MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 7 (1969)

DZIAŁANIE RUCHOMEGO PUNKTOWEGO ŹRÓDŁA CIEPŁA W PRZESTRZENI NIEOGRANICZONEJ

ZOFIA SOBCZYŃSKA (POZNAŃ)

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie pola temperatury i pola przemieszczeń w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, wywołanych działaniem chwilowego, punktowego źródła ciepła $Q = Q_0 \delta(x_i)\delta(t)$. Źródło to porusza się ze stałą prędkością v wzdłuż osi x_3 przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych.

Rozwiązaniem podobnego zagadnienia zajmowali się już NOWACKI [3] i ROSENTHAL [4]. Wyznaczyli oni funkcje określające pole temperatury oraz przemieszczenia dla źródła ruchomego punktowego o stałej wydajności pomijając w równaniu przewodnictwa cieplnego pochodną lokalną funkcji pola temperatury.

W niniejszej pracy pochodnej tej pomijać nie będziemy.

Rozważane zagadnienie opisuje następujący układ równań:
równania przemieszczeniowe

$$\mu\nabla^2 u_i + (\mu+\lambda)\varepsilon_{,i} = \alpha_t(2\mu+3\lambda)\Theta_{,i} \tag{1}$$

i równanie przewodnictwa cieplnego

$$\nabla^2\Theta - \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta} = -\frac{Q_0}{\varkappa}\delta(x_i)\delta(t); \qquad \varkappa = \frac{\lambda_1}{c\varrho}. \tag{2}$$

W równaniach tych u_i oznaczają składowe wektora przemieszczenia, Θ — pole temperatury, Q_0 jest wydajnością źródła; λ_1 oznacza współczynnik wewnętrznej przewodności cieplnej, ϱ jest gęstością ośrodka, a c ciepłem właściwym; $\delta(x_i)$ i $\delta(t)$ są funkcjami Diraca względem miejsca i czasu.

Zakładamy, że w chwili $t = 0$ składowe wektora przemieszczenia oraz pole temperatury równe są zeru.

Przypuśćmy, że ze źródłem związany jest ruchomy układ współrzędnych ξ_i równoległy do stałego układu współrzędnych x_i i taki, że

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2 \quad \text{i} \quad \xi_3 = x_3 - vt.$$

Po przeprowadzeniu zamiany zmiennych równanie przewodnictwa cieplnego (2) będzie miało postać

$$\nabla^2\Theta = \frac{1}{\varkappa}\left(\dot{\Theta} - v\frac{\partial\Theta}{\partial\xi_3}\right) - \frac{Q_0}{\varkappa}\delta(\xi_i)\delta(t). \tag{3}$$

Stosując transformację Laplace'a do równań przemieszczeniowych (1) i do równania (3) otrzymamy

$$\mu\nabla^2 u_{Li}+(\lambda+\mu)\varepsilon_{L,i}=\alpha_t(2\mu+3\lambda)\Theta_{L,i}, \tag{4}$$

$$\nabla^2\Theta_L=\frac{1}{\varkappa}\left(s\Theta_L-v\frac{\partial\Theta_L}{\partial\xi_3}\right)-\frac{Q_0}{\varkappa}\delta(\xi_i). \tag{5}$$

Po uwzględnieniu przedstawienia całkowego funkcji Diraca we współrzędnych walcowych, rozwiązanie równania (5) otrzymujemy w postaci

$$\Theta_L=\frac{Q_0}{4\pi\varkappa\sqrt{r^2+\xi_3^2}}\exp\left[-\frac{v\xi_3}{2\varkappa}-\sqrt{(r^2+\xi^2)\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{v^2}{4\varkappa}+s\right)}\right], \tag{6}$$

przy czym

$$r=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Po odwróceniu transformacji Laplace'a pole temperatury określa wzór

$$\Theta=\frac{Q_0}{8\sqrt{\varkappa^3}\sqrt{\pi^3}\sqrt{t^3}}\exp\left[-\frac{v\xi_3}{2\varkappa}-\frac{v^2t}{4\varkappa}-\frac{r^2+\xi_3^2}{4\varkappa t}\right]. \tag{7}$$

Ponieważ mamy do czynienia z przestrzenią nieograniczoną, pole przemieszczeń musi posiadać potencjał zdefiniowany związkami

$$u_i=\Phi_{,i}. \tag{8}$$

Równania przemieszczeniowe (1), po uwzględnieniu związków (8), zredukują się wówczas do jednego równania Poissona

$$\nabla^2\Phi=m\Theta;\quad m=\frac{1+\nu}{1-\nu}. \tag{9}$$

Rozwiązanie tego równania otrzymamy wykorzystując rozwiązanie (7) oraz uwzględniając fakt, że w punkcie, w którym aktualnie znajduje się źródło, to jest dla $r=\xi_3=0$, funkcja potencjału równa się zeru.

