MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 8 (1970)

# ANALOGIA MECHANICZNO-STEREOMECHANICZNA W KLASIE DWUWSKAŹNIKOWYCH RÓWNAŃ LAGRANGE'A DRUGIEGO RODZAJU

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

## 1. Wprowadzenie

Dzięki użyciu ciągów wielowskaźnikowych [1] można badać struktury różnych wielkich systemów, jak też w możliwie ogólny sposób formalizować pojęcie układu. Powstaje przy tym możliwość konstruowania analogii różnorodnych zjawisk w klasie pewnych przekształceń i modelowania za ich pomocą wielu odrębnych zjawisk.

Rozważmy wielki system stereomechaniczny nazwany oscylatorem stereomechanicznym wielowskaźnikowym, który rozpatrzono w pracy [2]. Wskazano tam na analogię mechaniczno-stereomechaniczną w klasie wielowskaźnikowego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego, zwanego równaniem oscylatora harmonicznego (*matematycznego*), lub krótko — oscylatorem matematycznym.

Okazuje się, że można tę analogię uzasadnić bądź też rozciągnąć na równania Lagrange'a drugiego rodzaju. W związku z tym należy otrzymać te równania w terminologii stereomechanicznej.

Przypominamy, że o analogii między teoriami (naukami) ${}_1T$ i ${}_2T$ mówimy wtedy, gdy potrafimy podać pewną równoważność

$$ {}_1T \rightleftarrows {}_2T $$

wynikającą z równoważności

$$ \overline{C}({}_1T) \rightleftarrows \overline{C}({}_2T) $$

ciągów rozważań logicznych obu nauk.

Istnieje ciąg rozważań logicznych w mechanice, który umożliwia otrzymanie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju [3].

Wyprowadzimy je obecnie w terminologii stereomechanicznej z użyciem ciągów dwuwskaźnikowych i tym samym uzasadnimy analogię mechaniczno-stereomechaniczną w klasie tych równań dwuwskaźnikowych.

Praca [4] przedstawia tę samą analogię w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a. Uogólnienia polegają na użyciu ciągów o wyższych walencjach.

Analogii mechaniczno-stereomechanicznej w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju poświęcona jest oddzielna praca.

Wszelkie rozważania dotyczące uzasadnienia omawianej analogii prowadzone są bez użycia rachunku wariacyjnego. Zastosowana algebra ciągów wielowskaźnikowych nie wymaga znajomości rachunku tensorowego.

## 2. Ruch dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego. Więzy

Będziemy rozważali przestrzeń ciągów dwuwskaźnikowych

$$^2\bar{y} = [y_{j_1 j_2}(x)], \quad j_1 = j_2 = 1, 2, \ldots, n; \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle, \tag{2.1}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} y_{11}(x), \ldots, y_{1n}(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n1}(x), \ldots, y_{nn}(x) \end{bmatrix} = [\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)],$$

utworzoną z rozwiązań różniczkowych zwyczajnych rzędu 2 dwuwskaźnikowych, przy czym w przypadku ogólnym mogą one być rzędu $n$

$$^2\bar{y}^{(n)} = {}^2\bar{y}^{(n)}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}),$$

$$^2\bar{y}^{(n)} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_n^{(n)} \end{bmatrix} = \frac{d^n}{dx^n} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_n \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

których strony prawe są funkcjami ciągłymi i posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej, przy czym funkcja $y(x)$ może na przykład mieć charakter ugięcia pręta w przekroju $x$.

**Definicja 1.** Ruchem (jednoparametrowym) układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego $^2\bar{y}$ nazywa się każdą funkcję (2.1) lub w postaci uwikłanej

$$^2\bar{U}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0}, \tag{2.3}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1(x, {}^2\bar{y}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{U}_n(x, {}^2\bar{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przykładem takiego $n^2$ -elementowego układu dwuwskaźnikowego może być $n$ odcinków równoległych jednej płaszczyzny, do których zamocowano prostopadle jednym końcem po $n$ prętów sprężystych. Końce tych prętów są połączone sprężyście każdy z każdym [2]. Każdy pręt jest obciążony jedną siłą powodującą wyboczenie.

**Definicja 2.** Prędkością ${}^2\bar{y}^{(k)}(x)$ rzędu $k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ nazywa się $k$-tą pochodną funkcji (2.1), to jest

$$ {}^2\bar{y}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}{}^2\bar{y}(x) = \frac{d^k}{dx^k}[\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)]. \tag{2.4}$$

**Definicja 3.** Równanie (2.2) lub w postaci uwikłanej

$$ {}^2\bar{G}(x, {}^2\bar{y}', {}^2\bar{y}'', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}, {}^2\bar{y}^{(n)}) = {}^2\bar{0}, \tag{2.5}$$

czy też po rozpisaniu w postaci

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_1(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', {}^2\bar{y}'', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}, {}^2\bar{y}^{(n)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{G}_n(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', {}^2\bar{y}'', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}, {}^2\bar{y}^{(n)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

nazywa się równaniem (stanu) ruchu układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego.

**Definicja 4.** Więzami ruchu nazywamy niezależne od siebie związki

$$\begin{gathered} {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}) = {}^2\bar{0}, \\ {}^2\bar{H} = [H_{k_1 k_2}], \qquad k_1 = k_2 = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{2.6}$$

czyli po rozpisaniu

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1(x\ {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{H}_{n_1}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix},$$

posiadające ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe w rozważanym otoczeniu zmiennych $x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \ldots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}$.

Przyjmujemy, że badane zjawisko może podlegać pewnym ograniczeniom.

P o s t u l a t I. Istnieje absolutna zmienna niezależna $x$.

P o s t u l a t II. Istnieje inercjalny układ odniesienia.

P o s t u l a t III. Słuszne są prawa Newtona z tym, że czas absolutny $t$ jest zastąpiony absolutną zmienną niezależną $x$.

U w a g a. Jeśli ograniczymy się do przykładu wyboczenia sprężystego pręta pryzmatycznego o długości skończonej, to $y(x)$ jest jego ugięciem w przekroju opisanym odciętą $x$.

W przypadku $n = 2$ otrzymujemy z (2.2) równania ruchu układu stereomechanicznego

$$ {}^2\bar{y}'' = {}^2\bar{f}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') \tag{2.7}$$

analogicznie do newtonowskich równań ruchu [3]

$$ {}^2\bar{r}'' = {}^2\bar{f}(t, {}^2\bar{r}, {}^2\bar{r}').$$

Wynika to stąd, że zamiast proporcji

$$\frac{d^2}{dt^2}{}^2\bar{r}(t) \approx {}^2\bar{r}(t)$$

stotnej w przypadku oscylatora mechanicznego dwuwskaźnikowego słuszna jest proporcja

$$\frac{d^2}{dx^2}{}^2\bar{y}(x) \approx {}^2\bar{y}(x),$$

którą otrzymujemy z uwzględnienia dwuwskaźnikowej linii ugięcia.

