MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 8 (1970)

UWAGI O INFINITEZYMALNEJ TEORII MATERIAŁÓW SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYCH

WŁODZIMIERZ WOJNO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Materiał sprężysto/lepkoplastyczny jest modelem materiału, który zachowuje się sprężyście do osiągnięcia statycznej granicy plastyczności, po której przekroczeniu pojawiają się w nim efekty reologiczne w postaci sprzężonych ze sobą efektów lepkich i plastycznych. Praktyczna przydatność badań nad zachowaniem się tego modelu wynika zasadniczo stąd, że w ramach teorii opisującej jego własności można ująć własności wrażliwych na prędkość odkształcenia materiałów plastycznych[1)].

Ogólne podstawy opisu własności materiałów sprężysto/lepkoplastycznych przyniosła w roku 1932 praca HOHENEMSERA i PRAGERA [3] (patrz również PRAGER [15, 16]). Idea HOHENEMSERA i PRAGERA została rozszerzona dzięki pracom PERZYNY [6–8], poświęconym sformułowaniu i analizie równań konstytutywnych dla wrażliwych na prędkość odkształcenia materiałów plastycznych. Równania konstytutywne, opisujące własności sprężysto/lepkoplastycznych gruntów, zostały zaproponowane i szczegółowo przedyskutowane przez OLSZAKA i PERZYNĘ w pracy [5]. Wyżej cytowane prace dotyczą procesów izotermicznych i odkształceń infinitezymalnych. Uogólnienia proponowanych w pracy [8] równań konstytutywnych, przez uwzględnienie wpływu temperatury, dokonali na drodze czysto fenomenologicznej najpierw OLSZAK i PERZYNA [4], później PERZYNA i WIERZBICKI [11].

Sformułowanie i analizę równań konstytutywnych dla izotropowych materiałów sprężysto/lepkoplastycznych w przypadku odkształceń skończonych i procesów izotermicznych przyniosła praca [12]. Koncepcję tę rozszerzono na przypadek procesów termodynamicznych w pracy [18]. W końcu ogólne sformułowanie termodynamicznej teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych zostało dokonane w pracy [19] (patrz również [20]), oraz w oparciu o koncepcję termodynamiki materiałów z parametrami wewnętrznymi w pracy [14].

Głównym celem niniejszej pracy jest rozszerzenie, na drodze przejścia granicznego[2)] od przedstawionej w [18, 19, 20] torii przy odkształceniach skończonych[3)], proponowanej

---

[1)] Obszerne opracowania zagadnień teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych zawiera praca [9] i monografie [10, 13].

[2)] Przy założeniu, że odkształcenia i przyrosty temperatury są małe. Pojęcie małości tych wielkości zostało dokładnie sprecyzowane w p. 3.

[3)] Zarys tej teorii jest przedstawiony w skrócie w p. 2.

w pracach [4—8, 11] infinitezymalnej teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych na przypadek procesów termodynamicznych, a także uzyskanie i przebadanie ograniczeń, jakie wynikają z drugiego prawa termodynamiki.

2. Termodynamiczny opis własności materiałów sprężysto/lepkoplastycznych przy odkształceniach skończonych

Zgodnie z pracami [18, 19, 20], własności materiałów sprężysto/lepkoplastycznych, poddanych procesom termodynamicznym przy odkształceniach skończonych, są w szczególnym przypadku opisane układem równań konstytutywnych

$$\psi = {}^e\hat{\psi}({}^eE, \vartheta) + {}^i\hat{\psi}({}^iE), \tag{2.1}$$

$$\eta = -\partial_\vartheta {}^e\hat{\psi}({}^eE, \vartheta), \tag{2.2}$$

$$\tilde{T} = \varrho_R \partial_{{}^eE} {}^e\hat{\psi}({}^eE, \vartheta), \tag{2.3}$$

$$q_R = \hat{q}_R({}^eE, {}^iE, \vartheta, \mathrm{Grad}\,\vartheta), \tag{2.4}$$

$${}^i\dot{E} = \mu(\vartheta) < \Phi(\mathcal{F}) > \mathbf{N}(\tilde{T}, {}^iE, \vartheta), \qquad \mathbf{N} = \mathbf{N}^T, \tag{2.5}$$

gdzie: ψ jest energią swobodną właściwą (na jednostkę masy), η — entropią właściwą, $\tilde{T}$ — drugim tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa[4)], q_R — wektorem strumienia przepływu ciepła na jednostkę powierzchni w konfiguracji początkowej, ϱ_R jest gęstością masy w tej konfiguracji, $\vartheta > 0$ jest temperaturą bezwzględną, Grad jest operatorem gradientu względem współrzędnych X w konfiguracji początkowej, zaś kropka oznacza różniczkowanie materialne. ${}^eE$ i ${}^iE$ są tensorami odkształcenia odpowiednio sprężystego i niesprężystego, które spełniają postulat addytywności

$$E = {}^eE + {}^iE, \tag{2.6}$$

gdzie E jest tensorem odkształcenia Lagrange'a.

Równanie (2.5) postuluje, że prędkość odkształcenia niesprężystego w materiale sprężysto/lepkoplastycznym jest propocjonalna do funkji $\Phi(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest funkcją statycznego uplastycznienia, określoną za pośrednictwem statycznego warunku plastyczności $f = k(\varkappa)$ przez zależność

$$\mathcal{F} = \frac{f(\tilde{T}, {}^iE, \vartheta)}{k(\varkappa(\tilde{T}, {}^pE, \vartheta))} - 1. \tag{2.7}$$

Występujący w (2.7) tensor ${}^pE$ jest odkształceniem plastycznym, zdefiniowanym jak w pracy [2]. Współczynnik proporcjonalności w równaniu (2.5) jest iloczynem skalarnej funkcji $\mu(\vartheta) > 0$, charakteryzującej własności lepkie materiału i symetrycznej funkcji tensorowej $\mathbf{N}$. Wprowadzona w (2.7) funkcja $k(\varkappa)$ jest skalarną funkcją parametru $\varkappa$ wzmocnienia izotropowego materiału. Parametr ten spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\varkappa} = \mathrm{tr}\{\mathbf{M}(\tilde{T}, {}^pE, \vartheta)\, {}^p\dot{E}(\tilde{T}, {}^pE, \vartheta, \dot{\tilde{T}}, \dot{\vartheta})\}, \tag{2.8}$$

---

4) Tensor $\tilde{T}$ wyraża się w zależności od tensora naprężenia Cauchy'ego T wzorem

$$\tilde{T} \equiv JF^{-1}T(F^{-1})^T,$$

gdzie F oznacza gradient deformacji, zaś $J > 0$ — jego Jakobian.

gdzie $\mathbf{M}$ jest symetryczną funkcją tensorową. Zakłada się, że funkcje $\mathbf{N}$ i $\mathbf{M}$ spełniają zasadę obiektywności materialnej.

Symbol $< \Phi(\mathcal{F}) >$ w równaniu (2.5) jest zdefiniowany następująco

$$<\Phi(\mathcal{F})> = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \mathcal{F} \leqslant 0, \\ \Phi(\mathcal{F}) > 0 & \text{dla} \quad \mathcal{F} > 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Z równania (2.5) wynika dynamiczny warunek plastyczności

$$f(\tilde{T}, {}^{i}E, \vartheta) = k(\varkappa(\tilde{T}, {}^{p}E, \vartheta))\left\{1 + \Phi^{-1}\left[\frac{(\mathrm{tr}\,{}^{i}\dot{E}^{2})^{1/2}}{\mu(\vartheta)}(\mathrm{tr}\mathbf{N}^{2})^{-1/2}\right]\right\}, \tag{2.10}$$

dla materiałów sprężysto/lepkoplastycznych, wykazujących wzmocnienie izotropowe i anizotropowe. Zależność (2.10) opisuje zmianę aktualnej powierzchni płynięcia w procesie termodynamicznym.

Funkcja wewnętrznej dysypacji w materiale sprężysto/lepkoplastycznym jest określona przez związek

$$\sigma = \hat{\sigma}({}^{e}E, {}^{i}E, \vartheta) = \frac{1}{\varrho\vartheta}\mu(\vartheta) < \Phi(\mathcal{F}) > \mathrm{tr}[(\tilde{T} - \varrho_R \partial_{{}^{i}E}{}^{i}\hat{\psi})\mathbf{N}(\tilde{T}, {}^{i}E, \vartheta)], \tag{2.11}$$

zgodnie z którym nierówność dysypacji wewnętrznej przybiera formę

$$\mathrm{tr}[(\tilde{T} - \varrho_R \partial_{{}^{i}E}{}^{i}\hat{\psi})\mathbf{N}(\tilde{T}, {}^{i}E, \vartheta)] \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Tak więc własności materiału sprężysto/lepkoplastycznego w procesie termodynamicznym określone są przez funkcje ${}^{e}\hat{\psi}$, ${}^{i}\psi$, $\hat{q}_R$, $\mathbf{N}$, $\Phi(\mathcal{F})$ oraz $\mu(\vartheta)$, przy czym nierówność (2.12) stanowi podstawowe ograniczenie, jakie przy określonych ${}^{e}\hat{\psi}$, ${}^{i}\hat{\psi}$ musi spełniać funkcja $\mathbf{N}$.

