraz zależności geometryczne odpowiadające teorii geometrycznie nieliniowej przy następujących założeniach: odkształcenia są nieskończenie małe; składowa pomieszczenia prostopadła do powierzchni środkowej powłoki ma wartość skończoną rzędu grubości powłoki; obowiązujące jest założenie Kirchhoffa-Love'a; grubość powłoki nie ulega zmianie w procesie deformacji.

Związki geometryczne między składowymi tensora odkształcenia a składowymi przemieszczeń przy spełnieniu powyższych założeń wyrażają się zależnościami

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{u}{r} \cos \xi + k_2 w, \end{aligned}$$

gdzie u jest przemieszczeniem południkowym, w oznacza ugięcie, zaś k_2 krzywiznę, którą w dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali jako funkcję czasu. Jest to uzasadnione tym, że w stanach błonowych płyt i powłok wykonanych z materiału o własnościach reologicznych naprężenia wykazują zmienność w czasie. Zatem, aby spełnione było równanie



Rys. 1

równowagi (suma rzutów sił na kierunek normalnej do elementu powłoki) w dowolnej chwili czasu t , krzywiznę k_2 traktujemy jako funkcję czasu przyjmując, że zmienia się ona zgodnie z formułą

$$(2.2) \quad k_2 = k_2^0 \psi(t),$$

gdzie k_2^0 oznacza krzywiznę k_2 w chwili $t = 0$, zaś $\psi(t)$ jest funkcją zależną tylko czasu spełniającą warunek początkowy

$$(2.3) \quad \psi(t) \Big|_{t=0} = 1.$$

Związki fizyczne. Ogólna forma prawa fizycznego jakie przyjmujemy dla materiału powłoki opiera się na teorii nieliniowej lepkosprężystości podanej w pracach [4, 5]. Teoria ta obejmuje szeroką klasę materiałów, zarówno metale, jak i niemetale. Podaje ona prawo konstytutywne w postaci nieliniowego operatora całkowego, który uzyskany został na bazie zasady superpozycji odkształceń w czasie uogólnionej na zakres nieliniowy. Podstawowe założenia teorii są następujące: materiał jest izotropowy, jednorodny i nieściśliwy; pełzanie materiału charakteryzuje uogólniona funkcja pełzania; proces nieliniowego pełzania zachodzi wtedy, gdy intensywność naprężenia osiąga w małym obszarze ciała wartość krytyczną; deformacja natychmiastowa w ogólnym przypadku jest nieliniowa.

W oparciu o powyższe założenia uogólniona zasada superpozycji ujęta została w formę całki Stieltjesa. Całka ta istnieje przy założeniu ograniczonej wariacji składowych stanu naprężenia, a przy spełnieniu warunku całkowalności pochodnych tych składowych przechodzi w całkę Riemanna. W wyniku tego związek między składowymi tensora odkształcenia ϵ_{ij} i składowymi dewiatora naprężenia s_{ij} przedstawia się w postaci

$$(2.4) \quad \epsilon_{ij} = L[s_{ij}],$$

gdzie

$$(2.5) \quad L[s_{ij}] = F_e[s(t)]s_{ij} - \int_{t^*}^t s_{ij}(\tau) \frac{d}{d\tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] d\tau.$$

W równaniu (2.5) oznaczają: F_e — nieliniową funkcję deformacji natychmiastowej; \bar{H} — uogólnioną funkcję pełzania; s — intensywność naprężenia; t — czas (chwila obserwacji); τ — czas bieżący; t^* — chwilę początkową.

W myśl omawianej teorii jedną z możliwych form przedstawienia uogólnionej funkcji pełzania jest postać wynikająca ze związku

$$(2.6) \quad \frac{d}{d\tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] = F_c[s(\tau)] \frac{d}{d\tau} \bar{C}(t-\tau),$$

gdzie $\bar{C}(t-\tau)$ jest współczynnikiem pełzania, zaś $F_c[s]$ współczynnikiem zwiększającym.

W szczególnym przypadku, gdy współczynnik $\bar{C}(t-\tau)$ jest liniową funkcją czasu, wówczas

$$(2.7) \quad \frac{d}{d\tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] = -F_c[s(\tau)],$$

zaś na podstawie (2.5) otrzymujemy

$$(2.8) \quad L[s_{ij}] = F_e[s(t)]s_{ij}(t) + \int_0^t s_{ij}(\tau) F_c[s(\tau)] d\tau,$$

(przyjmujemy, że chwila początkowa $t^* = 0$). Powyższe równanie (2.8) jest analogiczne do prawa podanego przez ODQVISTA [12] dla stanu nieustalonego pełzania metali.

W niniejszej pracy będziemy opierali się na zależności (2.5) przy założeniu, że uogólniona funkcja pełzania spełnia związek (2.6), czyli

$$(2.9) \quad L[s_{ij}] = F_e[s(t)]s_{ij}(t) - \int_0^t s_{ij}(\tau) F_c[s(\tau)] \frac{d}{d\tau} \bar{C}(t-\tau) d\tau.$$

Funkcje F_e i F_c uzależnione od aktualnego stanu naprężenia przyjmujemy w postaci dwuparametrowych związków potęgowych

$$(2.10) \quad F_e[s] = \frac{3}{2} A s^{m-1}, \quad F_c[s] = \frac{3}{2} B s^{n-1},$$

gdzie A, B oznaczają stałe fizyczne materiału, zaś m, n są liczbami naturalnymi charakteryzującymi stopień nieliniowości związków.