Wtedy więzy stereomechaniczne, przez analogię do więzów mechanicznych, mogą przyjmować postać

(2.8) $\quad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') = {}^2\bar{0}$ — nieholonomiczne (różniczkowe lub kinematyczne),

(2.9) $\quad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0}$ — holonomiczne reonomiczne,

(2.10) $\quad {}^2\bar{H}({}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0}$ — holonomiczne skleronomiczne.

Dla stereomechanicznych równań ruchu stawiamy zagadnienie Cauchy'ego.

**Definicja 5.** Siłą stereomechaniczną przez analogię do siły newtonowskiej

$$\bar{F} = m\bar{a},$$

$m$ — masa, $\bar{a}$ — przyspieszenie, nazywamy funkcję liniową przedstawioną $p$-iloczynem[1])

$$ {}^2\bar{F} = \overline{EJ}//{}^2\bar{y}'' = [(\overline{EJ})_1\bar{y}_1'', \ldots, (\overline{EJ})_n\bar{y}_n''],$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}J_{11}y_{11}'', \ldots, E_{1n}J_{1n}y_{1n}'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{n1}J_{n1}y_{n1}'', \ldots, E_{nn}J_{nn}y_{nn}'' \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

gdzie

$$ {}^2\overline{EJ} = [(EJ)_{j_1j_2}], \qquad j_1 = j_2 = 1, \ldots, n$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym sztywności układu, przy czym

$$ {}^2\bar{F} = {}^2\bar{F}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}'),$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

jeśli

$$F = EJy''$$

w przypadku wyboczenia jednego pręta.

**Definicja 6.** Związki (2.1), (2.12) nazywamy równaniami ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego dwuwskaźnikowego.

*Definicja* 6.1. Dynamiczne układy stereomechaniczne spełniające równania więzów nazywamy układami nieswobodnymi.

---

[1]) Symbol // oznacza mnożenie dwóch ciągów wielowskaźnikowych w sensie $p$-iloczynu [1].

Prawa ruchu dynamicznych układów stereomechanicznych dwuwskaźnikowych są uogólnieniem praw ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego zerowskaźnikowego.

$$EJy'' = f(x, y, y'),$$

gdzie $EJ$ jest sztywnością pręta pryzmatycznego o długości skończonej. Wymagają one kilku dalszych pewników zgodnych z doświadczeniem.

P o s t u l a t IV. Z istnienia więzów i ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego dwuwskaźnikowego po nich (ruchu zgodnego z więzami) wynika istnienie sił działania (reakcji) więzów ${}^2\bar{R}$ na układ i odwrotnie.

P o s t u l a t V. Pod wpływem sił ${}^2\bar{F}$ nieswobodny dynamiczny układ stereomechaniczny dwuwskaźnikowy ${}^2\bar{y}$ porusza się jak układ dynamiczny dwuwskaźnikowy swobodny pod działaniem sił danych i oddziaływań więzów, czyli w inercjalnym układzie odniesienia spełnione są równania ruchu

$${}^2\overline{EJ} \, // \, {}^2\bar{y}'' = {}^2\bar{F} + {}^2\bar{R},$$

przy czym współrzędne ciągu ${}^2\bar{y}$ spełniają odpowiednie równania więzów.

U w a g a. Siły, które nie są spowodowane działaniem więzów nazywamy siłami czynnymi.

Będziemy rozważali tylko takie więzy różniczkowe, które są spełnione liniowo przez prędkości (2.4) dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego, to znaczy dane równością przedstawiającą ciąg sum $m$-iloczynu[2])

$${}^4\bar{l} \;\underline{)(}\; {}^2\bar{y}' + {}^2\bar{D} = {}^2\bar{0},$$

czyli

$$\begin{aligned} {}^2\bar{l}_{11}\bar{y}_1' + \; \ldots \; + {}^2\bar{l}_{1n}\bar{y}_n' + \bar{D}_1 &= \bar{0}, \\ &\;\vdots \\ {}^2\bar{l}_{d1}\bar{y}_1' + \; \ldots \; + {}^2\bar{l}_{dn}\bar{y}_n' + \bar{D}_d &= \bar{0}, \end{aligned}$$

wynikające z ogólnej definicji więzów

$${}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') = {}^2\bar{0},$$

przy czym ${}^2\bar{l}$ oraz ${}^2\bar{D}$ są funkcjami $x$, ${}^2\bar{y}$ i nie wszystkie ${}^2\bar{l}_{j_1}$, $j_1 = 1, \ldots, n$ są równe zeru.

Mamy tutaj

$${}^2\bar{y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}, \quad {}^2\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{D}_d \end{bmatrix}, \quad {}^4\bar{l} = \begin{bmatrix} {}^2\bar{l}_{11} & \ldots & {}^2\bar{l}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{l}_{d1} & \ldots & {}^2\bar{l}_{dn} \end{bmatrix}.$$

[2]) Symbol $)($ oznacza mnożenie w sensie $m$-iloczynu dwóch ciągów wielowskaźnikowych, a $\underline{)(}$ przedstawia ciąg sum $m$-iloczynu [1].

### 3. Przemieszczenia możliwe. Przemieszczenia przygotowane

Niech dany dynamiczny układ stereomechaniczny dwuwskaźnikowy ${}^2\bar{y}$ spełnia więzy skończone

$$(3.1) \qquad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0},$$

które zastępujemy wynikającymi z nich więzami różniczkowymi[3])

$$(3.2) \qquad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial^2 \bar{y}} \underline{//}\, {}^2\bar{y}' + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x} = {}^2\bar{0},$$

czyli

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial y_{11}} y'_{11} + \ldots + \frac{\partial H_{11}}{\partial y_{nn}} y'_{nn} + \frac{\partial H_{11}}{\partial x} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial H_{nn}}{\partial y_{11}} y'_{11} + \ldots + \frac{\partial H_{nn}}{\partial y_{nn}} y'_{nn} + \frac{\partial H_{nn}}{\partial x} = 0$$

i więzy różniczkowe, o których zakładamy, że są liniowe, to jest

$$(3.3) \qquad \bar{l} \underline{\supset\subset}\, {}^2\bar{y}' + {}^2\bar{D} = {}^2\bar{0}.$$

**Definicja 7.** Prędkość ${}^2\bar{y}'(x)$ dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego znajdującego się w położeniu

$${}^2\bar{y} = {}^2\bar{A}$$

nazywamy prędkością możliwą (zgodną z więzami) w tym położeniu, jeśli układ może ją posiadać w miejscu $x$, co zachodzi wtedy, gdy ta prędkość spełnia równania liniowe więzów (3.2) i (3.3).