Gdy materiał wykazuje wzmocnienie tylko izotropowe, pojawiająca się w (2.7) funkcja f nie zależy od ${}^{p}E$. W tym przypadku postuluje się, że również i funkcja $\mathbf{N}$ w (2.5) nie zależy od ${}^{i}E$.

Jak wykazano, w przypadku gdy $\mu(\vartheta) \to \infty$ dla każdej wartości ϑ, ${}^{i}E \to {}^{p}E$ i układ równań konstytutywnych (2.1)–(2.5) dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego przechodzi w sformułowany przez GREENA i NAGHDIEGO [2] układ równań konstytutywnych teorii plastycznego płynięcia w postaci

$$\psi = {}^{e}\hat{\psi}({}^{e}E, \vartheta) + {}^{p}\hat{\psi}({}^{p}E), \tag{2.13}$$

$$\eta = -\partial_{\vartheta}{}^{e}\hat{\psi}({}^{e}E, \vartheta), \tag{2.14}$$

$$\tilde{T} = \varrho_R \partial_{{}^{e}E}{}^{e}\hat{\psi}({}^{e}E, \vartheta), \tag{2.15}$$

$$q_R = \hat{q}_R({}^{e}E, {}^{i}E, \vartheta, \mathrm{Grad}\vartheta), \tag{2.16}$$

$${}^{p}\dot{E} = \lambda < \mathrm{tr}(\partial_{\tilde{T}} f \dot{\tilde{T}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta} > \mathbf{N}(\tilde{T}, {}^{p}E, \vartheta), \tag{2.17}$$

gdzie

$$\lambda = \{\mathrm{tr}[(\partial_{\varkappa} k\mathbf{M} - \partial_{{}^{p}E} f)\mathbf{N}(\tilde{T}, {}^{p}E, \vartheta)]\}^{-1}, \tag{2.18}$$

zaś symbol $< \mathrm{tr}(\partial_{\tilde{T}} f \dot{\tilde{T}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta} >$ jest określony jak poniżej

$$< [\mathrm{tr}(\partial_{\tilde{T}} f \dot{\tilde{T}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta}] > = \begin{cases} [\quad] & \text{gdy } f = \varkappa,\ \dot{\varkappa} \neq 0 \text{ i } [\quad] > 0, \\ 0 & \text{gdy } f = \varkappa,\ \dot{\varkappa} = 0 \text{ i } [\quad] \leqslant 0, \text{ lub gdy } f < \varkappa. \end{cases} \tag{2.19}$$

Jak wykazano w pracy [2], można bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że $\lambda > 0$.

W procesie plastycznego płynięcia funkcja (2.11) przechodzi w funkcję dysypacji wewnętrznej w materiale sprężysto-plastycznym

$$\sigma = \hat{\sigma}({}^eE, {}^pE, \vartheta) = \frac{1}{\varrho_R \vartheta} \lambda < \operatorname{tr}(\partial_{\tilde{T}} f \dot{\tilde{T}}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} > \operatorname{tr}[(\tilde{T} - \varrho_R \partial_{{}^pE} {}^p\hat{\psi}) \mathbf{N}(\tilde{T}, {}^pE, \vartheta)],$$

z której, ze względu na $\lambda > 0$ i warunek $(2.19)_1$, dla przypadku obciążania mamy nierówność dysypacji wewnętrznej

$$\operatorname{tr}[(\tilde{T} - \varrho_R \partial_{{}^pE} {}^p\hat{\psi}) \mathbf{N}(\tilde{T}, {}^pE, \vartheta)] \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Ponadto przy $\lambda > 0$ ze związku (2.18) wynika nierówność

$$\operatorname{tr}[(\partial_\varkappa k \mathbf{M} - \partial_{{}^pE} f) \mathbf{N}(\tilde{T}, {}^pE, \vartheta)] > 0, \tag{2.21}$$

odgrywająca ograniczającą rolę przy formułowaniu równań konstytutywnych teorii plastycznego płynięcia (patrz [2]).

3. Ogólna infinitezymalna teoria materiałów sprężysto/lepkoplastycznych

Na wstępie należy nadmienić, że przejście od teorii lepkoplastyczności przy odkształceniach skończonych do infinitezymalnej może prowadzić w rezultacie do kilku różnych teorii w zależności od tego, jaką wielkość przyjmie się za miarę małości deformacji. Możliwości te zostały szczegółowo przedyskutowane w monografii [17]. W niniejszej pracy przejście do teorii lepkoplastyczności przy nieskończenie małych deformacjach zostanie dokonane przy założeniu, że małe są gradienty przemieszczenia i że małe są przyrosty temperatury, liczone od temperatury w chwili początkowej.

Aby sprecyzować dokładnie pojęcie małości przyjętych wielkości zauważmy, że w chwili t gradient $\boldsymbol{H}(t)$ wektora przemieszczenia z konfiguracji odniesienia wyraża się w zależności od gradientu deformacji $\boldsymbol{F}(t)$ przez związek

$$\boldsymbol{H}(t) \equiv \boldsymbol{F}(t) - \mathbf{1}, \tag{3.1}$$

gdzie $\mathbf{1}$ oznacza tensor fundamentalny. Wprowadźmy wielkość

$$\delta \equiv \sup_{0 \leqslant t < \infty} |\boldsymbol{H}(t)|, \quad |\boldsymbol{H}(t)| = \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T)}, \tag{3.2}$$

gdzie $|\boldsymbol{H}(t)|$ jest naturalną normą gradientu wektora przemieszczenia w przestrzeni dziewięciowymiarowej. Wielkość δ będziemy w dalszym ciągu przyjmować za miarę małości deformacji.

Tensor nieskończenie małego odkształcenia $\tilde{E}(t)$, używany jako miara odkształcenia w klasycznej, infinitezymalnej teorii sprężystości, jest zdefiniowany jako

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T). \tag{3.3}$$

Deformację odpowiadającą danemu gradientowi $\boldsymbol{F}(t)$ będziemy uważali za nieskończenie małą w każdej chwili t, jeżeli

$$\delta \ll 1. \tag{3.4}$$

Rozważymy funkcję[5] $\varphi(t)$ zdeterminowaną przez $\boldsymbol{H}(t)$. Jeżeli istnieje stała M^0, niezależna od czasu t, funkcji $\boldsymbol{H}(t)$ i δ taka, że

$$|\varphi| \leqslant M^0 \delta^n \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.5}$$

funkcja $\varphi(t)$ jest wielkością rzędu δ^n, co będziemy zapisywali przez $\varphi = 0(\delta^n)$. Wynika stąd, że określony przez (3.4) tensor $\tilde{\boldsymbol{E}}(t)$ jest wielkością rzędu $0(\delta)$. Na podstawie powyższego można wykazać, iż

$$\boldsymbol{E} = \tilde{\boldsymbol{E}} + 0(\delta^2) = 0(\delta), \tag{3.6}$$

a zatem, gdy zachodzi (3.4), wielkość rzędu $0(\delta^2)$ jest pomijalnie mała w porównaniu z $\tilde{\boldsymbol{E}}$ i w przypadku nieskończenie małych deformacji mamy

$$\boldsymbol{E} = \tilde{\boldsymbol{E}} \quad \text{gdy} \quad \delta \ll 1. \tag{3.7}$$

Z (2.6) i (3.7) wynika, że także części sprężysta ${}^e\tilde{\boldsymbol{E}}$ i niesprężysta ${}^i\tilde{\boldsymbol{E}}$ infinitezymalnego odkształcenia są również wielkościami rzędu $0(\delta)$.

Oznaczmy temperaturę w chwili początkowej przez ϑ_0, natomiast przez $\Delta\vartheta$ przyrost temperatury, równy

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0. \tag{3.8}$$

Zauważmy, że temperatura ϑ_0 w chwili początkowej jest niezależna od czasu, funkcji $\boldsymbol{H}(t)$ i δ. Można więc zatem uważać przyrost temperatury za mały, jeżeli zachodzi warunek

$$|\Delta\vartheta| \leqslant \vartheta_0 \delta, \tag{3.9}$$

co oznacza, że przyjmujemy w dalszym ciągu, iż $\Delta\vartheta = 0(\delta)$.