Związki dla odkształceń (2.1) po wyeliminowaniu przemieszczenia u możemy sprowadzić do jednego równania, otrzymując w ten sposób warunek nierozdzielności odkształceń, który po uwzględnieniu równania konstytutywnego (2.9) oraz po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych przyjmuje postać

$$(2.11) \quad \bar{x} \frac{d}{d\bar{x}} \{L[s_2]\} + \{L[s_2] - L[s_1]\} - \frac{h}{l} \left\{ \operatorname{tg} \xi \frac{d}{d\bar{x}} [\psi(t)\bar{w}] + \frac{1}{2} \frac{h}{l} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right)^2 \right\} = 0.$$

Tutaj przez h oznaczono grubość powłoki, zaś

$$(2.12) \quad \bar{x} = x/l, \quad \bar{w} = w/h, \quad s_1 = s_{11}, \quad s_2 = s_{22}.$$

Warunki równowagi. W celu określenia warunków równowagi podanych w formie związków różniczkowych rozpatrzmy stan równowagi elementu powłoki odkształconej. Rzutując siły działające na element powłoki na kierunek stycznej do południka x oraz normalnej do odkształconego elementu powłoki otrzymujemy układ dwóch równań, który po wprowadzeniu funkcji naprężeń z w postaci

$$(2.13) \quad z = \frac{\bar{x}\sigma_1}{C}, \quad \text{gdzie} \quad C = \frac{p}{4} \left(\frac{r_*}{h} \right)^2,$$

sprowadza się do równania różniczkowego

$$(2.14) \quad z \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{dz}{d\bar{x}} \left\{ \frac{l}{h} \operatorname{tg} \xi \psi(t) - \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \operatorname{tg}^2 \xi [\psi(t)]^2 \frac{\bar{w}}{\bar{x}} \right\} = \frac{p}{C} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \bar{x}.$$

Równanie równowagi (2.14) oraz równanie nierozdzielności odkształceń (2.11) stanowią wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi układ równań opisujący problem złożonej deformacji sprężysto-plastycznej i pełzania geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej.

3. Metoda rozwiązania

Metoda rozwiązania problemu deformacji złożonej (stan sprężysto-plastyczny i pełzanie) dla zagadnień obrotowo-symetrycznych, nie wprowadzających osobliwości z tytułu kształtu powłoki, została omówiona w pracy [11] oraz szczegółowo zilustrowana w zastosowaniu do płaskiej membrany kołowej oraz powłoki kulistej w stanie błonowym w pracach [7, 11]. Metoda ta polega na przyjęciu funkcji rozwiązujących z i \bar{w} w postaci podwójnych szeregów potęgowych zmiennej \bar{x} oraz małego parametru $\alpha^{(1)}$ ujmującego wpływ pełzania w procesie odkształcenia. Rozwiązanie to możemy traktować jako małe zaburzenie stanu natychmiastowego (sprężysto-plastycznego) spowodowane procesem pełzania. Rozwiązaniem podstawowym w tej metodzie jest zatem rozwiązanie dla stanu natychmiastowego.

W przypadku powłoki stożkowej, ze względu na osobliwość w punkcie $x = 0$, rozwinięcie względem \bar{x} nie pozwala na określenie współczynników szeregów potęgowych, dając w wyniku zerowe wartości wszystkich współczynników. W tym przypadku możemy przedstawić rozwiązanie w formie szeregów potęgowych o postaci⁽²⁾

$$(3.1) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_{ik} \bar{y}^i \alpha^k, \quad \bar{w} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{ik} \bar{y}^{i+1} \alpha^k,$$

gdzie $\bar{y} = 1 - \bar{x}$.

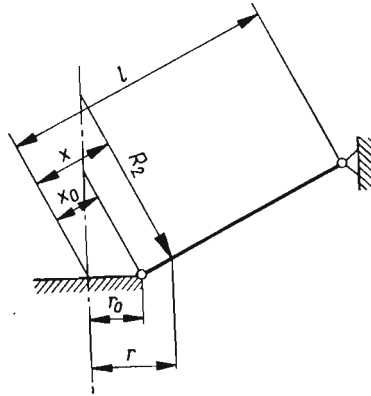
⁽¹⁾ Parametr α wyraża się przez stałe materiałowe (por. [6, 7, 11]).

⁽²⁾ Rozwinięcie względem $\bar{y} = 1 - \bar{x}$ odpowiada przedstawieniu rozwiązania holomorficznego w otoczeniu punktu położonego na brzegu rozważanego obszaru. Tego rodzaju rozwinięcie zostało zastosowane przez Bychawskiego i Siennickiego [8] do zagadnienia deformacji natychmiastowej i pełzania tarczy kołowej.

Zakładając $\alpha = 0$ otrzymujemy z powyższych związków pojedyncze szeregi potęgowe, będące rozwiązaniem dla stanu natychmiastowego

$$(3.2) \quad z_0 = \sum_{v=0}^{\infty} z_{v0} \bar{y}^v, \quad \bar{w}_0 = \sum_{v=0}^{\infty} w_{v0} \bar{y}^{v+1},$$

które jest rozwiązaniem podstawowym dla zagadnienia deformacji złożonej. Rozwiązanie to przedstawimy poniżej szczegółowo, przy czym ograniczymy się do powłoki o kształcie mało wyniosłego stożka ściętego. Przyjmujemy, że powłoka jest sztywno zamocowana obustronnie i poddana działaniu stałego ciśnienia wewnętrznego (rys. 2). Zakładamy dalej,



Rys. 2

że materiał powłoki zachowuje się w procesie deformacji zgodnie z równaniem konstytutywnym (2.9).