**Definicja 8.** Przez analogię do układu

$$d\bar{r} = \bar{r}'\,dt,$$

gdzie $r$ — wektor–promień punktu materialnego, układ nieskończenie małych przemieszczeń

$$d^2\bar{y} = {}^2\bar{y}'\,dx,$$

gdzie ${}^2\bar{y}'(x)$ jest prędkością możliwą dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego, nazywamy nieskończenie małym przemieszczeniem[4]) możliwym tego układu.

Przemieszczenia możliwe spełniają równania

$$(3.4) \qquad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial^2 \bar{y}} \underline{//}\, d^2\bar{y} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x} dx = {}^2\bar{0}$$

[3]) Symbol $\underline{//}$ oznacza tu ciąg sum $p$-iloczynu tensorowego różniczkowego rzędu pierwszego funkcji wielowskaźnikowej argumentu wielowskaźnikowego [1].

[4]) Mamy tu na myśli przemieszczenie uogólnione $d^2\bar{y}$ jako iloczyn $dx$ oraz *prędkości* ${}^2\bar{y}'$, charakteryzującej zjawisko stereomechaniczne w układzie stereomechanicznym dwuwskaźnikowym.

oraz

$$ {}^{4}\overline{l}\ \underline{\supset\subset}\ d^{2}\overline{y}+{}^{2}\overline{D}\,dx = {}^{2}\overline{0}, \tag{3.5} $$

które otrzymujemy mnożąc obustronnie równania (3.2) i (3.3) przez $dx$.

Weźmy dwa przemieszczenia możliwe

$$ d^{2}\overline{y} = {}^{2}\overline{y}'\,dx, \tag{3.6} $$

$$ d_{1}^{2}\overline{y} = {}_{1}^{2}\overline{y}'\,dx, \tag{3.7} $$

odpowiadające przekrojowi $x$ oraz temu samemu stanowi (położeniu) dynamicznego układu stereomechanicznego.

Spełniają one równania (3.4) i (3.5), natomiast ich różnica

$$ \delta^{2}\overline{y} = d_{1}^{2}\overline{y}-d^{2}\overline{y} \tag{3.8} $$

spełnia związki jednorodne

$$ \frac{\partial^{2}\overline{H}}{\partial^{2}\overline{y}}\ \underline{//}\ \delta^{2}\overline{y} = {}^{2}\overline{0} \tag{3.9} $$

oraz

$$ {}^{4}\overline{l}\ \underline{\supset\subset}\ \delta^{2}\overline{y} = {}^{2}\overline{0}. \tag{3.10} $$

**Definicja 9.** Różnicę (3.8) nazywamy przemieszczeniem przygotowanym (wirtualnym) dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego ${}^{2}\overline{y}$ w miejscu $x$ dla pewnego położenia możliwego.

### 4. Podstawowe zagadnienia dynamiki układu $n^2$-krotnego. Więzy idealne

Oznaczmy wymiary $n^2$-ciągu ${}^{2}\overline{y}$, $d^2$-ciągu ${}_{1}^{2}\overline{H}(x, {}^{2}\overline{y}, {}^{2}\overline{y}') = {}^{2}\overline{0}$, oraz $h^2$-ciągu ${}_{2}^{2}\overline{H}(x, {}^{2}\overline{y}) = {}^{2}\overline{0}$ przez

$$ \operatorname{Dim} {}^{2}\overline{y} = n^{2}, \tag{4.1} $$

$$ \operatorname{Dim} {}_{1}^{2}\overline{H} = d^{2}, \tag{4.2} $$

$$ \operatorname{Dim} {}_{2}^{2}\overline{H} = h^{2}. \tag{4.3} $$

Równania (3.9) i (3.10) zawierają $n^2$ niewiadomych współrzędnych ciągu dwuwskaźnikowego $\delta^2\overline{y}$.

Jeśli równania te są niezależne, to wśród współrzędnych

$$ \delta y_{j^2} = \delta y_{j_1 j_2} $$

istnieje

$$ k^{2} = n^{2}-d^{2}-h^{2} \tag{4.4} $$

współrzędnych niezależnych.

**Definicja 10.** Liczbę $k^2$ współrzędnych niezależnych ciągu $\delta^2\overline{y}$ nazywa się liczbą stopni swobody danego dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego.

Mówiąc o układzie $k^2$-krotnym będziemy mieli na myśli układ $n^2$-krotny o $k^2$ stopniach swobody.

*Podstawowe zagadnienie dynamiki nieswobodnego układu stereomechanicznego* o $k^2$ stopniach swobody można sformułować następująco.

Należy określić ruch

(4.5) $$ {}^{2}\bar{y} = {}^{2}\bar{y}(x), \qquad x_1 < x < x_2 $$

układu ${}^{2}\bar{y}$ oraz oddziaływania więzów

(4.6) $$ {}^{2}\bar{R} = {}^{2}\bar{R}(x, {}^{2}\bar{y}, {}^{2}\bar{y}') $$

przy danych siłach czynnych

(4.7) $$ {}^{2}\bar{F} = {}^{2}\bar{F}(x, {}^{2}\bar{y}, {}^{2}\bar{y}') $$

i zgodnych z więzami jego położeniach początkowych

(4.8) $$ {}^{2}_{0}\bar{y} = {}^{2}_{0}\bar{y}'(x)\big|_{x=0} $$

oraz prędkościach początkowych

(4.9) $$ {}^{2}_{0}\bar{y}' = {}^{2}_{0}\bar{y}(x)\big|_{x=0}. $$

Jeśli nie jest znany charakter więzów, to nie są wiadome oddziaływania ${}^{2}\bar{R}$ i zagadnienie jest nieokreślone, ponieważ liczba niewiadomych ${}^{2}\bar{y}$, ${}^{2}\bar{R}$ jest większa od liczby równań

$$ n^2+n^2 > n^2+d^2+h^2. $$

Podstawowe zagadnienie dynamiki układu stereomechanicznego staje się określone, jeśli mamy

$$ 2n^2-(n^2+d^2+h^2) = n^2-d^2-h^2 = k^2 $$

dodatkowych niezależnych związków między szukanymi wielkościami $\delta y_{\bar{j}}$. Związki te otrzymujemy postulując istnienie klasy więzów idealnych.