Załóżmy, że materiał z zerowymi naprężeniami początkowymi jest jednorodny i znajduje się w stanie spoczynku przy stałej temperaturze ϑ_0 i entropii η_0. W przypadku, gdy spełniony jest warunek (3.4) tensory naprężenia Pioli–Kirchhoffa $\tilde{\boldsymbol{T}}$ i Cauchy'ego $\boldsymbol{T}$ są nierozróżnialne, tj.

$$\tilde{T}(t) = \boldsymbol{T}(t) \quad \text{gdy} \quad \delta \ll 1 \tag{3.10}$$

i dzięki (3.7), równania konstytutywne (2.2) oraz (2.3) przyjmują postać

$$\eta = -\partial_\vartheta {}^e\hat{\psi}({}^e\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta), \qquad \boldsymbol{T} = \varrho_R \partial_{{}^e\tilde{E}} {}^e\hat{\psi}({}^e\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta). \tag{3.11}$$

Rozwijając prawą stronę równania $(3.11)_2$ w szereg w otoczeniu $(\boldsymbol{0}, \vartheta_0)$, przy warunku $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$ w punkcie $(\boldsymbol{0}, \vartheta_0)$, a następnie ograniczając się do wyrazów rzędu $0(\delta)$ mamy

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \varrho_R({}^e\mathbf{A}[{}^e\tilde{\boldsymbol{E}}] + {}^e\boldsymbol{A}\Delta\vartheta), \\ T^K{}_L = \varrho_R({}^e\mathrm{A}^K{}_L{}^M{}_N {}^e\tilde{E}^N{}_M + {}^eA^K{}_L \Delta\vartheta), \end{cases} \tag{3.12}$$

gdzie ${}^e\mathbf{A}$ jest stałym tensorem czwartego rzędu o symetrii

$${}^e\mathrm{A}^K{}_L{}^M{}_N = {}^e\mathrm{A}_L{}^{KM}{}_N = {}^e\mathrm{A}_L{}^K{}_N{}^M = {}^e\mathrm{A}^K{}_{LN}{}^M = {}^e\mathrm{A}^M{}_N{}^K{}_L, \tag{3.13}$$

[5] $\varphi(t)$ jest tu oznaczeniem ogólnym zarówno funkcji skalarnej, jak i tensorowej.

natomiast ${}^{e}A$ jest stałym tensorem symetrycznym rzędu drugiego. Równanie (3.12) można napisać w postaci odwróconej[6)]

$$
(3.14)\qquad \begin{cases} {}^{e}\tilde{E} = \dfrac{1}{\varrho_R}\,{}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}[T] + {}^{e}\overset{*}{A}\Delta\vartheta, \\ {}^{e}\tilde{E}^K{}_L = \dfrac{1}{\varrho_R}\,{}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}{}^K{}_L{}^M{}_N T^N{}_M + {}^{e}\overset{*}{A}{}^K{}_L\Delta\vartheta. \end{cases}
$$

Ze względu na stałość ${}^{e}\mathrm{A}$ oraz ${}^{e}A$, a także na fakt, że zarówno ${}^{e}\tilde{E}$ jak i $\Delta\vartheta$ są wielkościami rzędu odpowiednio $0(\delta)$ i $0(\delta)$, z (3.12) wynika, iż T jest także wielkością rzędu $0(\delta)$.

Jeżeli ograniczymy się do przypadku, w którym energia swobodna ψ jest wielkością rzędu $0(\delta^2)$, wówczas jak widać z (3.11) i (3.12), funkcja $\hat{\psi}$ winna mieć postać

$$
(3.15)\qquad \begin{aligned} \psi &= {}^{e}\hat{\psi}({}^{e}\tilde{E}, \vartheta) + {}^{i}\hat{\psi}({}^{i}\tilde{E}) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}({}^{e}\tilde{E}\,{}^{e}\mathrm{A}[{}^{e}\tilde{E}]) + \Delta\vartheta \operatorname{tr}({}^{e}A\,{}^{e}\tilde{E}) + \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Delta\vartheta)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}({}^{i}\tilde{E}\,{}^{i}\mathrm{A}[{}^{i}\tilde{E}]), \end{aligned}
$$

gdzie A jest stałym skalarem, zaś ${}^{i}\mathrm{A}$ jest stałym tensorem czwartego rzędu, jaki spełnia warunki symetrii (3.13). W tym przypadku równanie $(3.11)_1$ przyjmuje formę

$$
(3.16)\qquad \eta = -\operatorname{tr}({}^{e}A\,{}^{e}\tilde{E}) - \mathrm{A}\Delta\vartheta.
$$

Z (3.15) i (3.16) wynika, że dla ${}^{e}\tilde{E} = \mathbf{0}, {}^{i}E = \mathbf{0}$ i $\vartheta = \vartheta_0$ mamy $\psi = 0$ i $\eta_0 = \eta(\mathbf{0}, \vartheta_0) = 0$. Zatem w tym przypadku η oznacza jednocześnie przyrost entropii. Ponadto ciepło właściwe przy stałym odkształceniu sprężystym, równe

$$
(3.17)\qquad c \equiv \vartheta\partial_{\vartheta}\eta = -\mathrm{A}\vartheta = -\mathrm{A}\Delta\vartheta + c_0,
$$

gdzie c_0 oznacza ciepło właściwe przy $\vartheta = \vartheta_0$; jest liniową funkcją przyrostu $\Delta\vartheta$. Otrzymane w ten sposób równania (3.12) i (3.16) są równaniami konstytutywnymi liniowej teorii termosprężystości.

Przechodząc do opisu niesprężystego zchowania się materiału sprężysto/lepkoplastycznego przy nieskończenie małych deformacjach widzimy, że dzięki zależnościom (3.7) oraz (3.10) równanie konstytutywne (2.5) przyjmuje postać

$$
(3.18)\qquad {}^{i}\dot{\tilde{E}}(T, {}^{i}\tilde{E}, \vartheta) = \mu(\vartheta) < \Phi(\mathscr{F}) > \mathbf{N}(T, {}^{i}\tilde{E}, \vartheta), \qquad \mathbf{N} = \mathbf{N}^T.
$$

[6)] Stały tensor czwartego rzędu ${}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}$ posiada te same warunki symetrii co tensor ${}^{e}\mathrm{A}$. ${}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}$ jest tensorem odwrotnym do tensora ${}^{e}\mathrm{A}$. Rozpatrywany jako macierz 6×6 spełnia warunki

$$
{}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}{}^K{}_L{}^M{}_N\,{}^{e}\mathrm{A}^N{}_M{}^R{}_S = {}^{e}\mathrm{A}^K{}_L{}^M{}_N\,{}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}{}^N{}_M{}^R{}_S = \frac{1}{2}(\delta^K{}_S\delta^R{}_L + G^{KR}G_{SL}),
$$

gdzie G_{KR} jest tensorem metrycznym w konfiguracji odniesienia. Natomiast

$$
{}^{e}\overset{*}{A}{}^K{}_L = {}^{e}\overset{-1}{\mathrm{A}}{}^K{}_L{}^M{}_N\,{}^{e}A^N{}_M
$$

jest stałym tensorem symetrycznym drugiego rzędu.