Układ równań podstawowych dla rozważanej powłoki otrzymamy ze związków (2.11) i (2.14) kładąc w nich

$$(3.3) \quad x \approx r, \quad x_0 \approx r_0, \quad \operatorname{tg} \xi \approx \xi \approx \operatorname{const}$$

oraz uwzględniając, że $0 \leq \bar{y} \leq 1 - \bar{r}_0$, gdzie $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{l}$. Otrzymujemy w ten sposób

$$(3.4) \quad (\bar{y}-1) \frac{d}{d\bar{y}} \{L[s_2]\} + \{L[s_2] - L[s_1]\} + \frac{h}{l} \xi \left[\psi(t) \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \right)^2 = 0,$$

$$(3.5) \quad \frac{h}{l} (\bar{y}-1) \bar{z} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{y}^2} + \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}] \left[\xi \psi(t) + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \right] = \frac{l}{h} (1-\bar{y}).$$

W powyższych wzorach oznaczają:

$$\bar{z} = \frac{\sigma_1}{p}, \quad \bar{z} + (\bar{y}-1) \bar{z}' = \frac{\sigma_2}{p}, \quad \bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}},$$

$$(3.6) \quad s_1 = \frac{1}{3} p [\bar{z} + (\bar{y}-1) \bar{z}'], \quad s_2 = \frac{1}{3} p [\bar{z} + 2(\bar{y}-1) \bar{z}'],$$

$$s^2 = p^2 \bar{\Omega}, \quad \bar{\Omega} = \bar{z}^2 + (\bar{y}-1) \bar{z} \bar{z}' + (\bar{y}^2 - 2\bar{y} + 1) \bar{z}'^2.$$

Przyjmujemy jednorodne warunki brzegowe

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=0} &= 0, & \bar{w}(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=0} &= 0, \\ u(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} &= 0, & \bar{w}(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} &= 0, \end{aligned}$$

a za stan początkowy dla procesu pełzania przyjmujemy stan natychmiastowy, co zapisujemy formułami

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{z}(t)\Big|_{t=0} &= \bar{z}_0, & \bar{\Omega}(t)\Big|_{t=0} &= \bar{\Omega}_0, & \bar{w}(t)\Big|_{t=0} &= \bar{w}_0, \\ L[s]\Big|_{t=0} &= L_0[s_0], & s(t)\Big|_{t=0} &= s_0. \end{aligned}$$

Uwzględniając zależności (3.8) układ równań podstawowych opisujących stan natychmiastowy możemy ostatecznie przedstawić w postaci

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} A p^m (\bar{y}-1) \left\{ [6\bar{z}'_0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}''_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_0 + \right. \\ \left. + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-3)} \bar{\Omega}'_0 \right\} + \frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} \right)^2 = 0,$$

$$(3.10) \quad \frac{h}{l} (\bar{y}-1) \frac{d}{d\bar{y}} \left(\bar{z}_0 \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} \right) + \bar{z}_0 \left(\xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} \right) + \xi (\bar{y}-1) \bar{z}'_0 = \frac{l}{h} (1-\bar{y}).$$

4. Rozwiązanie dla stanu natychmiastowego

Jak wykazaliśmy w przyjętej metodzie rozwiązania problemu złożonej deformacji, rozwiązanie dla stanu natychmiastowego jest rozwiązaniem podstawowym. W dalszych rozważaniach wykazemy, że rozwiązanie to jest również rozwiązaniem podstawowym w procesie odkształcenia, w którym efekty sprężyste uwzględniane są w chwili $t = 0$, zaś dla czasów $t > 0$ pominięte, jako małe w porównaniu z odkształceniami pełzania.

Rozwiązanie dla stanu natychmiastowego polega na podstawieniu szeregów (3.2) do równań (3.9) i (3.10). Otrzymujemy w ten sposób dwa układy równań algebraicznych w postaci rekurencyjnej, z których wyznaczamy kolejne współczynniki szeregów. I tak, z równania nierozdzielności odkształceń (3.9) otrzymujemy warunek, który musi być spełniony dla dowolnego \bar{y}

$$(4.1) \quad \frac{1}{2} A p^m \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} m_v \bar{y}^{v+1} - \sum_{v=0}^{\infty} m_v \bar{y}^v + \frac{1}{2} (m-1) \left[\sum_{v=0}^{\infty} p_v \bar{y}^{v+1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{v=0}^{\infty} p_v \bar{y}^v \right] \right\} + \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{h}{l} \xi (v+1) w_{v0} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 q_v \right] \bar{y}^v = 0.$$

Drogą tożsamościowego przyrównania wyrażeń przy jednakowych potęgach \bar{y} dochodzi-
my do układu równań algebraicznych w postaci

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} Ap^m \left\{ -m_0 - \frac{1}{2} (m-1)p_0 \right\} + \xi \frac{h}{l} w_{00} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 q_0 = 0, \\ & \frac{1}{2} Ap^m \left\{ m_0 - m_1 + \frac{1}{2} (m-1)(p_0 - p_1) \right\} + 2\xi \frac{h}{l} w_{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 q_1 = 0, \\ & \frac{1}{2} Ap^m \left\{ m_1 - m_2 + \frac{1}{2} (m-1)(p_1 - p_2) \right\} + 3\xi \frac{h}{l} w_{20} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 q_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Równanie równowagi (3.10) w wyniku podstawienia szeregów (3.2) daje warunek

$$(4.3) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \frac{h}{l} [v\bar{A}_v - (v+1)\bar{A}_{v+1}] + \xi z_{v0} + \frac{h}{l} \bar{A}_v + \xi v z_{v0} - \xi (v+1) z_{v+1,0} \right\} \bar{y}^v = \frac{l}{h} (1 - \bar{y}),$$