P o s t u l a t VI. Wyrażenie[5]) ${}_{2}\lfloor\underline{{}^{2}\bar{R} \,//\, \delta^2\bar{y}}\rfloor$, jako praca sił oddziaływania więzów na dowolnych (zgodnych z więzami) przemieszczeniach przygotowanych zeruje się, gdy nie występują siły rozpraszające, albo włączamy je do sił danych, to znaczy

(4.10) $$ {}_{2}\lfloor\underline{{}^{2}\bar{R} \,//\, \delta^2\bar{y} = 0}\rfloor, $$

czyli

$$ {}_{1}\lfloor\underline{\bar{R}_1\,\delta\bar{y}_1}\rfloor + \ldots + {}_{1}\lfloor\underline{\bar{R}_n\,\delta\bar{y}_n}\rfloor = R_{11}\,\delta y_{11} + \ldots + R_{nn}\,\delta y_{nn} = 0. $$

**Definicja 11.** Więzy stereomechaniczne nazywamy idealnymi, jeżeli siły oddziaływania ${}^{2}\bar{R}$ na punkty dynamicznego układu stereomechanicznego spełniają związek (4.10).

### 5. Ogólne równanie dynamiki

Rozważmy dynamiczny układ stereomechaniczny $n$-krotny nieswobodny. Jego równanie ruchu ma postać

(5.1) $$ {}^{2}\overline{EJ} \,//\, {}^{2}\bar{y}'' = {}^{2}\bar{F}+{}^{2}\bar{R}. $$

---

[5]) Symbol ${}_{2}\lfloor\underline{\quad}\rfloor$ oznacza sumę dwukrotną $p$-iloczynu [1].

Jeśli więzy są idealne, to w każdym położeniu układu dowolne przemieszczenia przygotowane spełniają równanie (4.10)

$$ {}_{2|}\underline{{}^{2}\overline{R} \,//\, \delta^{2}\overline{y}}_{|} = 0 . $$

Z układu tych dwóch związków wynika równość

$$ {}_{2|}\underline{({}^{2}\overline{F} - {}^{2}\overline{EJ} \,//\, {}^{2}\overline{y}'')\,\delta^{2}\overline{y}}_{|} = 0 , \tag{5.2} $$

która nosi nazwę ogólnego równania dynamiki układu stereomechanicznego.

Podczas ruchu układu w dowolnym miejscu $x$ (przekroju) suma prac sił czynnych i stereomechanicznych sił bezwładności[6]) na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zeru.

**Twierdzenie.** Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ruch układu dynamicznego stereomechanicznego zgodny z więzami odpowiadał danemu układowi sił czynnych ${}^{2}\overline{F}$, jest spełnienie ogólnego równania dynamiki.

### 6. Zasada przemieszczeń przygotowanych. Zasada d'Alemberta

**Definicja 12.** Położeniem równowagi ${}^{2}_{0}\overline{y}$ dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego nazywa się takie jego położenie, w którym układ znajduje się w sposób ciągły, jeśli w miejscu początkowym był on w tym położeniu i prędkości ${}^{2}\overline{y}'$ wszystkich jego punktów były równe zeru.

Położenie układu ${}^{2}_{0}\overline{y}$ jest wtedy i tylko wtedy położeniem równowagi, gdy ruch

$$ {}^{2}\overline{y}(x) = {}^{2}_{0}\overline{y} \tag{6.1} $$

spełnia ogólne równanie dynamiki, to jest jeżeli w tym położeniu

$$ {}_{2|}\underline{{}^{2}\overline{F} \,//\, \delta^{2}\overline{y}}_{|} = 0 . \tag{6.2} $$

Równość ta jest treścią zasady przemieszczeń przygotowanych.

**Twierdzenie.** Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby pewne (zgodne z więzami) położenie dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego było położeniem równowagi, jest równa zeru w tym położeniu suma prac sił czynnych ${}^{2}\overline{F}$ na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych $\delta^{2}\overline{y}$.

Równość (6.2) wyrażająca zasadę przemieszczeń przygotowanych jest przypadkiem szczególnym ogólnego równania dynamiki (5.2).

Potraktujmy równanie dynamiki jako zasadę przemieszczeń możliwych, charakteryzującą położenie równowagi dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego, które powstaje z dodania sił bezwładności do sił czynnych. Stąd wynika zasada d'Alemberta. Podczas ruchu dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego można dowolne

---

[6]) Stereomechanicznymi siłami bezwładności ${}^{2}\overline{B}$ nazywamy wyrażenie ${}^{2}\overline{B} = -{}^{2}\overline{EJ} \,//\, {}^{2}\overline{y}''$ .

jego położenia traktować jako położenia równowagi dodając siły bezwładności ${}^2\bar{B}$ do sił czynnych ${}^2\bar{F}$ w danym położeniu

$$ {}^2\bar{F} + {}^2\bar{B} = {}^2\bar{0}. \tag{6.3} $$

Dzięki tej zasadzie metody statyki przenoszą się na zagadnienia dynamiki.

### 7. Współrzędne niezależne (uogólnione) układów stereomechanicznych uogólnionych. Siły uogólnione

Niech będzie dany dynamiczny układ stereomechaniczny ${}^2\bar{y}$ holonomiczny $n^2$-krotny spełniający więzy

$$ {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0}. \tag{7.1} $$

Przyjmujemy, że funkcje ${}^2\bar{H}$ w ilości $h^2$ są niezależne, przy czym $x$ jest parametrem, natomiast zmiennych $y_{\bar{j}}$ jest $n^2$. Wobec powyższego można z równań więzów wyrazić $h^2$ współrzędnych (czyli ciąg dwuwskaźnikowy współrzędnych) przez funkcje $n^2-h^2$ pozostałych współrzędnych oraz zmiennej $x$ i rozpatrywać te współrzędne w liczbie

$$ k^2 = n^2 - h^2 \tag{7.2} $$

jako wielkości niezależne określające położenia dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego w miejscu $x$. Takimi współrzędnymi nie koniecznie muszą być współrzędne kartezjańskie. Także współrzędne kartezjańskie ciągu ${}^2\bar{y}$ (w liczbie $n^2$) można wyrazić jako funkcje ciągłe i różniczkowalne $k^2$-elementowego ciągu dwuwskaźnikowego parametrów niezależnych

$$ {}^2\bar{q} = [{}^1\bar{q}_1, \ldots, {}^1\bar{q}_k] \tag{7.3} $$

i zmiennej $x$, mianowicie

$$ {}^2\bar{y} = {}^2\bar{y}(x, {}^2\bar{q}), \tag{7.4} $$

przy czym

$$ \operatorname{Dim} {}^2\bar{q} = k^2. \tag{7.5} $$

Funkcje te spełniają tożsamościowo równania więzów podane wyżej.