Przyjmijmy, że występująca w (3.18) funkcja $\boldsymbol{N}$ ma postać quasi-liniową względem zmiennych $\boldsymbol{T}$, ${}^{i}\tilde{\boldsymbol{E}}$ i ϑ. Niech więc funkcja ta posiada formę

$$(3.19)\qquad \boldsymbol{N} = \mathrm{H}\mathbf{1}+\mathbf{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2, \mathrm{tr}({}_D\boldsymbol{T}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}), \mathrm{tr}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}^2)[\boldsymbol{T}]+ +\mathbf{H}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2, \mathrm{tr}({}_D\boldsymbol{T}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}), \mathrm{tr}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}^2)[{}^i\tilde{\boldsymbol{E}}]+\boldsymbol{G}(\vartheta_0)\Delta\vartheta,$$

gdzie: H jest skalarem, funkcje tensorowe czwartego rzędu $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ spełniają warunki symetrii (3.13), zaś $\boldsymbol{G}$ jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu. ${}_D\boldsymbol{T}$ i ${}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}$ oznaczają dewiatory odpowiednio tensora naprężenia i tensora odkształcenia niesprężystego. Załóżmy ponadto, że drugi i trzeci wyraz w (3.19) jest jednorodny względem $\boldsymbol{T}$ i $\tilde{\boldsymbol{E}}$. W szczególności gdy $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ są tensorami stałymi, funkcja $\boldsymbol{N}$ staje się liniową. Uwzględniając zależności (3.10), (3.15) oraz (3.19) otrzymujemy z (2.12) nierówność

$$\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{T}-\varrho_R{}^i\mathrm{A}[{}^i\tilde{\boldsymbol{E}}])\mathrm{H}\mathbf{1}\}+\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{T}-\varrho_R{}^i\mathrm{A}[{}^i\boldsymbol{E}])\mathbf{G}[\boldsymbol{T}]\}+\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{T}-\varrho_R{}^i\mathrm{A}[{}^i\boldsymbol{E}])\mathbf{H}[{}^i\tilde{\boldsymbol{E}}]\}+ +\mathrm{tr}\{\boldsymbol{G}(\vartheta_0)(\boldsymbol{T}-\varrho_R{}^i\mathrm{A}[{}^i\tilde{\boldsymbol{E}}])\}\Delta\vartheta \geqslant 0,$$

która musi być spełniona dla każdego $\boldsymbol{T}$, ${}^i\tilde{\boldsymbol{E}}$ i $\Delta\vartheta$. Musi być więc spełniona także i w chwili, gdy zaczyna się rozwijać pierwszy proces deformacji niesprężystej, to jest gdy ${}^i\tilde{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0}$ przy ${}^i\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}} \neq \mathbf{0}$. Ale przy tych warunkach przyjmuje ona postać nierówności

$$\mathrm{H}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{T}\mathbf{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}]\}+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{G}(\vartheta_0)\boldsymbol{T}\}\Delta\vartheta \geqslant 0,$$

jaka, ze względu na dowolność $\Delta\vartheta$, może być spełniona wtedy, gdy znika tr $\{\boldsymbol{G}(\vartheta_0)\boldsymbol{T}\}\Delta\vartheta$, tzn. gdy $\boldsymbol{G}(\vartheta_0) = \mathbf{0}$. Oznacza to, że określona przez (3.19) funkcja $\boldsymbol{N}$ musi mieć postać

$$(3.20)\qquad {}^0\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}, {}^i\tilde{\boldsymbol{E}}) = \mathrm{H}\mathbf{1}+\mathbf{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2, \mathrm{tr}({}_D\boldsymbol{T}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}), \mathrm{tr}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}^2)[\boldsymbol{T}]+\mathbf{H}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2, \mathrm{tr}({}_D\boldsymbol{T}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}), \mathrm{tr}{}_D^i\tilde{\boldsymbol{E}}^2)[{}^i\tilde{\boldsymbol{E}}]$$

i jednocześnie spełniać podstawową nierówność

$$(3.21)\qquad \mathrm{tr}\{(\boldsymbol{T}-\varrho_R{}^i\mathrm{A}[{}^i\tilde{\boldsymbol{E}}])^0\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}, {}^i\tilde{\boldsymbol{E}})\} \geqslant 0.$$

W przypadku nieskończenie małych deformacji statyczny warunek plastyczności zależy od zmiennych $\boldsymbol{T}$, ${}^p\tilde{\boldsymbol{E}}$ oraz $\Delta\vartheta$, z których każda jest wielkością rzędu $0(\delta)$. Jeżeli założymy, iż statyczna powierzchnia plastyczności jest w przestrzeni naprężenie—temperatura gładka i zamknięta, wówczas zachowując człony rzędu $0(\delta^2)$, możemy funkcję f przedstawić w postaci formy kwadratowej

$$(3.22)\qquad f = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{T})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}{}^p\tilde{\boldsymbol{E}})-\mathrm{D}\Delta\vartheta+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\mathbf{J}[\boldsymbol{T}])+\frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^p\tilde{\boldsymbol{E}}\mathbf{K}[{}^p\tilde{\boldsymbol{E}}])+ +\frac{1}{2}\mathrm{N}(\Delta\vartheta)^2+\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\mathbf{M}[{}^p\tilde{\boldsymbol{E}}])+\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{T})\Delta\vartheta+\mathrm{tr}(\boldsymbol{K}{}^p\tilde{\boldsymbol{E}})\Delta\vartheta,$$

gdzie: tensory symetryczne drugiego rzędu $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ są wielkościami rzędu $\mathbf{0}(\delta)$, D jest wielkością skalarną rzędu $0(\delta)$, $\mathbf{J}$ oraz $\mathbf{K}$ są tensorami czwartego rzędu o warunkach symetrii (3.13), $\boldsymbol{J}$ i $\boldsymbol{K}$ są symetrycznymi tensorami drugiego rzędu, zaś N jest skalarem.

Przyjmijmy w dalszych rozważaniach, że

$$(3.23)\qquad k(\varkappa) = \varkappa(\boldsymbol{T}, {}^p\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta).$$

Ponieważ w tym przypadku $f = \varkappa$, parametr $\varkappa$ winien być wielkością rzędu $0(\delta^2)$. Zatem i pochodna $\dot{\varkappa}$, która jak widać z (2.8) jest teraz równa

$$\dot{\varkappa} = \operatorname{tr}\{\boldsymbol{M}(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)\, {}^p\dot{\tilde{E}}(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta, \dot{T}, \dot{\vartheta})\}, \tag{3.24}$$

powinna być wielkością rzędu $0(\delta^2)$[7].

Załóżmy, że występującą w (3.24) funkcję $\boldsymbol{M}$ możemy przyjąć jako liniową względem T, ${}^p\tilde{E}$ i ϑ, tj., że

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{P}[T] + \mathbf{S}[{}^p\tilde{E}] + \boldsymbol{P}\Delta\vartheta, \tag{3.25}$$

gdzie $\mathbf{P}$ i $\mathbf{S}$ są stałymi tensorami czwartego rzędu o symetrii (3.13), zaś $\boldsymbol{P}$ jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu. Z (3.24) widać, że przyjmując $\boldsymbol{M}$ w postaci (3.25), tj. jako wielkość rzędu $0(\delta)$, postulujemy jednocześnie, iż rząd wielkości prędkości odkształcenia plastycznego jest równy $0(\delta)$.

Przy przejściu granicznym do teorii plastycznego płynięcia dla przypadku nieskończenie małych deformacji, określona przez (3.20) funkcja ${}^\circ\boldsymbol{N}(T, {}^i\tilde{E})$ przechodzi w funkcję ${}^\circ\boldsymbol{N}(T, {}^p\tilde{E})$, zaś zależność (2.21) — w nierówność

$$\operatorname{tr}[(\boldsymbol{M} - \partial_{{}^p\tilde{E}} f)\, {}^\circ\boldsymbol{N}(T, {}^p\tilde{E})] > 0.$$

Jak wykazano w pracy [2], nierówność powyższa implikuje warunek

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K} \tag{3.26}$$

oraz ograniczenie

$$\operatorname{tr}\{[(\mathbf{P} - \mathbf{M}^T)[T] + (\mathbf{S} - \mathbf{K})[{}^p\tilde{E}] - \boldsymbol{C}]\, {}^\circ\boldsymbol{N}(T, {}^p\tilde{E})\} > 0, \tag{3.27}$$

które muszą spełniać występujące w (3.20) i (3.25) wielkości $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{C}$ i H.

Załóżmy w końcu, iż występującą w równaniu konstytutywnym (3.18) funkcję $\mu(\vartheta)$ możemy przyjąć w postaci liniowej

$$\mu(\vartheta) = \mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta > 0. \tag{3.28}$$

Ze względu na (3.23) funkcja statycznego uplastycznienia (2.7) przyjmuje formę

$$\mathscr{F}(T, {}^i\tilde{E}, \vartheta) = \frac{f(T, {}^i\tilde{E}, \vartheta)}{\varkappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)} - 1, \tag{3.29}$$

gdzie $f(T, {}^i\tilde{E}, \vartheta)$ jest określona przez (3.22) i dzięki zależnościom (3.20) oraz (3.28), równanie (3.18) uzyskuje postać

$${}^i\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi(\mathscr{F}) > {}^\circ\boldsymbol{N}(T, {}^i\tilde{E}). \tag{3.30}$$

---

[7] Jeżeli $\dot{\varkappa}$ jest wielkością rzędu $0(\delta^2)$, to zachodzi $|\dot{\varkappa}| \leqslant \mathrm{P}^\circ\delta^2$.
Oznaczając przez $b < \infty$ końcową chwilę procesu, mamy

$$|\varkappa| = \left|\int_0^b \dot{\varkappa}\,dt\right| \leqslant \int_0^b |\dot{\varkappa}|\,dt \leqslant \mathrm{P}^\circ\delta^2 \int_0^b dt = \overline{\mathrm{P}}\delta^2,$$

gdzie $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}^\circ b$. I odwrotnie, aby $\varkappa$ było wielkością rzędu $0(\delta^2)$ powinno być $\dot{\varkappa}$ wielkością rzędu $0(\delta^2)$.