z którego otrzymujemy układ równań

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & -\frac{h}{l} \bar{A}_1 + \xi z_{00} + \frac{h}{l} \bar{A}_0 - \xi_0 z_{10} = \frac{l}{h}, \\ & 2\frac{h}{l} (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) + 2\xi(z_{10} - z_{20}) = -\frac{l}{h}, \\ & \frac{h}{l} (\bar{A}_2 - \bar{A}_3) + \xi(z_{20} - z_{30}) = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Występujące w powyższych równaniach współczynniki obliczamy z zależności:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} q_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)(k-v+1)w_{v0}w_{k-v,0}, & m_k &= \sum_{v=0}^k l_v h_{k-v}, \\ & \dots + 1)z_{k+1,0} + 2k(k+1)z_{k+1,0} - 2(k+1)(k+2)z_{k+2,0}, & h_0 &= g_0^{1/2(m-1)}, \\ h_k &= \frac{1}{kg_0} \sum_{v=1}^k \left[\frac{1}{2}(m+v) - k \right] g_v h_{k-v}, & g_k &= a_k + b_k - c_k + d_k - 2e_k + f_k, \\ a_k &= \sum_{v=0}^k z_{v0}z_{k-v,0}, & b_k &= \sum_{v=0}^k v z_{v0}z_{k-v,0}, & c_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)z_{v+1,0}z_{k-v,0}, \\ d_k &= \sum_{v=0}^k v(k-v)z_{v+1}z_{k-v,0}, & e_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)(k-v)z_{v+1}z_{k-v,0}, \\ f_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)(k-v+1)z_{v+1,0}z_{k-v+1,0}, & p_k &= \sum_{v=0}^k n_v K_{k-v}, \\ n_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)g_{v+1}j_{k-v}, & j_0 &= g_0^{1/2(m-3)}, & j_k &= \frac{1}{kg_0} \sum_{v=1}^k \left[\frac{1}{2}(m-1) - k \right] g_v j_{k-v}, \\ \bar{A}_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)w_{v0}z_{k-v,0}, & Q_k &= \sum_{v=0}^k K_v, & K_k &= z_{k0} + 2kz_{k0} - 2(k+1)z_{k+1,0}. \end{aligned}$$

Pierwsze z równań (4.2) pozwala na wyznaczenie współczynnika z_{20} jako funkcji z_{00} i z_{10} . Współczynnik z_{10} wyznaczmy z pierwszego z warunków brzegowych (3.7), który na mocy związków geometrycznych (2.1) możemy przedstawić w postaci równania

$$(4.6) \quad \varepsilon_{20} = \left|_{\bar{y}=0} L_0[s_{20}] \right|_{\bar{y}=0} = [z_0 + 2(\bar{y}-1)z'_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} \Big|_{\bar{y}=0} = 0,$$

skąd po podstawieniu pierwszego z szeregów potęgowych (3.2) otrzymujemy

$$(4.7) \quad z_{10} = \frac{z_{00}}{2}.$$

Z równań (4.2) otrzymujemy kolejno

$$(4.8) \quad z_{20} = \frac{3}{4} z_{00} - \frac{\frac{h}{l} w_{00} \left(\xi + \frac{1}{2} \frac{h}{l} w_{00} \right)}{2Ap^m \left(\frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)} z_{00}^{m-1}},$$

$$z_{30} = \frac{1}{16} (3m-7)z_{00} - \frac{1}{24} (5m-41)z_{20} - \frac{\frac{h}{l} w_{10} \left(\xi + \frac{h}{l} w_{00} \right)}{3Ap^m \left(\frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)} z_{00}^{m-1}},$$

.....

zaś z równań (4.4) mamy

$$(4.9) \quad w_{10} = \frac{1}{4} \left(\xi \frac{l}{h} + w_{00} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{z_{00}},$$

$$w_{20} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{20}}{z_{00}} \right) \left(w_{00} + \xi \frac{l}{h} \right) + w_{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{2z_{00}} \right],$$

$$w_{30} = \frac{1}{4z_{00}} \left[(z_{20} - z_{30}) \left(\xi \frac{l}{h} + w_{00} \right) + 2w_{10} \left(\frac{1}{2} z_{00} - z_{20} \right) + \frac{3}{2} w_{20} z_{00} \right],$$

.....

Mając określone współczynniki szeregów (3.2) jako funkcje z_{00} i \bar{w}_{00} przejdziemy obecnie do określenia tych ostatnich, wykorzystując drugi z warunków brzegowych (3.7), który możemy przedstawić w formie równania

$$(4.10) \quad \varepsilon_{20} \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = L_0[s_{20}] \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = [z_0 + 2(\bar{y}-1)z'_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = 0,$$

skąd po podstawieniu szeregów (3.2) mamy

$$(4.11) \quad \sum_{v=0}^{\infty} Q_v \bar{y}^v \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = 0.$$

Z drugiej strony, funkcja ugięcia \bar{w}_0 spełniać musi warunek

$$(4.12) \quad \bar{w}_0 \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = w_{00}(1-\bar{r}_0) + w_{10}(1-\bar{r}_0)^2 + w_{20}(1-\bar{r}_0)^3 + \dots = 0.$$

Jeżeli z kolei do równań (4.11) i (4.12) podstawimy związki (4.7), (4.8), (4.9), otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych zawierający poszukiwane niewiadome z_{00} i \bar{w}_{00} .

