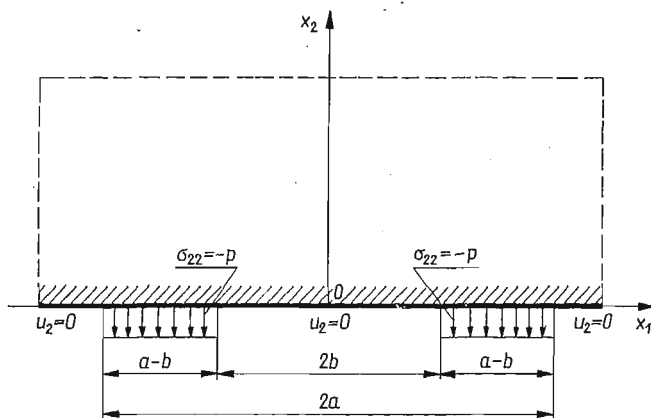


O PEWNYM PRZYPADKU PEŁZANIA PÓŁPŁASZCZYZNY
Z NIECIĄGŁYMI WARUNKAMI BRZEGOWYMI

ZBIGNIEW JAN PIEKARSKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [2] autorzy podali rozwiązanie problemu pełzania półpłaszczyzny przy nieciągłych warunkach brzegowych, odpowiadających zagadnieniu szczeliny Griffitha. Zagadnienie dwóch kolinearnych szczelin obciążonych stałym naprężeniem normalnym na gruncie teorii sprężystości rozpatrzył po raz pierwszy WILLMORE [4], stosując metodę funkcji zmiennej zespolonej. Następnie TRANTER [3] rozwiązał ponownie problem przy



Rys. 1

ogólniejszych założeniach (obciążenie normalne szczelin — dowolne), sprowadzając zadanie brzegowe do potrójnych równań całkowych, dla których znalazł ścisłe, zamknięte rozwiązanie.

W pracy niniejszej rozważymy półpłaszczyznę o brzegu wolnym od naprężeń stycznych σ_{12} , obciążoną symetrycznie na dwóch odcinkach brzegu naprężeniem normalnym $\sigma_{22} = \text{const}$; na pozostałej części brzegu dano przemieszczenie pionowe $u_2 = 0$ (rys. 1).

O materiale ośrodka zakładamy, że jest lepkosprężysty i podlega liniowej teorii pełzania ze starzeniem według ARUTUNIANA [1]. Związki fizyczne, w ogólności nieinwariantne względem chwili przyłożenia obciążenia, mają postać

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E(t)} (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) \dot{\delta}(t, \tau) d\tau, \quad ij = 1, 2,$$

gdzie ε_{ij} — składowe tensora odkształceń, σ_{ij} — składowe tensora naprężeń, δ_{ij} — symbol Kroneckera, $\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$, $\nu = \text{const}$ — współczynnik Poissona, $E(t)$ — moduł sprężystości, $C(t, \tau)$ — miara pełzania.

Rozważany problem brzegowy jest uogólnieniem wspomnianych zadań Willmora i Trantera na gruncie teorii pełzania. Może on znaleźć zastosowanie również w mechanice górotworu do analizy stanu naprężeń i odkształcenia w otoczeniu filara. Rozwiązanie podamy w oparciu o funkcję naprężeń Airy'ego i transformację całkową Fouriera. Mieszany problem brzegowy sprowadzimy do układu dwóch równań całkowych, dla których można podać ścisłe rozwiązanie zamknięte.

2. Ogólna metoda rozwiązania problemu

Jak wiadomo [1], płaskie zagadnienie teorii pełzania dla modelu ciała opisanego związkami (1.1) można zawsze sprowadzić do rozwiązania równania biharmonicznego dla funkcji naprężeń $F(x_1, x_2, t)$, które po wykonaniu cosinusowej transformacji całkowej Fouriera względem zmiennej x_1 , prowadzi do równania zwyczajnego

$$(2.1) \quad \frac{d^4 \tilde{F}}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \tilde{F}}{dx_2^2} + \alpha^4 \tilde{F} = 0$$

dla transformaty

$$\tilde{F}(\alpha, x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x_1, x_2) \cos \alpha x_1 dx_1.$$

Całka ogólna równania (2.1), po uwzględnieniu warunku, by dla $|x_2| \rightarrow \infty$ znikwały drugie pochodne funkcji naprężeń, przyjmuje postać

$$(2.2) \quad \tilde{F}(\alpha, x_2) = (A + B\alpha x_2) e^{-\alpha x_2}.$$

Naprężenia wyznaczmy ze znanych związków

$$\sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12},$$

które po wykonaniu transformacji odwrotnej dają

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [(2 - \alpha x_2)B - A] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A + B\alpha x_2] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{12} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [(1 - \alpha x_2)B - A] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu warunku brzegowego $\sigma_{12}(x_1, 0) = 0$ otrzymujemy $A = B$, skąd