Z (3.30) otrzymujemy dynamiczny warunek plastyczności

$$f(T, {}^{i}\tilde{E}, \vartheta) = \varkappa(T, {}^{p}\tilde{E}, \vartheta)\left\{1+\Phi^{-1}\left[\frac{(\mathrm{tr}\,{}^{i}\dot{\tilde{E}}^{2})^{1/2}}{\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta}(\mathrm{tr}\,{}^{\circ}\boldsymbol{N}^{2})^{-1/2}\right]\right\}. \tag{3.31}$$

Tak więc uzyskany na drodze powyższego przejścia układ równań konstytutywnych, opisujący materiał sprężysto/lepkoplastyczny przy odkształceniach nieskończenie małych, składa się z równań (3.12), (3.15), (3.16) i (3.30), przy czym muszą być spełnione nierówności (3.21) i (3.27). Związki te są słuszne dla przypadku, gdy materiał wykazuje wzmocnienie zarówno izotropowe jak i anizotropowe.

4. Przypadek izotropowego wzmocnienia materiału

Gdy materiał sprężysto/lepkoplastyczny wykazuje wzmocnienie tylko izotropowe, określona przez (3.22) funkcja f nie zależy od odkształcenia plastycznego. Przyjmując zatem w (3.22)

$$C = K = \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{K} = \mathbf{M} = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

otrzymujemy

$$f = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}) - \mathrm{D}\Delta\vartheta + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\mathrm{J}[\boldsymbol{T}]) - \frac{1}{2}\mathrm{N}(\Delta\vartheta)^2 + \mathrm{tr}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{T})\Delta\vartheta. \tag{4.2}$$

Jednocześnie na podstawie (4.1) i (3.26) widzimy, że w tym przypadku równanie (3.25) przyjmuje postać

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \mathrm{P}[\boldsymbol{T}] + \mathrm{S}[{}^{p}\tilde{E}]. \tag{4.3}$$

Ponadto, jak postulowano w p. 2, i funkcja $\boldsymbol{N}$ w równaniu (2.5) nie zależy teraz od ${}^{i}\tilde{E}$. Przyjmujemy zatem w zależności (3.20)

$$\mathrm{H} = 0. \tag{4.4}$$

Przy dodatkowym założeniu, że $\mathbf{G}$ zależy tylko od $\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2$, otrzymujemy w rezultacie

$${}^{\circ}\overline{\boldsymbol{N}} = \mathrm{H}\mathbf{1} + \mathrm{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}] \tag{4.5}$$

i równanie konstytutywne (3.30) przyjmuje postać

$${}^{i}\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi(\mathscr{F}) > {}^{\circ}\overline{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{T}). \tag{4.6}$$

Wprowadzając do (3.21) w miejsce ${}^{\circ}\boldsymbol{N}$ określoną przez (4.5) funkcję ${}^{\circ}\overline{\boldsymbol{N}}$ otrzymujemy nierówność

$$\mathrm{H}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} + \mathrm{tr}\{\boldsymbol{T}\mathrm{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}]\} - \varrho_R\,\mathrm{tr}\{{}^{i}\mathrm{A}[{}^{i}\tilde{E}](\mathrm{H}\mathbf{1}+\mathrm{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}])\} \geqslant 0, \tag{4.7}$$

która musi być spełniona dla każdego $\boldsymbol{T}$ i ${}^{i}\tilde{E}$. Musi być zatem spełniona dla $-\boldsymbol{T}$ oraz ${}^{i}\tilde{E}$ Jeżeli więc zmienimy w (4.7) znak przy $\boldsymbol{T}$ i otrzymaną nierówność dodamy do (4.7), to uzyskamy w rezultacie nierówność

$$\mathrm{tr}\{\boldsymbol{T}\mathrm{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}]\} - \mathrm{H}\varrho_R\,\mathrm{tr}({}^{i}\mathrm{A}[{}^{i}\tilde{E}]\mathbf{1}) > 0,$$

jaka może być spełniona tylko wtedy, gdy drugi wyraz po jej lewej stronie znika, tzn. gdy

$$(4.8) \qquad {}^{i}\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

co oznacza, że w tym przypadku energia swobodna (3.15) nie może zależeć od odkształcenia niesprężystego. Biorąc pod uwagę (4.8), otrzymujemy z (4.7) nierówność ograniczającą

$$(4.9) \qquad \mathrm{H}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} + \mathrm{tr}\{\boldsymbol{T}\mathrm{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}]\} \geqslant 0,$$

jaką muszą spełniać występujące w zależności (4.5) współczynniki H i G. Zastępując jednocześnie funkcję ${}^{\circ}\boldsymbol{N}$ w (3.27) funkcją ${}^{\circ}\tilde{\boldsymbol{N}}$ i uwzględniając (4.1) otrzymujemy nierówność

$$(4.10) \qquad \mathrm{tr}\{(\mathbf{P}[\boldsymbol{T}] + \mathbf{S}[{}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}])(\mathrm{H}\mathbf{1} + \mathrm{G}(\mathrm{tr}_D\boldsymbol{T}^2)[\boldsymbol{T}])\} > 0,$$

jaka ogranicza współczynniki **P** i **S**.

5. Warunek plastyczności z niestacjonarną powierzchnią płynięcia

Rozpatrzmy szczególny przypadek powyższej teorii. Mianowicie przyjmijmy w (3.22 warunki

$$(5.1) \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{K} = \mathbf{0}$$

oraz

$$(5.2) \qquad \mathrm{N} > 0, \qquad \mathrm{D}^2 < 4\varkappa\mathrm{N}.$$

Z (3.22) i (3.23) wynika, że w tym przypadku można statycznemu warunkowi plastyczności nadać formę

$$(5.3) \qquad f(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}) = {}_{n}\varkappa,$$

gdzie

$$(5.4) \qquad f(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\mathbf{J}[\boldsymbol{T}]) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}\mathbf{K}[{}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}]) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\mathbf{M}[{}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}])$$

nie zależy od temperatury ϑ, natomiast

$$(5.5) \qquad {}_{n}\varkappa = \varkappa(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta) + \mathrm{D}\Delta\vartheta + \mathrm{N}(\Delta\vartheta)^2 > 0.$$

Zależność (5.3) jest szczególnym przypadkiem statycznego warunku plastyczności z niestacjonarną powierzchnią płynięcia (patrz [4]), uwzględniającym wzmocnienie tak izotropowe, jak i anizotropowe. Jednocześnie ze względu na (3.26) i (5.1), określona przez (3.25) funkcja $\boldsymbol{M}$ przyjmuje postać (4.3), zaś funkcja statycznego uplastycznienia (3.29) — formę

$$(5.6) \qquad \mathscr{F}(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta) = \frac{f(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}})}{{}_{n}\varkappa(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta)} - 1.$$

Równanie konstytutywne (3.30) pozostaje bez zmiany, natomiast dynamiczny warunek plastyczności (3.31) uzyskuje postać

$$(5.7) \qquad f(\boldsymbol{T}, {}^{i}\tilde{\boldsymbol{E}}) = {}_{n}\varkappa(\boldsymbol{T}, {}^{p}\tilde{\boldsymbol{E}}, \vartheta)\left\{1 + \Phi^{-1}\left[\frac{(\mathrm{tr}\,{}^{i}\dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta}(\mathrm{tr}\,{}^{\circ}\boldsymbol{N}^2)^{-1/2}\right]\right\},$$

przy czym muszą być spełnione nierówności ograniczające (3.21) i (3.27).