Stopień tych równań uzależniony jest od ilości wyrazów rozwinięcia uwzględnionych w powyższych warunkach. Na przykład, jeżeli ograniczymy się do uwzględniania dwóch wyrazów rozwinięcia w warunkach (4.11) i (4.12) otrzymamy odpowiednio

$$(4.13) \quad az_{00}^{m+2} + bz_{00}^2 + cz_{00} + d = 0,$$

$$(4.14) \quad w_{00} = 4 \frac{l}{h} \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \left(\frac{1}{2} \frac{l}{h} \frac{1}{z_{00}} - \frac{1}{4} \xi \right),$$

gdzie

$$a = \frac{2}{3} + \frac{9}{16}(1-\bar{r}_0)(m-1) - \frac{3}{4} \left[4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13) \right],$$

$$b = \xi^2 \frac{\left[4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13) \right] (1-\bar{r}_0)}{2Ap^m \left(\frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)} (5-\bar{r}_0)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \right),$$

$$(4.15) \quad c = 2\xi \frac{l}{h} \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \left(1 - \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \right) \frac{4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13)}{2Ap^m \left(\frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)}},$$

$$d = 2 \left(\frac{l}{h} \right)^2 \left(\frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \right)^2 \frac{4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13)}{2Ap^m \left(\frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)}},$$

.....

Zatem szeregi

$$(4.16) \quad \bar{z} = z_{00} + z_{10}\bar{y} + z_{20}\bar{y}^2 + z_{30}\bar{y}^3 + \dots,$$

$$(4.17) \quad \bar{w}_0 = w_{00}\bar{y} + w_{10}\bar{y}^2 + w_{20}\bar{y}^3 + \dots,$$

stanowią rozwiązanie podstawowe dla problemu złożonej deformacji rozważanej powłoki sztywno zamocowanej na brzegach, obciążonej stałym wewnętrznym ciśnieniem.

Mając określone funkcje \bar{z}_0 i \bar{w}_0 obliczamy naprężenia oraz ugięcie powłoki z zależności

$$(4.18) \quad \sigma_{10} = p \sum_{v=0}^{\infty} z_{v0} \bar{y}^v,$$

$$(4.19) \quad \sigma_{20} = p \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) (z_{v0} - z_{v+1,0}) \bar{y}^v,$$

$$(4.20) \quad w_0 = h \sum_{v=0}^{\infty} w_{v0} \bar{y}^{v+1}.$$

5. Rozwiązanie w zakresie czystego pełzania

Podamy obecnie rozwiązanie dla powłoki stożkowej wykonanej z materiału wykazującego wyłącznie odkształcenia pełzania. Przyjmujemy, że pełzanie materiału powłoki opisuje równanie konstytutywne (2.9), w którym funkcję nieliniowej sprężystości F_e położymy równą zeru.

Układ równań podstawowych opisujących tego rodzaju stan w powłoce otrzymamy z równań (3.4) i (3.5) zakładając, że

$$(5.1) \quad L[s_{ij}]|_{F_e=0} = L_p[s_{ij}].$$

Mamy wtedy układ równań

$$(5.2) \quad (\bar{y}-1) \frac{d}{d\bar{y}} \{L_p[s_2]\} + \{L_p[s_2] - L_p[s_1]\} + \frac{h}{l} \xi \left[\psi \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right)^2 = 0,$$

$$(5.3) \quad \frac{h}{l} (\bar{y}-1) \bar{z}_p \frac{d^2 \bar{w}_p}{d\bar{y}^2} + \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p] \left[\xi \psi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right] = \frac{l}{h} (1-\bar{y}),$$

gdzie

$$(5.4) \quad \bar{z}_p(t) = z(t)|_{F_e=0}, \quad \bar{w}_p(t) = \bar{w}(t)|_{F_e=0}.$$

Niżej przedstawiona metoda rozwiązania opiera się na analogii fizykalno-geometrycznej do problemu natychmiastowego (nieliniowo sprężystego) podanej w pracach [3, 7, 11]. Istota rozwiązania polega na rozdzieleniu zmiennych w równaniach podstawowych (5.2) i (5.3). Aby tego dokonać należy różniczkowo-całkowe równanie nierozdzielności odkształceń (5.2) sprowadzić do równania różniczkowego. Możemy to uczynić, jeżeli współczynnikowi pełzania $\bar{C}(t-\tau)$ nadamy konkretny kształt. Przyjmujemy tutaj, że współczynnik pełzania ma postać wykładniczą

$$(5.5) \quad \bar{C}(t-\tau) = \bar{C}_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}];$$

stąd po zróżniczkowaniu względem czasu bieżącego otrzymamy

$$(5.6) \quad \frac{d\bar{C}}{d\tau} = -\gamma \bar{C}_0 e^{-\gamma(t-\tau)}.$$

Jeżeli zależność (5.6) podstawimy do równania konstytutywnego (2.9) zakładając równocześnie, że $F_e = 0$ otrzymamy po rozpisaniu na składowe

$$(5.7) \quad L_p[s_1] = \frac{1}{2} B \bar{C}_0 \gamma p^n \int_0^t [\bar{z}_p + (\bar{y}-1) \bar{z}'_p] \Omega_p^{1/2(n-1)} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau,$$

$$L_p[s_2] = \frac{1}{2} L \bar{C}_0 \gamma p^n \int_0^t [\bar{z}_p + 2(\bar{y}-1) \bar{z}'_p] \Omega_p^{1/2(n-1)} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau.$$

Otrzymane operatory podstawiamy do równania nierozdzielności odkształceń (5.2), a następnie na drodze różniczkowania względem t i eliminacji całek dochodzimy do równania różniczkowego w postaci

$$(5.8) \quad \frac{1}{2} B\bar{C}_0 \gamma p^n (\bar{y}-1) \left\{ [6\bar{z}'_p + 2(\bar{y}-1)\bar{z}''_p] \bar{\Omega}_p^{1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_p + 2(\bar{y}-1)\bar{z}''_p] \bar{\Omega}_p^{1/2(m-3)} \bar{\Omega}'_p \right\} = \gamma \frac{h}{l} \xi \left[\psi \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right] + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right)^2 - \frac{h}{l} \xi \left[\dot{\psi} \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} + \psi \frac{d\dot{\bar{w}}_p}{d\bar{y}} \right].$$