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(1-\alpha x_2) \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(1+\alpha x_2) \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{12} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A \alpha^3 x_2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha. \end{aligned}$$

Dysponując naprężeniami (2.4), możemy z (1.1) wyznaczyć odkształcenia, a dalej ze związków

$$(2.5) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

— przemieszczenia, otrzymując

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha A(1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha + \\ &+ (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^{\infty} \alpha A(1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha \right\} \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + f_1(x_2), \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha A[2(1-\nu)+\alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha + \\ &- (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^{\infty} \alpha A[2(1-\nu)+\alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right\} \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + f_2(x_1). \end{aligned}$$

Funkcje $f_1(x_2)$ i $f_2(x_1)$, podobnie jak w teorii sprężystości, przyjmują postać odpowiadającą sztywnemu przemieszczeniu

$$f_1(x_2, t) = C^* x_2 + B^*, \quad f_2(x_1, t) = -C^* x_1 + D^*.$$

Po uwzględnieniu symetrii zadania otrzymujemy $C^* = B^* = 0$, skąd ostatecznie

$$(2.7) \quad f_1(x_2) = 0, \quad f_2(x_1, t) = D^*(t).$$

Wzory (2.4), (2.6) i (2.7) pozwalają na szczegółowe rozpatrzenie dalszych warunków brzegowych.

3. Problem brzegowy typu dwóch kolinearnych szczelin

Zgodnie z rys. 1 mamy

$$(3.1) \quad \text{dla } x_2 = 0 \quad \begin{cases} u_2 = 0, & x_1 < b; \\ \sigma_{22} = -p, & b < x_1 < a; \\ u_2 = 0, & x_1 > a. \end{cases}$$

Mieszany warunek brzegowy (3.1) zastąpimy formalnie warunkiem ciągłym, przemieszczeniowym

$$(3.2) \quad u_2 = g(x_1, t) = \begin{cases} 0, & x_1 < b; \\ v(x_1), & b < x_1 < a; \\ 0, & x_1 > a; \end{cases}$$

gdzie $v(x_1, t)$ jest nieznanym na razie przemieszczeniem, którego wartość wyznaczymy na podstawie (3.1)₂.

Sprawdzenie problemu (3.1) do (3.2) pozwala na bezpośrednie wyznaczenie parametru $A(\alpha)$ na drodze transformacji odwrotnej. W tym celu podstawiamy wyrażenie (2.6)₂ z uwzględnieniem (2.7) do warunku (3.2)

$$\frac{2(1-\nu^2)}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha - 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left[\int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha \right] \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + D^*(t) = \\ = g(x_1, t).$$

Oznaczając dla zwięzłości

$$(3.3) \quad 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha = \omega(x_1, t)$$

otrzymujemy

$$\frac{\omega(x_1, t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \omega(x_1, \tau) \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + D^*(t) = g(x_1, t)$$

i dalej

$$(3.4) \quad \omega(x_1, t) + \int_{\tau_1}^t \omega(x_1, \tau) [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau = E(t)[g(x_1, t) - D^*(t)].$$

Otrzymane równanie całkowe Volterry II rodzaju posiada rozwiązanie

$$(3.5) \quad \omega(x_1, t) = E(t)[g(x_1, t) - D^*(t)] - \int_{\tau_1}^t E(\tau)[g(x_1, \tau) - D(\tau)] R(t, \tau) d\tau,$$

w którym funkcja $R(t, \tau)$ stanowi rezolwentę jądra $\left[-E(t) \frac{\partial}{\partial t}(t, \tau) \right]$. Szczegółowe obliczenie tej rezolwenty podane było w pracy [2], w tym miejscu więc ograniczymy się jedynie do zacytowania gotowego wyniku

$$(3.6) \quad R(t, \tau) = -\gamma \left\{ [\dot{\varphi}(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] + \varphi(\tau) \left[\frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\varphi(\tau)E(\tau) \right] \right\} \times \\ \times \int_{\tau_1}^t E(\tau') e^{-\eta(\tau, \tau')} d\tau' + \left[\frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\varphi(\tau)E(\tau) \right]$$

słusznego dla funkcji $\delta(t, \tau)$ postaci (por. [1])

$$(3.7) \quad \delta(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + \varphi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}].$$

We wzorze (3.6) oznaczono

$$(3.8) \quad \eta^{(\tau, \tau')} = \gamma \int_{\tau}^{\tau'} [1 + \varphi(\theta)E(\theta)] d\theta.$$