Dla uzyskania przypadku, gdy statyczny warunek plastyczności (5.3) opisuje wzmocnienie anizotropowe typu kinematycznego, wprowadzamy dalsze założenia, że dla $\alpha \geqslant 0$

$$C = -\alpha B, \quad \mathbf{K} = \alpha^2 \mathbf{J}, \quad \mathbf{M} = -\alpha \mathbf{J} \tag{5.8}$$

oraz

$$\mathbf{H} = -\mathbf{G}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{0}. \tag{5.9}$$

Dzięki założeniom (5.8), określona przez (5.4) funkcja f przyjmuje postać

$$f(T-\alpha^p\tilde{E}) = \mathrm{tr}[B(T-\alpha^p\tilde{E})] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(T-\alpha^p\tilde{E})\mathbf{J}[T-\alpha^p\tilde{E}]\}, \tag{5.10}$$

natomiast, ze względu na $(5.9)_1$, funkcja $°\boldsymbol{N}$ [patrz (2.20)] — formę

$$°\boldsymbol{N}(T-\alpha^i\tilde{E}) = \mathbf{H}1 + \mathbf{G}(\mathrm{tr}_D T^2, \mathrm{tr}(_D T\,^i_D\tilde{E}), \mathrm{tr}\,^i_D\tilde{E}^2)[T-\alpha^i\tilde{E}]. \tag{5.11}$$

Ponadto zależności (3.26), (5.1) i (5.9) ograniczają daną przez (3.25) funkcję $\boldsymbol{M}$ do postaci

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \mathbf{P}[T]. \tag{5.12}$$

Jednocześnie związki (3.21) oraz (3.27) stają się teraz nierównościami

$$\mathrm{tr}\{(T-\varrho_R\,^i\mathbf{A}[^i\tilde{E}])°\boldsymbol{N}(T-\alpha^i\tilde{E})\} \geqslant 0, \tag{5.13}$$

$$\mathrm{tr}\{(\mathbf{P}[T]+\alpha\mathbf{J}[T-\alpha^p\tilde{E}]+\alpha B)°\boldsymbol{N}(T-\alpha^p\tilde{E})\} > 0. \tag{5.14}$$

6. Materiał izotropowy

Przedstawiona w poprzednich paragrafach teoria przy deformacjach nieskończenie małych słuszna jest dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego o dowolnej anizotropii początkowej. Rozważmy w dalszym ciągu materiał, charakteryzujący się izotropią początkową. W tym przypadku mamy[8)]

$$\left\{\begin{aligned} B_{KL} &= \alpha_1\delta_{KL} \\ \mathrm{J}_{KLMN} &= \alpha_2\delta_{KL}\delta_{MN}+\alpha_3(\delta_{KM}\delta_{LN}+\delta_{KN}\delta_{LM}), \\ \mathrm{P}_{KLMN} &= \zeta_1\delta_{KL}\delta_{MN}+\zeta_2(\delta_{KM}\delta_{LN}+\delta_{KN}\delta_{LM}), \\ ^i\mathrm{A}_{KLMN} &= \eta_1\delta_{KL}\delta_{MN}+\eta_2(\delta_{KM}\delta_{LN}+\delta_{KN}\delta_{LM}), \\ \mathrm{G}_{KLMN} &= \xi_1(\mathrm{tr}_D T^2, \mathrm{tr}(_D T\,^i_D\tilde{E}), \mathrm{tr}\,^i_D\tilde{E}^2)\delta_{KL}\delta_{MN}+ \\ &\quad +\xi_2(\mathrm{tr}_D T^2, \mathrm{tr}(_D T\,^i_D\tilde{E}), \mathrm{tr}\,^i_D\tilde{E}^2)(\delta_{KM}\delta_{LN}+\delta_{KN}\delta_{LM}). \end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

Wykorzystując zależność $(6.1)_{1,2}$ można, jak wynika z (5.5) i (5.10), nadać statycznemu warunkowi plastyczności postać

$$\alpha_3\mathrm{tr}(_D T-\alpha\,^p_D\tilde{E})^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3\right)[\mathrm{tr}(T-\alpha^p\tilde{E})]^2 + \alpha_1\mathrm{tr}(T-\alpha^p\tilde{E}) = {}_{\prime\prime}\varkappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta), \tag{6.2}$$

8) Reprezentacje tensorów izotropowych (6.1) odpowiadają prostokątnemu układowi współrzędnych kartezjańskich.

zaś dzięki $(6.1)_4$ funkcji ${}^{\circ}\boldsymbol{N}$ [patrz (5.11)] — formę

$$ {}^{\circ}\boldsymbol{N}(T-\alpha{}^{i}\tilde{E}) = \mathrm{H}\mathbf{1}+\left(\xi_1+\frac{2}{3}\xi_2\right)\mathbf{1}\operatorname{tr}(T-\alpha{}^{i}\tilde{E})+2\xi_2({}_DT-\alpha{}_D^{i}\tilde{E}). \tag{6.3}$$

Ponadto, ze względu na $(6.1)_3$, określona przez (5.12) funkcja $\overline{\boldsymbol{M}}$ staje się równa

$$ \overline{\boldsymbol{M}} = \left(\zeta_1+\frac{2}{3}\zeta_2\right)\mathbf{1}\operatorname{tr}T+2\zeta_2\,{}_DT, \tag{6.4}$$

a $(6.1)_4$ sprawia, że część niesprężysta energii swobodnej (3.15) jest

$$ {}^{i}\psi = \frac{1}{2}\eta_1(\operatorname{tr}{}^{i}\tilde{E})^2+\eta_2\operatorname{tr}{}^{i}\tilde{E}^2. \tag{6.5}$$

Jednocześnie zależności $(6.1)_4$ oraz (6.3) nadają nierówności ograniczającej (5.13) postać

$$ \operatorname{tr}\left\{[T-\varrho_R(\eta_1\mathbf{1}\operatorname{tr}{}^{i}\tilde{E}+2\eta_2{}^{i}\tilde{E})]\left[\mathrm{H}\mathbf{1}+\left(\xi_1+\frac{2}{3}\xi_2\right)\operatorname{tr}(T-\alpha{}^{i}\tilde{E})+2\xi_2({}_DT-\alpha{}_D^{i}\tilde{E})\right]\right\}\geqslant 0, \tag{6.6}$$

natomiast związki $(6.1)_{1,2,3,5}$ przekształcają (5.14) w nierówność

$$ \begin{aligned}\Bigg\{\Bigg(\left(\zeta_1+\frac{2}{3}\zeta_2\right)\mathbf{1}\operatorname{tr}T+2\zeta_2\,{}_DT+\alpha\Bigg[\alpha_1\mathbf{1}+\left(\alpha_2'+\frac{2}{3}\alpha_3\right)\mathbf{1}\operatorname{tr}(T-\alpha{}^{p}\tilde{E})+\\ +2\alpha_3({}_DT-\alpha{}_D^{p}\tilde{E})\Bigg]\Bigg)\left[\mathrm{H}\mathbf{1}+\left(\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3\right)\mathbf{1}\operatorname{tr}(T-\alpha{}^{p}\tilde{E})+2\alpha_3({}_DT-\alpha{}_D^{p}\tilde{E})\right]\Bigg\} > 0.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Rozpatrzmy dwa szczególne przypadki.

P r z y p a d e k A. Gdy

$$ \alpha_1 = 2a\sqrt{{}_n\varkappa},\qquad \alpha_2 = -\left(2a^2+\frac{1}{3}\right),\qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}. \tag{6.8}$$

Dla wyspecyfikowanych przez (6.8) mnożników α_1, α_2 i α_3 warunek (6.2) staje się statycznym uogólnionym warunkiem plastyczności Misesa[9] (patrz [1])

$$ f=\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_DT-\alpha{}_D^{p}\tilde{E})^2}+a\operatorname{tr}(T-\alpha{}^{p}\tilde{E}) = \sqrt{{}_n\varkappa(T,{}^{p}\tilde{E},\vartheta)} \tag{6.9}$$

i w tym przypadku możemy napisać statyczną funkcję uplastycznienia (5.6) jako

$$ \mathscr{F}(T,{}^{i}\tilde{E},\vartheta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_DT-\alpha{}_D^{i}\tilde{E})}+a\operatorname{tr}(T-\alpha{}^{i}\tilde{E})}{\sqrt{{}_n\varkappa(T,{}^{p}\tilde{E},\vartheta)}}-1. \tag{6.10}$$

Niech ponadto funkcja ${}^{\circ}\boldsymbol{N}$ [patrz (5.11)] jest równa

$$ {}^{\circ}\boldsymbol{N} = f_T(T-\alpha{}^{i}\tilde{E}), \tag{6.11}$$

[9] Warunek ten nazywany jest również warunkiem plastyczności Schleichera-Misesa.

gdzie f jest lewą stroną warunku (6.9) przy podstawionym ${}^{i}\tilde{E}$ w miejsce ${}^{p}\tilde{E}$, natomiast f_T oznacza gradient f względem T. Dokonując różniczkowania widzimy, że w tym przypadku

$$
{}^{\circ}\mathbf{N}(T-\alpha\,{}^{i}\tilde{E}) = a\mathbf{1} + \frac{{}_{D}T-\alpha\,{}^{i}_{D}\tilde{E}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_{D}T-\alpha\,{}^{i}\tilde{E})^{2}}}. \tag{6.12}
$$