Przyjmujemy rozwiązanie dla funkcji naprężeń i ugięcia w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których jedna uzależniona jest tylko od zmiennej \bar{y} , druga zaś wyłącznie od czasu t

$$(5.9) \quad \bar{z}_p(\bar{y}, t) = \bar{z}_p^0(\bar{y}) \varphi(t),$$

$$(5.10) \quad \bar{w}_p(\bar{y}, t) = \bar{w}_p^0(\bar{y}) \psi(t).$$

Podstawiając zależności (5.9) i (5.10) do równań podstawowych (5.8) i (5.3) otrzymujemy odpowiednio

$$(5.11) \quad \frac{\frac{1}{2} B\bar{C}_0 p^n (\bar{y}-1)}{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right)^2} \left\{ [6\bar{z}_p^{0'} + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0''}] \bar{\Omega}_p^{0\ 1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_p^0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0'}] \bar{\Omega}_p^{0\ 1/2(m-3)} \bar{\Omega}_p^{0\prime} \right\} = \frac{-1}{\gamma \varphi^n} (-\psi^2 \gamma + 2\dot{\psi} \psi) = \lambda,$$

$$(5.12) \quad \left(\frac{h}{l} \right)^2 \bar{z}_p^0 \frac{d^2 \bar{w}_p^0}{d\bar{y}^2} + \frac{h}{l} \frac{1}{\bar{y}-1} \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p^0] \left[\xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right] = \frac{1}{\psi \varphi} = \lambda_1,$$

gdzie λ , λ_1 oznaczają stałe, które należy określić.

Zależność (5.12) przedstawia układ dwóch równań o postaci

$$(5.13) \quad \left(\frac{h}{l} \right)^2 \bar{z}_p^0 \frac{d^2 \bar{w}_p^0}{d\bar{y}^2} + \frac{h}{l} \frac{1}{\bar{y}-1} \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p^0] \left[\xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right] = \lambda_1,$$

$$(5.14) \quad \frac{1}{\psi \varphi} = \lambda_1.$$

Równanie (5.13) jest formalnie analogiczne do równania równowagi (3.10) dla stanu natychmiastowego, przy czym

$$(5.15) \quad \lambda_1 = 1.$$

Podstawiając (5.15) kolejno do równań (5.13) i (5.14) otrzymujemy odpowiednio

$$(5.16) \quad \left(\frac{h}{l} \right)^2 \bar{z}_p^0 \frac{d^2 \bar{w}_p^0}{d\bar{y}^2} + \frac{h}{l} \frac{1}{\bar{y}-1} \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p^0] \left[\xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right] = 1,$$

$$(5.17) \quad \psi = \frac{1}{\varphi}.$$

Jeżeli zależność (5.17) uwzględnimy w związku (5.11) otrzymamy również układ dwóch równań

$$(5.18) \quad \frac{1}{2} \overline{BC}_0 p^n \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{y}-1}{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}}\right)^2} \left\{ [6\bar{z}_p^{0'} + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0''}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (n-1) [\bar{z}_p^0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0'}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-3)} \bar{\Omega}_p^{0'} \right\} = 1,$$

$$(5.19) \quad 2 \frac{\dot{\varphi}}{\gamma \varphi} + \lambda \varphi^{n+2} = 1,$$

z których pierwsze jest formalnie analogiczne do równania nierozdzielności odkształceń dla stanu natychmiastowego (3.9). Jeżeli więc znamy rozwiązanie równania (3.9)

$$(5.20) \quad \bar{z}_0 = f(A, m, \bar{y}),$$

to rozwiązanie równania (5.18) możemy przedstawić w postaci

$$(5.21) \quad \bar{z}_p^0 = f\left(\frac{B}{\lambda}, n, \bar{y}\right).$$

Całkując równanie (5.19) otrzymujemy

$$(5.22) \quad \varphi = \left[\sqrt[n+2]{\lambda - (\lambda \varphi_0^{n+2} - 1) e^{-\frac{n+2}{2} \gamma t}} \right]^{-1},$$

gdzie stałą $\varphi_0 = \varphi(t)|_{t=0}$ wyznaczmy z warunku początkowego. Z równania (5.22) otrzymujemy $\varphi_0 = 1$.

Zatem funkcja $\varphi(t)$ przyjmuje ostatecznie postać

$$(5.23) \quad \varphi(t) = [\lambda - (\lambda - 1) e^{-\frac{n+2}{2} \gamma (t-t_0)}]^{-\frac{1}{n+2}}.$$

W celu określenia stałej λ uczynimy założenie, że stan początkowy procesu pełzania określony jest przez stan natychmiastowy; w rozważanym przypadku jest nim reakcja sprężysto-plastyczna. Zatem dla $t = 0$

$$(5.24) \quad \bar{z}_p = \bar{z}_p^0 = \bar{z}_0 \quad \text{oraz} \quad \bar{w}_p = \bar{w}_p^0 = \bar{w}_0.$$

Rozwiązanie dla takiego stanu zostało przedstawione w punkcie 4.