Zakładamy ponadto, że dowolne (zgodne z więzami) położenia dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego w miejscu $x$ można przy pewnych wartościach ${}^2\bar{q}$ otrzymać z równań (7.4).

**Definicja 13.** Wielkości ${}^2\bar{q}$ występujące w równości (7.4) nazywamy współrzędnymi uogólnionymi niezależnymi dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego $n^2$-krotnego.

Każdej współrzędnej uogólnionej ${}^2\bar{q}$ jako ciągowi $k^2$-elementowemu (dwuwskaźnikowemu) odpowiada siła uogólniona ${}^2\bar{Q}$. Wprowadza się ją następująco.

Niech będzie dana praca $\delta L$ sił czynnych ${}^2\bar{F}$ jako iloczyn

$$ \delta L = {}_{2|}\underline{{}^2\bar{F} \,//\, \delta^2\bar{y}}_{|}. \tag{7.6} $$

Przemieszczenie przygotowane

$$ \delta^2\bar{y} = \frac{\partial^2\bar{y}}{\partial^2\bar{q}} \,\underline{//}\, \delta^2\bar{q}, \tag{7.7} $$

czyli

$$\delta y_{11} = \frac{\partial y_{11}}{\partial q_{11}} \delta q_{11} + \ldots + \frac{\partial y_{11}}{\partial q_{kk}} \delta q_{kk},$$
$$\vdots$$
$$\delta y_{nn} = \frac{\partial y_{nn}}{\partial q_{11}} \delta q_{11} + \ldots + \frac{\partial y_{nn}}{\partial q_{kk}} \delta q_{kk}$$

jest różniczką przygotowaną funkcji ${}^2\bar{y}(x, {}^2\bar{q})$ przy ustalonym $x$.

Podstawienie związku (7.7) do (7.6) prowadzi do wyrażenia pracy elementarnej sił czynnych ${}^2\bar{F}$ przez dowolne przyrosty $\delta^2\bar{q}$ współrzędnych uogólnionych ${}^2\bar{q}$

$$\delta L = {}_{2}\underline{{}^2\bar{F} \,//\, \left[ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \,\underline{//}\, \delta^2 \bar{q} \right]} = {}_{2}\underline{{}^2\bar{Q} \,//\, \delta^2\bar{q}}\,. \tag{7.8}$$

**Definicja 14.** Współczynnik ${}^2\bar{Q}$ (ciąg dwuwskaźnikowy) przy $\delta^2\bar{q}$ wyrażający się wzorem

$${}^2\bar{Q} = {}^2\bar{F} \,\underline{//}\, \left[ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T, \tag{7.9}$$

d zie $T$ — symbol ciągu transponowanego, nazywamy siłą uogólnioną.

### 8. Dwuwskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju we współrzędnych niezależnych dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego

Równanie to wyprowadzimy z równania ogólnego dynamiki

$${}_{2}\underline{({}^2\bar{F} - {}^2\overline{EJ} \,//\, {}^2\bar{y}'') \,//\, \delta^2\bar{y}} = 0.$$

Praca $\delta L$ sił czynnych w układzie kartezjańskim

$$\delta L = {}_{2}\underline{{}^2\bar{F} \,//\, \delta^2\bar{y}}$$

we współrzędnych niezależnych ${}^2\bar{q}$ przyjmuje postać

$$\delta L = {}_{2}\underline{{}^2\bar{Q} \,//\, \delta^2\bar{q}},$$

gdzie według (7.9)

$${}^2\bar{Q} = {}^2\bar{F} \,\underline{//}\, \left[ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T.$$

Analogiczną postać ma praca $\delta_B L$ sił bezwładności

$$\delta_B L = -{}_{2}\underline{{}^2\bar{B} \,//\, \delta^2\bar{q}}, \tag{8.1}$$

gdzie we współrzędnych niezależnych

$${}^2\bar{B} = ({}^2\overline{EJ} \,//\, {}^2\bar{y}'') \,\underline{//}\, \left[ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T = \tag{8.2}$$
$$= \frac{d}{dx} \left\{ ({}^2\overline{EJ}\, {}^2\bar{y}') \,\underline{//}\, \left[ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T \right\} - ({}^2\overline{EJ} \,//\, {}^2\bar{y}') \,\underline{//}\, \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}}.$$

Ponadto stwierdzamy, że prędkość

$$(8.3)\qquad {}^2\overline{y}' = \frac{d}{dx}\,{}^2\overline{y}(x, {}^2\overline{q}) = \frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}}\,\underline{//}\,{}^2\overline{q}' + \frac{\partial^2\overline{y}}{\partial x}$$

jest funkcją liniową ${}^2\overline{q}'$. Wobec tego

$$(8.4)\qquad \frac{\partial^2\overline{y}'}{\partial^2\overline{q}'} = \frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}}.$$

Dodatkowo z (8.3) mamy

$$(8.5)\qquad \frac{\partial^2\overline{y}'}{\partial^2\overline{q}'} = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}}.$$

Jeśli bowiem

$${}^2\overline{y} = {}^2\overline{y}(x, {}^2\overline{q}),$$

to

$$\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}} = {}^2\overline{p}(x, {}^2\overline{q}),$$

czyli

$$\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}} = [\overline{p}_1(x, {}^2\overline{q}), \ldots, \overline{p}_n(x, {}^2\overline{q})]$$

i wtedy, analogicznie do (8.3), mamy

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}} = \frac{\partial^2\overline{p}}{\partial^2\overline{q}}\,\underline{//}\,{}^2\overline{q}' + \frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial^2\overline{q}}\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}}\,\underline{//}\,{}^2\overline{q}' + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial^2\overline{q}}.$$