Z (6.3) wynika, że przyjęcie funkcji ${}^{\circ}\mathbf{N}$ w postaci (6.12) jest równoważne wyspecyfikowaniu mnożników ξ przez związki

$$
\mathrm{H} = a, \qquad \xi_1 = -\frac{2}{3}\xi_2, \qquad \xi_2 = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_{D}T-\alpha\,{}^{i}_{D}\tilde{E})^{2}}}. \tag{6.13}
$$

Tak więc w tym przypadku równanie konstytutywne (3.38) przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_{D}T-\alpha\,{}^{i}_{D}\tilde{E})^{2}}+a\operatorname{tr}(T-\alpha\,{}^{i}\tilde{E})}{\sqrt{{}_{n}\varkappa(T,\,{}^{p}\tilde{E},\,\vartheta)}}-1\right) > \\
> \left(a\mathbf{1}+\frac{{}_{D}T-\alpha\,{}^{i}_{D}\tilde{E}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_{D}T-\alpha\,{}^{i}_{D}\tilde{E})^{2}}}\right),
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

zaś dynamiczny warunek plastyczności (3.31) — formę

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_{D}T-\alpha\,{}^{i}_{D}\tilde{E})^{2}}+a\operatorname{tr}(T-\alpha\,{}^{i}\tilde{E}) = \\
= \sqrt{{}_{n}\varkappa(T,\,{}^{p}\tilde{E},\,\vartheta)}\left\{1+\Phi^{-1}\left[\frac{(\operatorname{tr}{}^{i}\dot{\tilde{E}}^{2})^{1/2}}{\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta}\left(3a^{2}+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

Równanie konstytutywne (6.14) wraz z dynamicznym warunkiem plastyczności (6.15) stanowią uogólnienie proponowanego w pracy [5] równania konstytutywnego dla sprężysto/lepkoplastycznego gruntu na przypadek wzmocnienia zarówno izotropowego jak i kinematycznego przy niestacjonarnej powierzchni uplastycznienia, gdzie niestacjonarność jest wywołana działaniem zmiennej w czasie temperatury.

Z (6.14) widać, że pierwszy niezmiennik tensora prędkości odkształcenia niesprężystego jest różny od zera i równy

$$
\operatorname{tr}{}^{i}\dot{\tilde{E}} = 3a[\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_{D}T-\alpha\,{}^{i}\tilde{E})^{2}}+a\operatorname{tr}(T-\alpha\,{}^{i}\tilde{E})}{\sqrt{{}_{n}\varkappa(T,\,{}^{p}\tilde{E},\,\vartheta)^{2}}}-1\right) >,
$$

z czego wynika, iż odkształceniom niesprężystym towarzyszy zmiana objętości (przy $a \neq 0$), nazywana niesprężystą dylatacją gruntu. Zatem a jest stałą, która odpowiada za prędkość niesprężystej dylatacji gruntu.

Uwzględniając (6.13) w zależności (6.6) otrzymujemy nierówność

$$\alpha\,\mathrm{tr}[T-\varrho_R(3\eta_1+2\eta_2)\,{}^i\tilde{E}]+\frac{\mathrm{tr}\,{}_DT^2-(2\varrho_R\eta_2+\alpha)\,\mathrm{tr}\,({}_DT\,{}_D^i\tilde{E})+2\varrho_R\eta_2\alpha\,\mathrm{tr}\,{}_D^i\tilde{E}^2}{2\sqrt{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,({}_DT-\alpha\,{}_D^i\tilde{E})^2}}\geqslant 0, \tag{6.16}$$

która musi być słuszna dla każdej pary $(T, {}^i\tilde{E})$, jaka spełnia dynamiczny warunek plastyczności (6.15). Nie poszukując pełnego zbioru mnożników η_1 i η_2, ograniczonych nierównością (6.16), można wykazać, że dla szczególnego ich wyboru, mianowicie

$$\eta_1=0 \quad \text{i} \quad \eta_2=\frac{\alpha}{2\varrho_R}, \tag{6.17}$$

nierówność (6.16) jest spełniona zawsze. Podstawiając bowiem (6.17) do lewej strony nierówności (6.16) otrzymujemy lewą stronę dynamicznego warunku plastyczności (6.15), a ta, jak wynika z jego strony prawej, jest w czasie procesu deformacji niesprężystej zawsze dodatnia. Należy jednocześnie zauważyć, że wyspecyfikowanie η_1 i η_2 jak w (6.17) jest równoważne przyjęciu części niesprężystej energii swobodnej (6.5) w postaci

$${}^i\psi=\frac{\alpha}{2\varrho_R}\,\mathrm{tr}\,{}^i\tilde{E}^2. \tag{6.18}$$

Dla granicznego przypadku, gdy dana przez (3.28) funkcja $\mu(\vartheta)\to\infty$, równanie konstytutywne (3.30), z funkcją statycznego uplastycznienia w postaci (6.10) i daną przez (6.10) funkcją $^\circ\mathbf{N}$, przechodzi w równanie konstytutywne plastycznego płynięcia w postaci

$${}^p\dot{\tilde{E}}=\lambda<\mathrm{tr}(f_T\dot{T})-(\mathrm{D}+\mathrm{N}\Delta\vartheta)\dot{\vartheta}>f_T(T-\alpha\,{}^p\tilde{E}), \tag{6.19}$$

gdzie współczynnik λ spełnia zależność

$$\lambda\,\mathrm{tr}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{{}_n\varkappa}}\,\bar{M}-f_{{}^p\tilde{E}}\right)f_T\right]>0. \tag{6.20}$$

Przyjmując jak w p.1 $\lambda>0$, oraz spostrzegając z (6.9), że $f_{{}^p\tilde{E}}=-\alpha f_T$, otrzymujemy z zależności (6.20) nierówność

$$\mathrm{tr}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{{}_n\varkappa}}\,\bar{M}+\alpha f_T\right)\right]>0, \tag{6.21}$$

do której podstawiamy (6.4) oraz (6.12) ze zmienionym wskaźnikiem i na p. Po dokonaniu przekształceń uzyskujemy warunek ograniczający

$$\frac{1}{2\sqrt{{}_n\varkappa}}\left[3a\left(\zeta_1+\frac{2}{3}\zeta_2\right)\mathrm{tr}\,T+\zeta_2\,\frac{\mathrm{tr}\,{}_DT^2-\alpha\,\mathrm{tr}\,({}_DT\,{}_D^p\tilde{E})}{\sqrt{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,({}_DT-\alpha\,{}_D^p\tilde{E})^2}}\right]+\alpha\left(3a^2+\frac{1}{2}\right)>0. \tag{6.22}$$

P r z y p a d e k B. Gdy w warunkach (6.8) $a=0$, co oznacza nieściśliwość materiału w obszarze odkształcenia niesprężystego. Kładąc $a=0$ w (6.9) otrzymujemy statyczny warunek plastyczności Hubera–Misesa

$$f=\sqrt{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,({}_DT-\alpha\,{}_D^p\tilde{E})^2}=\sqrt{{}_n\varkappa(T,{}^p\tilde{E},\vartheta)}\,. \tag{6.23}$$

Przyjmując w (6.14) oraz (6.15) $a = 0$ otrzymujemy równanie konstytutywne w postaci

$$
(6.24) \qquad {}_D^i\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_DT-\alpha\,{}_D^i\tilde{E})^2}}{\sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)}}-1\right) > \frac{{}_DT-\alpha\,{}_D^i\tilde{E}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_DT-\alpha\,{}_D^i\tilde{E})^2}},
$$

oraz dynamiczny warunek plastyczności w formie

$$
(6.25) \qquad \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_DT-\alpha\,{}_D^i\tilde{E})^2} = \sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)}\left\{1+\Phi^{-1}\left[\frac{(2\operatorname{tr}{}_D^i\dot{\tilde{E}}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta}\right]\right\}.
$$

Równanie (6.24) stanowi uogólnienie proponowanego w [11] równania konstytutywnego dla metali na przypadek wzmocnienia zarówno izotropowego, jak i kinematycznego.