Dla czasów większych od zera pomijamy wpływ sprężystych własności materiału powłoki. Rozwiązanie w tym przypadku musi spełniać równocześnie równania (3.9) i (5.18). Porównując równania (3.9) i (5.18) w założeniu, że spełniona jest zależność (5.24) otrzymujemy następujący warunek dla λ , który musi być spełniony dla dowolnego \bar{y} w przedziale $\bar{r}_0 \leq \bar{y} \leq 1$.

$$(5.25) \quad \lambda = \frac{\overline{BC}_0}{A} p^{n-m} \frac{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}}\right)^2}{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}}\right)^2} \times \\ \times \frac{[6\bar{z}_p^{0'} + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0''}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-1)} + \frac{1}{2} (n-1) [\bar{z}_p^0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0'}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-3)} \bar{\Omega}_p^{0'}}{[6\bar{z}_0' + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_0''] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_0'] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-3)} \bar{\Omega}_0'}$$

W szczególnym przypadku, gdy $m = n$, to znaczy, gdy nieliniowość sprężystą i nieliniowość pełzania określa identyczny wykładnik potęgowy, warunek (5.25) przyjmuje postać

$$(5.26) \quad \lambda = \frac{B\bar{C}_0}{A} = \frac{\bar{B}}{A}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{B} = B\bar{C}_0.$$

Ostatecznie funkcję naprężeń z_p możemy przedstawić w postaci

$$(5.27) \quad \bar{z}_p = \bar{z}_0(\bar{y}) \left[\sqrt[n+2]{\lambda - (\lambda - 1)e^{-\frac{n+2}{2} \gamma t}} \right]^{-1}.$$

W granicy, gdy czas zmierza do nieskończoności, z zależności (5.27) otrzymujemy

$$(5.28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}_p = \frac{\bar{z}_0(\bar{y})}{\sqrt[n+2]{\lambda}}.$$

Funkcję ugięcia określamy z zależności (5.10). Przyjmuje ona ostatecznie postać

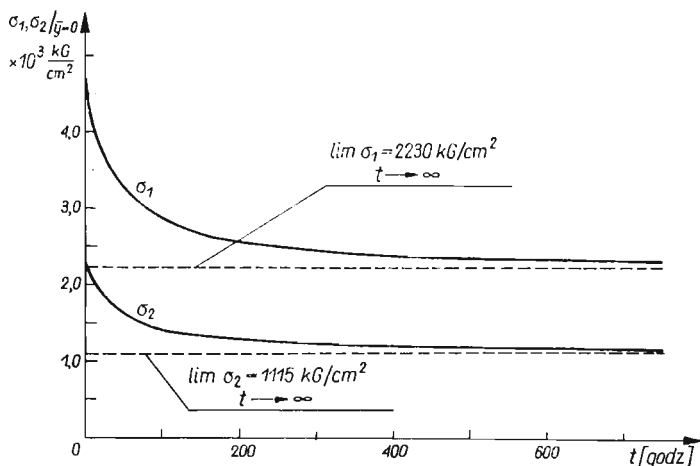
$$(5.29) \quad \bar{w}_p(\bar{y}, t) = \bar{w}_0(\bar{y}) \sqrt[n+2]{\lambda - (\lambda - 1)e^{-\gamma \frac{n+2}{2} t}}.$$

Podobnie jak w przypadku naprężeń również ugięcie ulega stabilizacji po czasie nieskończenie długim

$$(5.30) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{w}_p(\bar{y}, t) = \frac{1}{\lambda^{n+2}} \bar{w}_0(\bar{y}).$$

Stabilizację naprężeń i ugięć po czasie nieskończenie długim uzasadnia przyjęta postać współczynnika pełzania w równaniu konstytutywnym.

Przykład liczbowy. Rozważymy przykład liczbowy ilustrujący rozkład naprężeń w powłoce w chwili przyłożenia obciążenia oraz zmianę naprężeń i ugięć w czasie.



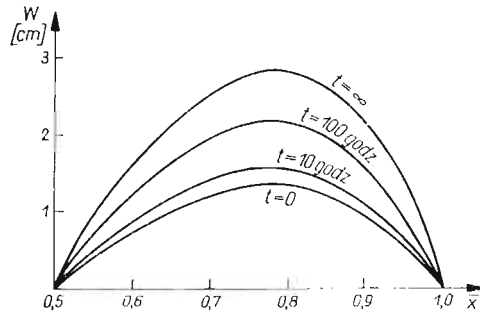
Rys. 3

Przyjmujemy następujące wartości liczbowe: stałe ciśnienie $p = 20 \text{ kG/cm}^2$, grubość powłoki $h = 1 \text{ cm}$, $l = 100 \text{ cm}$, $\xi = 10^\circ$, wykładniki nieliniowości $m = n = 3$, $\bar{r}_0 = 0,5$, stałe fizyczne nieliniowego prawa fizycznego (2.10) identyfikujemy w oparciu o dane

z [9] i [10]: $A = 0,4 \cdot 10^{-12} [\text{cm}^2/\text{kG}]^3$, $B = 1,6 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{kG}} \right]^3$; $\gamma = 0,0012 \text{ godz.}^{-1}$. Ograniczając się do dwóch wyrazów rozwinięcia warunków (4.11) i (4.12) oraz uwzględniając trzy wyrazy szeregów (4.16) i (4.17) otrzymujemy odpowiednio dla funkcji naprężeń i ugięcia następujące wyrażenia:

$$\bar{z}_0 = 232,5 + 116,25\bar{y} - 178\bar{y}^2,$$

$$\bar{w}_0 = 7,69\bar{y} - 8,22\bar{y}^2 - 14,32\bar{y}^3.$$



Rys. 4

W oparciu o (5.22) wyznaczamy funkcję czasu

$$(t) = [40 - 39e^{-0,003t}]^{-1/5}.$$

Wyniki obliczeń przedstawiamy wykreślnie. Zmianę naprężeń w czasie w punktach $\bar{y} = 0$ powłoki ilustruje rys. 3; rys. 4 przedstawia rozkład ugięć powłoki dla różnych wartości czasu t .

6. Wnioski

W pracy podano układ równań podstawowych opisujących problem geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej w stanie błonowym, obciążonej wewnętrznym ciśnieniem.