Wobec powyższego po uwzględnieniu związków (8.4) i (8.5) równość (8.2) przyjmie postać

$$(8.6)\qquad {}^2\overline{B} = \frac{d}{dx}\left\{({}^2\overline{EJ}\,//\,{}^2\overline{y}')\,\underline{//}\left[\frac{\partial^2\overline{y}'}{\partial^2\overline{q}'}\right]^T\right\} - ({}^2\overline{EJ}\,//\,{}^2\overline{y}')\,\underline{//}\,\frac{\partial^2\overline{y}'}{\partial^2\overline{q}} =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{\partial\,{}_2\underline{{}^2\overline{T}}}{\partial^2\overline{q}'} - \frac{\partial\,{}_2\underline{{}^2\overline{T}}}{\partial^2\overline{q}} = \frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial^2\overline{q}'} - \frac{\partial T}{\partial^2\overline{q}},$$

gdzie $T$ jest energią kinetyczną

$$(8.7)\qquad T = \frac{1}{2}\,{}_2\underline{{}^2\overline{EJ}\,//\,({}^2\overline{y}')^2} = \frac{1}{2}\,{}_2\underline{{}^2\overline{T}}$$

dynamicznego układu stereomechanicznego, natomiast

$${}^2\overline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n1} & \ldots & T_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_{11}(y'_{11})^2, & \ldots, & E_{1n}(y'_{1n})^2 \\ \cdot\ \cdot & & \cdot \\ E_{n1}(y'_{n1})^2, & \ldots, & E_{nn}(y'_{nn})^2 \end{bmatrix}$$

przedstawia ciąg dwuwskaźnikowy energii kinetycznych tego układu.

Z równania ogólnego dynamiki mamy

$$\delta L + \delta_B L = 0, \tag{8.8}$$

lub po wykorzystaniu wyrażeń na prace

$$_{2|}\underline{({}^2\overline{Q} - {}^2\overline{B}) \,//\, \delta^2\overline{q}}_{|} = 0. \tag{8.9}$$

Równość ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy $\delta^2\overline{q}$ są równe zeru[7]). Zatem związek (8.9) jest równoważny równości

$$^2\overline{B} = {}^2\overline{Q},$$

która zgodnie z (8.6) może być zapisana w postaci

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial^2\overline{q}'} - \frac{\partial T}{\partial^2\overline{q}} = {}^2\overline{Q}. \tag{8.10}$$

Ostatnia równość nosi nazwę równań Lagrange'a drugiego rodzaju lub równań Lagrange'a we współrzędnych niezależnych (uogólnionych) dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego.

P r z y k ł a d. Wyprowadzić metodą Lagrange'a równania ruchu drgań swobodnych układu stereomechanicznego o $n^2$ stopniach swobody.

Przedstawimy przykład ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego dwuwskaźnikowego otrzymanego za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju wyprowadzonych w tej pracy.

Rozważmy jeden pręt sprężysty o sztywności

$$EJ = a_1 = \text{const}$$

poddany wyboczeniu siłą

$$P = a_2 = \text{const}.$$

W tym przypadku zerowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$a_1 y'' + a_2 y = 0$$

zwaną oscylatorem stereomechanicznym zerowskaźnikowym. Otrzymujemy je z zerowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

gdzie $T$ jest energią kinetyczną pręta.

Rozważmy następnie ciąg $n$ prętów sprężystych [2] usytuowanych na jednym odcinku i na przykład utwierdzonych sztywno jednym końcem. Swobodne końce są połączone sprężyście. Każdy pręt jest poddany wyboczeniu jedną siłą.

---

[7]) Wynika to stąd, że współrzędne niezależne ciągu dwuwskaźnikowego $^2\overline{q}$ mają zupełnie dowolne przyrosty $\delta^2\overline{q}$.

Jednowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$ {}^{2}_{1}\bar{a}\bar{y}''+{}^{2}_{2}\bar{a}\bar{y}=\bar{0}, $$

czyli

$$ {}_1a_{11}y''+\ldots {}_1a_{1n}y_n''+{}_2a_{11}y_1+\ldots+{}_2a_{1n}y_n=0, $$
$$ {}_1a_{n1}y_1''+\ldots+{}_1a_{nn}y_n''+{}_2a_{n1}y_1+\ldots+{}_2a_{nn}y_n=0, $$

którą nazywamy oscylatorem stereomechanicznym jednowskaźnikowym.

Otrzymujemy je z jednowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$ \frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial\bar{y}'}-\frac{\partial T}{\partial\bar{y}}=\bar{0}. $$

Oscylator stereomechaniczny dwuwskaźnikowy przedstawia równanie

$$ {}^4\overline{EJ}\,{}^2\bar{y}''+{}^4\bar{P}{}^2\bar{y}={}^2\bar{0}, $$

lub

$$ {}^4_1\bar{a}{}^2\bar{y}''+{}^4_2\bar{a}{}^2\bar{y}=\bar{0}, $$

gdzie

$$ {}^4\overline{EJ}=\begin{bmatrix} {}^2\overline{EJ}_{11}, & \ldots, & {}^2\overline{EJ}_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ {}^2\overline{EJ}_{n1}, & \ldots, & {}^2\overline{EJ}_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}E_{11}J_{11}\ldots E_{1n}J_{1n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ E_{n1}J_{n1}\ldots E_{nn}J_{nn}\end{bmatrix}_{11}, & \ldots, & \begin{bmatrix}E_{11}J_{11}\ldots E_{1n}J_{1n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ E_{n1}J_{n1}\ldots E_{nn}J_{nn}\end{bmatrix}_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \begin{bmatrix}E_{11}J_{11}\ldots E_{1n}J_{1n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ E_{n1}J_{n1}\ldots E_{nn}J_{nn}\end{bmatrix}_{n1}, & \ldots, & \begin{bmatrix}E_{11}J_{11}\ldots E_{1n}J_{1n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ E_{n1}J_{n1}\ldots E_{nn}J_{nn}\end{bmatrix}_{nn}\end{bmatrix}, $$

$$ {}^4_1\bar{a}={}^4\overline{EJ}=[(EJ)_{j_1j_2j_3j_4}], $$

$j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \ldots, n$ — ciąg czterowskaźnikowy współczynników sztywności (stałych), ${}^4_2\bar{a}={}^4\bar{P}=[P_{j_1j_2j_3j_4}]$ — ciąg czterowskaźnikowy sił obciążających (stałych).