Rozwiązanie to ma postać

$$\Phi=\frac{mQ}{4\pi\sqrt{r^2+\xi_3^2}}\exp\left(-\frac{v^2t}{4\varkappa}-\frac{v\xi_3}{2\varkappa}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2+\xi_3^2}{\varkappa t}}\right). \tag{10}$$

Możemy teraz w oparciu o związki (8) wyznaczyć przemieszczenia drogą prostego różniczkowania. Mamy

$$u_r=-\frac{mQ_0r}{4\pi(r^2+\xi_3^2)}\exp\left(-\frac{v^2t}{4\varkappa}-\frac{v\xi_3}{2\varkappa}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+\xi_3^2}}\times\right. \tag{11}$$

$$\left.\times\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2+\xi_3^2}{\varkappa t}}\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varkappa t}}\exp\left[-\frac{r^2+\xi_3^2}{4\varkappa t}\right]\right\};$$

$$u\xi_3 = -\frac{mQ_0\xi_3}{4\pi(r^2+\xi_3^2)}\exp\left(-\frac{v^2t}{4\varkappa}-\frac{v\xi_3}{2\varkappa}\right)\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\xi_3^2}}+\frac{v}{2\varkappa}\right)\operatorname{erf}\times\right. \tag{12}$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2+\xi_3}{\varkappa t}}\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varkappa t}}\exp\left[-\frac{(r^2+\xi_3^2)}{4\varkappa t}\right]\right\}.$$

Jeżeli teraz scałkowalibyśmy otrzymane wzory (7), (11), (12) względem czasu w granicach $0 < \tau < \infty$, otrzymane rozwiązania będą odpowiadały rozwiązaniom NOWACKIEGO [3] dla ruchomego źródła ciepła o stałej wydajności.

Pokażemy to na przykładzie pola temperatury

$$\bar{\Theta} = \int_0^\infty \Theta(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty \frac{Q_0}{8\sqrt{\pi^3}\sqrt{\varkappa^3}\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left[-\frac{v\xi_3}{2\varkappa}-\right. \tag{13}$$

$$\left.-\frac{v^2(t-\tau)}{4\varkappa}-\frac{(r^2+\xi_3^2)}{4\varkappa(t-\tau)}\right]d\tau = \frac{Q_0}{4\pi\varkappa\sqrt{r^2+\xi_3^2}}\exp\left[-\frac{v}{2\varkappa}(\xi_3+\sqrt{r^2+\xi_3^2})\right].$$

Jeżeli natomiast we wzorach (7), (11) i (12) przyjmiemy $v = 0$ to otrzymamy dobrze znane wzory dla nieruchomego punktowego źródła ciepła [3].

Na zakończenie należy podkreślić, że wzory (7), (11) i (12) otrzymane w niniejszej pracy są dla $Q_0 = 1$ funkcjami Greena i jako takie mogą być wykorzystane do budowy rozwiązań dla dowolnego rozkładu źródeł.

Literatura cytowana w tekście

[1] В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, *Справочник по операционному изчислению*, Гос. Тех.-Теор. Лит., Москва 1951.

[2] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F. G. TRICOMI, *Tables of integral transforms*, McGraw-Hill, 1954.

[3] W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, 1962.

[4] D. ROSENTHAL, *The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments*, Transactions of the ASME 11, 1946.

Резюме

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОГО ТОЧЕЧНОГО ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА НА НЕОГРАНИЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

В работе решается задача определения температурного поля и поля перемещений в упругом бесконечном пространстве, подверженном воздействию теплового источника $Q = Q_0\delta(x_i)\delta(t)$. Этот источник перемещается с постоянной скоростью v вдоль оси x_3. В решении используется трансформация Лапласа. Компоненты перемещений определяются при помощи функции потенциала термического перемещения. Полученное решение является функцией Грина для $Q_0 = 1$ и может быть использовано для построения решения задачи при произвольном распределении источников.

Summary

ACTION OF A MOVING CONCENTRATED HEAT SOURCE IN ELASTIC SPACE

The aim of the paper is to determine the temperature and displacement field in an infinite elastic space acted on by the heat source $Q = Q_0\delta(x_i)\delta(t)$. The heat source moves at constant velocity v along the x_3-axis. The displacement components are expressed in terms of the thermo-elastic displacement potential, Laplace transforms being applied to the basic equations. The solution for $Q_0 = 1$ represents the Green function of the problem and can be applied to cases with arbitrary distributions of heat sources.

KATEDRA MECHANIKI
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1968 r.