Przyjęte równanie konstytutywne obejmuje szeroką klasę materiałów zarówno metali, jak i niemetalii określonych formą współczynnika zwiększającego oraz współczynnika pełzania. Z postaci równania wynikają przypadki szczególne: nieliniowa i liniowa deformacja natychmiastowa; prawo pełzania metali Odqvista; związki Boltzmanna dla liniowej lepkosprężystości.

Przedstawiono podstawowe rozwiązanie dla stanu natychmiastowego dla procesu deformacji złożonej mało wyniosłej powłoki o kształcie stożka ściętego sztywno zamocowanej obustronnie, ograniczając się do przedstawienia rozwiązania jakościowego. Algebraiczna postać uzyskanych współczynników szeregów potęgowych daje możliwość łatwego zaprogramowania i wykonywania obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej dla szeregu wartości liczbowych stałych materiałowych i parametrów geometrycznych powłoki.

Podano rozwiązanie dla pełzania, przedstawiając je za pomocą fizykalno-geometrycznej analogii do problemu natychmiastowego, podobnie jak to uczynił autor dla powłoki

stożkowej w pracy [11]. Stosowane jednak w pracy [11] prawo fizykalne ODQVISTA [12] opisuje w istocie stan pełzania ustalonego. Ze względu na zmianę naprężeń w czasie, stan taki w rozpatrywanej powłoce nie ma miejsca. Przyjmowanie — jak w obecnej pracy — nieliniowych teorii dziedziczenia w geometrycznie nieliniowych problemach pełzania membran, w świetle powyższego wydaje się szczególnie uzasadnione.

Z przedstawionego rozwiązania dla pełzania wynika, że naprężenia maleją, zaś ugięcia rosną w czasie. Po czasie nieskończenie długim następuje stabilizacja naprężeń i ugięć, co wynika z kształtu współczynnika pełzania, przy czym wartość naprężeń i ugięć po czasie nieskończenie długim uzależniona jest od stałych fizycznych materiału powłoki. Dla identycznego problemu przy zastosowaniu prawa ODQVISTA [12], uzyskiwano po nieskończenie długim czasie [11] wzrost ugięć do nieskończoności przy równoczesnym spadku naprężeń do zera. Porównanie wyników otrzymanych w pracy [11] z obecnymi rezultatami pozwala wnioskować, że istnieje związek między prawem konstytutywnym opisującym fizyczne właściwości materiału powłoki a zakresem geometrycznej nieliniowości, jaki powinno się uwzględniać w podobnych problemach.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. BYCHAWSKI, *Large deflections of the elasto-creeping circular membrane*, Arch. Mech. Stos. 3, **17** (1965).
2. Z. BYCHAWSKI, *O stosowalności analogii sprężystej w zakresie nieliniowej geometrycznej teorii pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inż. 3, **13** (1965).
3. Z. BYCHAWSKI *Elastic analogue in the general case of a geometrically nonlinear membrane subject to creep*, Arch. Mech. Stos. 4, **17** (1965).
4. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Some fundamental concepts of the theory of nonlinear viscoelasticity*, Arch. Mech. Stos. 6, **18** (1966).
5. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Theory of nonlinear viscoelastic behavior*, Arch. Mech. Stos. 4, **19** (1967).
6. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Nieliniowe zagadnienia odkształceń sprężysto-plastycznych i pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inż. 3, **15** (1967).
7. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Sprężysto-plastyczna deformacja i pełzanie geometrycznie nieliniowej powłoki kulistej*, Rozpr. Inż. 2, **15** (1967).
8. Z. BYCHAWSKI, H. SIENNICKI, *Zginanie tarczy kołowej w zakresie nieliniowej deformacji natychmiastowej i pełzania*, III Sympozjon poświęcony reologii, Wrocław 1966.
9. I. FINIE, W. R. HELLER, *Pełzanie materiałów konstrukcyjnych*, WNT, Warszawa 1966.
10. E. HOUDERMONT, *Handbuch der Sonderstahlkunde*, Springer, Berlin 1956.
11. H. KOPECKI, *Reologiczne zagadnienia nieliniowych deformacji powłok obrotowo-symetrycznych w stanie blonowym*, Rozprawa doktorska, Politech. Krakowska, 1967 (maszynopis).
12. F. K. G. ODQVIST, *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.
13. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *Zagadnienia powłok niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos. 1, **1** (1963).
14. A. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.

Резюме

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И ПОЛЗУЧЕСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе рассматриваются напряжения и прогибы геометрически нелинейной конической оболочки, выполненной из материала обладающего свойством ползучести, в соответствии с нелинейной теорией наследственности, данной Быхавским и Фоксом.

Дана система уравнений описывающих рассматриваемую задачу. Обсужден метод решения задачи в случае, когда происходит сложное деформирование (мгновенная деформация и деформация зависящая от времени), а форма оболочки вводит особенность.

Дано основное решение (мгновенное состояние) для пологой конической оболочки, а также решение справедливое в режиме ползучести.

В заключение представлен ряд выводов.

S u m m a r y

ELASTO-PLASTIC STATE AND CREEP OF A GEOMETRICALLY NON-LINEAR CONOIDAL SHELL

The determination of stresses and displacements is considered for a geometrically non-linear conoidal shell subject to creep deformations. It is assumed that the material behaves according to the non-linear theory of inheritance — proposed by Bychawski and Fox [4, 5]. The corresponding set of equations is derived and the method of solution of the complex deformation problem (instantaneous deformation and time-dependent deformation) is discussed in the case of singularity in the shape of shell. The fundamental solution (instantaneous state) and the solution in the range of pure creep are presented for shallow conoidal shells. The final part of the paper includes some conclusions.

ZESPÓŁ MECHANIKI TECHNICZNEJ
WSI W RZESZOWIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1968 r.