Energia kinetyczna ${}_1T$ układu $n^2$-krotnego

$$ {}^2\bar{y}=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ y_{n1} & \cdots & y_{nn}\end{bmatrix} $$

wyraża się równością

$$ T_1=T_1[({}^2\bar{y}')^2]=\frac{1}{2}\left[{}_4\underline{{}^4\overline{EJ}({}^2\bar{y}')^2}\right], $$

gdzie

$$ ({}^2\bar{y}')^2=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}y_{11}'y_{11}'\ldots y_{11}'y_{1n}'\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ y_{11}'y_{n1}'\ldots y_{11}'y_{nn}'\end{bmatrix}, & \ldots, & \begin{bmatrix}y_{1n}'y_{11}'\ldots y_{1n}'y_{1n}'\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ y_{1n}'y_{n1}'\ldots y_{1n}'y_{nn}'\end{bmatrix}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \begin{bmatrix}y_{n1}'y_{11}'\ldots y_{n1}'y_{1n}'\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ y_{n1}'y_{n1}'\ldots y_{n1}'y_{nn}'\end{bmatrix}, & \ldots, & \begin{bmatrix}y_{nn}'y_{11}'\ldots y_{nn}'y_{nn}'\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ y_{nn}'y_{n1}'\ldots y_{nn}'y_{nn}'\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}({}^2\bar{y}_{11}')^2 & \ldots & ({}^2\bar{y}_{1n}')^2\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ ({}^2\bar{y}_{n1}')^2 & \ldots & ({}^2\bar{y}_{nn}')^2\end{bmatrix}, $$

natomiast

$$
{}_{4}\lfloor {}^{4}_{1}\bar{a}\,({}^{2}\bar{y}')^{2}_{1}\rfloor = {}_{2}\lfloor {}^{2}_{1}\bar{a}_{11}({}^{2}\bar{y}'_{11})^{2}_{1}\rfloor + \dots + {}_{2}\lfloor {}^{2}_{1}\bar{a}_{nn}({}^{2}\bar{y}'_{nn})^{2}_{1}\rfloor =
$$

$$
= {}_{1}a_{11_{11}}y'_{11}y'_{11} + \dots + {}_{1}a_{nn_{11}}y'_{11}y'_{nn} + \dots + {}_{1}a_{11_{nn}}y'_{nn}y'_{11} + \dots + {}_{1}a_{nn_{nn}}y'_{nn}y'_{nn},
$$

przy czym ${}^{4}_{1}\bar{a}({}^{2}\bar{y}')^{2}$ jest odpowiednio zbudowanym ciągiem czterowskaźnikowym energii kinetycznej dynamicznego układu stereomechanicznego $n^2$-krotnego.

Umawiamy się, że energię kinetyczną ${}_{1}T$ zapiszemy w postaci

$$
{}^{2}_{1}\bar{T} = \begin{bmatrix} {}_{1}T_{11} & \dots & {}_{1}T_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}_{1}T_{n1} & \dots & {}_{1}T_{nn} \end{bmatrix}
$$

ze względu na formalne podobieństwo do przekształcenia liniowego. W tym wzorze

$$
2\,{}_{1}T_{11} = {}_{1}a_{11_{11}}y'_{11}y'_{11} + \dots + {}_{1}a_{1n_{11}}y'_{11}y'_{1n} + \dots + {}_{1}a_{11_{1n}}y'_{11}y'_{n1} + \dots + {}_{1}a_{1n_{1n}}y'_{11}y'_{nn},
$$

$$
\vdots
$$

$$
2\,{}_{1}T_{nn} = {}_{1}a_{n1_{n1}}y'_{nn}y'_{11} + \dots + {}_{1}a_{nn_{n1}}y'_{nn}y'_{1n} + \dots + {}_{1}a_{n1_{nn}}y'_{nn}y'_{n1} + \dots + {}_{1}a_{nn_{nn}}y'_{nn}y'_{nn}.
$$

Mamy wtedy

$$
{}^{2}_{1}\bar{T} = \frac{1}{2}\left[{}_{2}\lfloor {}^{4}_{1}\bar{a}\,({}^{2}\bar{y}')^{2}_{1}\rfloor\right].
$$

Podobnie zapisujemy energię potencjalną układu

$$
{}^{2}_{3}\bar{T} = \frac{1}{2}\left[{}_{2}\lfloor {}^{4}\bar{P}({}^{2}\bar{y})^{2}_{1}\rfloor\right] = -\frac{1}{2}\left[{}_{2}\lfloor {}^{4}_{2}\bar{a}\,({}^{2}\bar{y})^{2}_{1}\rfloor\right].
$$

Energia całkowita układu jest sumą

$$
{}^{2}\bar{T} = {}^{2}_{1}\bar{T} + {}^{2}_{3}\bar{T},
$$

przy czym

$$
\frac{\partial^{2}\bar{T}}{\partial^{2}\bar{y}'} = \left[{}_{2}\lfloor {}^{4}_{1}\bar{a}\,{}^{2}\bar{y}'_{1}\rfloor\right],
$$

$$
\frac{\partial^{2}\bar{T}}{\partial^{2}\bar{y}} = -\left[{}_{2}\lfloor {}^{4}_{2}\bar{a}\,{}^{2}\bar{y}_{1}\rfloor\right].
$$

Ze względu na drgania swobodne ${}^{2}\bar{Q} = {}^{2}\bar{0}$.

Równania Lagrange'a (8.10) stanowią ciąg dwuwskaźnikowy — układ układów równań[8]). Wynikają one z odpowiedniego różniczkowania funkcji $T$ względem kolejnych zmiennych.

[8]) Są one słuszne również — jak wiadomo — w przypadku działania na układ sił posiadających potencjał, czyli przy uwzględnieniu energii potencjalnej.

Ten sam wynik otrzymamy wprowadzając pojęcie ciągu energii ${}^{2}\overline{T}$. Wtedy każda jego współrzędna przedstawia tylko tę energię układu, której pochodna względem odpowiednich współrzędnych nie jest równa zeru.

Pochdne pozostałych wskaźników są równe zeru.

Zauważmy, że ten sam wynik uzyska się po zdefiniowaniu pochodnej przekształcenia kwadratowego

$$\frac{\partial}{\partial y'_{11}}\left[\frac{1}{2}\,{}_{1}a_{11_{11}}y'_{11}y'_{11}+{}_{1}a_{1n_{11}}y'_{11}y'_{1n}+\ldots+{}_{1}a_{11_{1n}}y'_{11}y'_{n1}+\ldots+{}_{1}a_{1n_{1n}}y'_{11}y'_{nn}\right],$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{y'_{nn}}\left[{}_{1}a_{n1_{n1}}y'_{nn}y'_{11}+\ldots+{}_{1}a_{nn_{n1}}y'_{nn}y'_{1n}+\ldots+{}_{1}a_{n1_{nn}}y'_{nn}y'_{n1}+\ldots+\frac{1}{2}\,{}_{1}a_{nn_{nn}}y'_{nn}y'_{nn}\right],$$

skąd

$$\frac{\partial}{\partial y'_{11}}\,{}_{1}T_{11}={}_{1}a_{11_{11}}y'_{11}+\ldots+{}_{1}a_{1n_{11}}y'_{1n}+\ldots+{}_{1}a_{11_{1n}}y'_{n1}+\ldots+{}_{1}a_{1n_{1n}}y'_{nn},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial y'_{nn}}\,{}_{1}T_{nn}={}_{1}a_{11_{n1}}y'_{11}+\ldots+{}_{1}a_{nn_{n1}}y'_{1n}+\ldots+{}_{1}a_{n1_{nn}}y'_{n1}+{}_{1}a_{nn_{nn}}y'_{n1}+{}_{1}a_{nn_{nn}}y'_{nn}.$$