Dla $a = 0$ nierówność (6.16) staje się nierównością

$$
(6.26) \qquad \operatorname{tr}{}_DT^2-(2\varrho_R\eta_2+\alpha)\operatorname{tr}({}_DT\,{}_D^i\tilde{E})+2\varrho_R\eta_2\alpha\operatorname{tr}{}_D^i\tilde{E}^2 \geqslant 0,
$$

która musi być spełniona dla każdej pary $(T, {}^i\tilde{E})$, jaka spełnia dynamiczny warunek plastyczności (6.25). Nierówność (6.26) jest zawsze spełniona przy np.

$$
(6.27) \qquad \eta_1 \text{ — dowolne} \quad \text{i} \quad \eta_2 = \frac{\alpha}{2\varrho_R},
$$

dla tych bowiem wartości jej lewa strona jest równa $\operatorname{tr}({}_DT-\alpha\,{}_D^i\tilde{E})^2$. W tym przypadku część niesprężysta energii swobodnej jest równa

$$
(6.28) \qquad {}^i\psi = \frac{1}{2}\eta_1(\operatorname{tr}{}^i\tilde{E})^2+\frac{\alpha}{2\varrho_R}\operatorname{tr}{}^i\tilde{E}^2.
$$

Przyjmując $a = 0$ w (6.22) otrzymujemy warunek ograniczający

$$
(6.29) \qquad \frac{\zeta_2}{2\sqrt{{}_n\varkappa}}\,\frac{\operatorname{tr}{}_DT^2-\alpha\operatorname{tr}({}_DT\,{}_D^p\tilde{E})}{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}({}_DT-\alpha\,{}_D^p\tilde{E})^2}}+\frac{\alpha}{2} > 0.
$$

Gdy materiał wykazuje wzmocnienie tylko izotropowe, $\alpha = 0$ i wówczas statyczny warunek plastyczności (6.9) przyjmuje postać

$$
(6.30) \qquad \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}{}_DT^2}+a\operatorname{tr}T = \sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^pE, \vartheta)},
$$

równanie konstytutywne (6.14) — formę

$$
(6.31) \qquad {}^i\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}{}_DT^2}+a\operatorname{tr}T}{\sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)}}-1\right) > \left(a\mathbf{1}+\frac{{}_DT}{2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}{}_DT^2}}\right),
$$

natomiast dynamiczny warunek plastyczności (6.15) staje się warunkiem

$$(6.32)\quad \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2 + a\,\mathrm{tr}\,T} = \sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^P\tilde{E}, \vartheta)}\left\{1+\Phi^{-1}\left[\frac{(\mathrm{tr}\,{}^i\dot{E}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta}\left(3a^2+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\right]\right\}.$$

Tym razem, jak wynika z (6.31), prędkość niesprężystej dylatacji gruntu w procesie termodynamicznym jest równa

$$\mathrm{tr}\,{}^i\dot{E} = 3a[\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2} + a\,\mathrm{tr}\,T}{\sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^P\tilde{E}, \vartheta)}} - 1\right) > .$$

W tym przypadku musi zachodzić warunek (4.8), co jak widać z $(6.1)_4$ pociąga za sobą fakt, że musi być $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Zatem warunek (6.16) staje się nierównością

$$(6.33)\quad \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2} + a\,\mathrm{tr}\,T \geqslant 0,$$

która, jak wynika z (6.32), jest zawsze spełniona, przy czym znak równości zachodzi wtedy, gdy $T = \mathbf{0}$.

Jednocześnie dla $\alpha = 0$ warunek (6.22) przyjmuje postać

$$(6.34)\quad \frac{1}{\sqrt{{}_n\varkappa}}\left[\frac{3}{2}a\left(\zeta_1+\frac{2}{3}\zeta_2\right)\mathrm{tr}\,T+\zeta_2\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2}\right] > 0,$$

która ogranicza mnożniki ζ_1 i ζ_2. Przyjmując np.

$$(6.35)\quad \zeta_1 = 0 \quad \text{i} \quad \zeta_2 = m > 0,$$

gdzie m dowolna liczba, otrzymujemy po wykorzystaniu warunku (6.30) nierówność $m > 0$, jaka jest zawsze spełniona. Kładąc $\alpha = 0$ w (6.23)–(6.25) otrzymujemy statyczny warunek plastyczności

$$(6.36)\quad \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2} = \sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^P\tilde{E}, \vartheta)},$$

równanie konstytutywne

$$(6.37)\quad {}^i_D\dot{E} = [\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2}}{\sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^P\tilde{E}, \vartheta)}} - 1\right) > \frac{{}_D T}{2\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2}}$$

oraz dynamiczny warunek plastyczności

$$(6.38)\quad \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}_D T^2} = \sqrt{{}_n\varkappa(T, {}^P\tilde{E}, \vartheta)}\left\{1+\Phi^{-1}\left[\frac{(2\,\mathrm{tr}\,{}^i_D\dot{E}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0)+\mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta}\right]\right\}.$$

Równanie konstytutywne (6.37), wraz z dynamicznym warunkiem plastyczności (6.38), zostało sformułowane i przedyskutowane w pracy [11].

Dzięki temu, że $\eta_1 = \eta_2 = 0$, nierówność (6.26) staje się warunkiem

$$\mathrm{tr}_D T^2 \geqslant 0, \tag{6.39}$$

który jest zawsze spełniony, przy czym znak równości zachodzi wtedy, gdy ${}_D T = \mathbf{0}$. Przy $\alpha = 0$ warunek (6.29) przyjmuje postać nierówności

$$\zeta_2 > 0, \tag{6.40}$$

zaś mnożnik ζ_1 może być dowolny.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. FREUNDENTHAL, H. GEIRINGER, *The Mathematical Theories of Inelastic Continuum*, Encyclopedia of Physics, vol. VI, *Elasticity and Plasticity*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1958, 229–443.
2. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *A general theory of an elastic plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 251–281.
3. K. HOHENEMSER, W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*, ZAMM **12** (1932), 216–226.
4. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition*, Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Münich, August 30 to September 5, 1964, Proc. Springer 1966, Berlin, 545–553.
5. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *On elastic/visco-plastic soil*, Proceedings of the Symposium on Rheology and Mechanics of Soils at Grenoble, April 1964.
6. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20** (1963), 321–332.
7. P. PERZYNA, *The study of the dynamical behaviour of rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 113–130; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **12** (1964), 207–216.
8. P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Probl., **4** (1963), 281–290; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **12** (1964), 199–206.
9. P. PERZYNA, *Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności*, Mech. Teoret. Stos., **15** (1963), 3–30.
10. P. PERZYNA, *Fundamental problems in viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech., vol. IX, 1966, 243–377.
11. P. PERZYNA, T. WIERZBICKI, *Temperature dependent and strain sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 135–143; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **12** (1964), 225–232.
12. P. PERZYNA. W. WOJNO, *On the constitutive equations of elastic/viscoplastic materials at finite strain*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 85–100.
13. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966.
14. P. PERZYNA, W. WOJNO, *Thermodynamics of a rate sensitive plastic material*, Arch. Mech. Stos., **20** (1968), 499–511; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **17** (1969), 1–8; Prace IPPT PAN, 10/1968.
15. W. PRAGER, *Mécanique des solids isotropes au delà du élastique*, Mémorial Sci., Math., **87**, Paris 1937.
16. W. PRAGER, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, Boston 1961.
17. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, in: Handbuch der Physik III/I (1960), Springer–Verlag, Berlin, 226–793.
18. В. Войно, *Термодинамическая теория упруго/вязко-пластических материалов*, Механика Сплошных Сред, Сборник материалов международной конференции по механике сплошных сред, Варна, Сентябрь 1966.
19. W. WOJNO, *Termodynamika materiałów sprężysto/lepkoplastycznych*, praca doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 1967.
20. W. WOJNO, *Thermodynamics of elastic/rheological materials*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969); *Termodynamika materiałów sprężysto/reologicznyeh*, Prace IPPT PAN, 9/1969.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГО/ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

До настоящего времени теории упруго/вязкопластических материалов для бесконечно малых и для конечных деформаций развивались независимо. Целью настоящей работы является вывод, с одновременным расширением на случай термодинамических процессов, инфинитезимальной теории непосредственно путем предельного перехода от термодинамической теории для больших деформаций. Этот предельный переход произведен при предположении, что градиенты перемещения и приращения температуры являются небольшими. При этих предположениях были получены уравнения общей теории совместно с ограничениями вытекающими из второго закона термодинамики. Затем рассмотрен случай изотропного упрочнения материалов, условия пластичности с нестационарной из за влияния температуры поверхностью пластического течения и случай изотропного материала.

Summary

NOTES ON THE INFINITESIMAL THEORY OF ELASTIC/VISCOPLASTIC MATERIALS

So far, both the infinitesimal and the finite deformation theories of elastic/viscoplastic materials have been developed independently. The aim of the paper is to obtain the infinitesimal theory as a limiting case of the thermodynamical theory at finite strains with the conditions that displacement gradients and temperature increments are small. As a result, both the generalized constitutive equations and the restrictions that are imposed on them by the second law of thermodynamics have been obtained. Finally, the particular cases, such as the isotropic work-hardening, the yield condition with a non-stationary yield surface and the isotropic materials, has been discussed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1970 r.