W ten sposób otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial^{2}\overline{y}'}\left[\frac{1}{2}\,{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,({}^{2}\overline{y}')^{2}\rfloor\right]=\left[{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,{}^{2}\overline{y}'\rfloor\right],$$

jeśli oznaczymy

$$\frac{\partial}{\partial^{2}\overline{y}'}\left[\frac{1}{2}\,{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,({}^{2}\overline{y}')^{2}\rfloor\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\,{}_{1}a_{11_{11}}y'_{11}y'_{11}+\ldots+{}_{1}a_{1n_{1n}}y'_{11}y'_{nn};\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots;\,{}_{1}a_{n1_{n1}}y'_{nn}y'_{11}+\ldots+\frac{1}{2}\,{}_{1}a_{nn_{nn}}y'_{nn}y'_{nn}\end{bmatrix}.$$

Będziemy pisali

$$\frac{\partial}{\partial^{2}\overline{y}'}\left[\frac{1}{2}\,{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,({}^{2}\overline{y}')^{2}\rfloor\right]=\left[{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,{}^{2}\overline{y}'\rfloor\right].$$

Wtedy

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\partial}{\partial^{2}\overline{y}'}\left[\frac{1}{2}\,{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,({}^{2}\overline{y}')^{2}\rfloor\right]=\left[{}_{2}\lfloor{}^{4}_{1}\overline{a}\,{}^{2}\overline{y}''\rfloor\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}{}_{1}a_{11_{11}}y''_{11}+\ldots+{}_{1}a_{1n_{1n}}y''_{nn};\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots;\,{}_{1}a_{n1_{n1}}y'_{11}+\ldots+{}_{1}a_{nn_{nn}}y''_{nn}\end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial^2\bar{y}'} = \left[{}_{2}{}^{4}_{1}\bar{a}\,{}^{2}\bar{y}''\right] = \left[\begin{array}{l} {}_1a_{11_{11}}\frac{d}{dx}y'_{11}+\ \dots\ +{}_1a_{1n_{1n}}\frac{d}{dx}y'_{nn};\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots;\ {}_1a_{n1_{n1}}\frac{d}{dx}y'_{11}+\ \dots\ +{}_1a_{nn_{nn}}\frac{d}{dx}y'_{nn} \end{array}\right];$$

$$\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial^2\bar{y}} = -\left[{}_{2}{}^{2}_{1}\bar{P}\,{}^{2}\bar{y}\right] = \left[\begin{array}{l} -P_{11_{11}}y_{11}+\ \dots\ +(-P_{1n_{1n}})y_{nn};\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots;\ -P_{n1_{n1}}y_{11}+\ \dots\ +(-P_{nn_{nn}})y_{nn} \end{array}\right].$$

Wobec powyższego z równości (8.10), danej ciągiem dwuwskaźnikowym, czyli układem

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial^2\bar{y}'} - \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial^2\bar{y}} = {}^{2}\bar{Q}$$

wynika układ równań różniczkowych

$$\begin{array}{r} {}_1a_{11_{11}}y''_{11}+\ \dots\ +{}_1a_{1n_{1n}}y''_{nn}+{}_2a_{11_{11}}y_{11}+\ \dots\ +{}_2a_{1n_{1n}}y_{nn} = 0, \\ \vdots\quad \\ {}_1a_{n1_{n1}}y''_{11}+\ \dots\ +{}_1a_{nn_{nn}}y''_{nn}+{}_2a_{n1_{n1}}y_{11}+\ \dots\ +{}_2a_{nn_{nn}}y_{nn} = 0, \end{array}$$

który zapiszemy w postaci

$$\begin{array}{r} {}^{2}_{1}\bar{a}_{11}\bar{y}''_1+\ \dots\ +{}^{2}_{1}\bar{a}_{1n}\bar{y}''_n+{}^{2}_{2}\bar{a}_{11}\bar{y}_1+\ \dots\ +{}^{2}_{2}\bar{a}_{1n}\bar{y}_n = \bar{0}, \\ \vdots\quad \\ {}^{2}_{1}\bar{a}_{n1}\bar{y}''_1+\ \dots\ +{}^{2}_{1}\bar{a}_{nn}\bar{y}''_n+{}^{2}_{2}\bar{a}_{n1}\bar{y}_1+\ \dots\ +{}^{2}_{2}\bar{a}_{nn}\bar{y}_n = \bar{0} \end{array}$$

lub

$${}^{4}_{1}\bar{a}\,{}^{2}\bar{y}''+{}^{4}_{2}\bar{a}\,{}^{2}\bar{y} = {}^{2}\bar{0}.$$

**Literatura cytowana w tekście**


1. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagadn. Drgań Nielin. (w druku).
2. R. KRZYWIEC, *Wyboczenie wielkiego systemu-układu wielowskaźnikowego prętów sprężystych jako ruchu przez analogię*, Arch. Bud. Masz. (w druku).
3. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako wielkich systemów*, Zagadn. Drgań Nielin. (w druku).
4. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mat. II Konf. Dynamiki Maszyn, Rzeszów 1969 (w druku).

Резюме

МЕХАНИКО-СТЕРЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ИНДЕКСАМИ

В работе дается обоснование механико-стереомеханической аналогии второго рода уравнений Лагранжа с двумя индексами, выведенных на языке стереомеханики без использования вариационного и тензорного исчислений.

Теоретические рассуждения подитожены их применением для вывода уравнений стереомеханического осциллятора. Таким образом указана также механико-стереомеханическая аналогия уравнений гармонического (математического) осциллятора. При рассмотрении вопроса были использованы последовательности с двумя и четыремя индексами.

Summary

MECHANICAL-ELASTIC ANALOGY IN THE CLASS OF TWO-INDEX LAGRANGE EQUATIONS OF SECOND KIND

The analogy has been derived without using the variational and tensor calculus.

Theoretical considerations are illustrated by their application to the derivation of the equations of a two-index elastic oscillator. This proves the mechanical-elastic analogy in the class of harmonic (mathematical) oscillator equations.

Multi-index series (2-index and 4-index in particular) have been used in the paper.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1969 r.*