Znając funkcję $\omega(x_1, t)$ [z (3.5)] obliczymy nieznaną wielkość $A(\alpha)$ z (3.3), mianowicie

$$\begin{aligned} 2(1-\nu^2)\alpha A &= \tilde{\omega}(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \omega(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 = \\ &= E(t) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(t) \delta(\alpha) \right] + \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x_1, \tau) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (3.2)

$$(3.9) \quad \begin{aligned} 2(1-\nu^2)\alpha A &= E(t) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^a v(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(t) \delta(\alpha) \right] + \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^a v(x_1, \tau) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

gdzie $\delta(\alpha)$ jest dystrybucją «delta» Diraca.

Otrzymany wynik, zawierający nieznaną dotąd funkcję $v(x_1, t)$ czyni zadość warunkom (3.1)_{1,3}. Podstawienie go do (3.1)₂ daje związek

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha \left\{ E(t) \left[\frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, t) \cos \alpha \zeta d\zeta - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \int_{\tau}^t \left[\frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, \tau) \cos \alpha \zeta d\zeta - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] \times \right. \\ \left. \times E(\tau) R(t, \tau) d\tau \right\} \cos \alpha x_1 d\alpha = -2(1-\nu^2)p, \end{aligned}$$

który po zmianie kolejności całkowania przybiera postać

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, t) E(t) \left(\int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha \zeta \cdot \cos \alpha x_1 d\alpha \right) d\zeta - E(t) D^*(t) \int_0^{\infty} \alpha \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha + \\ - \int_{\tau_1}^t \left[\frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, \tau) \left(\int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha \zeta \cdot \cos \alpha x_1 d\alpha \right) d\zeta \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{\tau_1}^t E(t) R(t, \tau) D^*(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \alpha \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha = 2(1-\nu^2)p. \end{aligned}$$

Drua i czwarta całka równe są zeru na podstawie własności dystrybucji «delta», oznaczając dalej

$$(3.10) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha \zeta \cdot \cos \alpha x_1 d\alpha = K(x_1, \zeta)$$

dochodzimy do układu równań całkowych

$$(3.11) \quad E(t) \int_b^a v(\zeta, t) K(x_1, \zeta) d\zeta = w(x_1, t),$$

$$w(x_1, t) - \int_{\tau_1}^t w(x_1, \tau) R(t, \tau) d\tau = -2(1-\nu^2)p,$$

z których pierwsze jest typu Fredholma I rodzaju, a drugie typu Voltery II rodzaju.

Rozwiązanie (3.11)₂ jest znane [2] i ma postać

$$(3.12) \quad w(x_1, t) = -2(1-\nu^2)pE(t)\delta(t, \tau_1).$$

Również jądro $K(x_1, \zeta)$ wyznaczyć można w postaci zamkniętej

$$(3.13) \quad K(x_1, \zeta) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x_1-\zeta)^2} + \frac{1}{(x_1+\zeta)^2} \right]$$

korzystając z rezultatów teorii dystrybucji. Zatem dla (3.11)₁ otrzymujemy

$$\int_b^a v(\zeta, t) \left[\frac{1}{(x_1-\zeta)^2} + \frac{1}{(x_1+\zeta)^2} \right] d\zeta = 4(1-\nu^2)p\delta(t, \tau_1).$$

Niewiadomą funkcję $v(\zeta, t)$ poszukiwać będziemy w postaci

$$(3.14) \quad v(\zeta, t) = V(\zeta)\delta(t, \tau_1).$$

Wtedy $V(\zeta)$ spełniać musi równanie

$$\int_b^a V(\zeta) \left[\frac{1}{(x_1-\zeta)^2} + \frac{1}{(x_1+\zeta)^2} \right] d\zeta = 4(1-\nu^2)p,$$

które po dwukrotnym scałkowaniu względem zmiennej x_1 przybierze postać

$$(3.15) \quad \int_b^a V(\zeta) \ln|x_1^2 - \zeta^2| d\zeta = -2(1-\nu^2)p x_1^2 + l x_1 + m;$$

tutaj l i m są stałymi dowolnymi.

Dokonując zmiany zmiennych

$$\zeta^2 = b^2 + s, \quad x_1^2 = b^2 + z,$$

otrzymujemy

$$\int_0^{a^2-b^2} W(s) \ln|z-s| ds = -(1-\nu^2)p(b^2+z) + \frac{l}{2} \sqrt{b^2+z} + \frac{m}{2},$$

gdzie

$$(3.16) \quad W(s) = \frac{V(\sqrt{b^2+s})}{\sqrt{b^2+s}}.$$

Po dalszej zmianie zmiennych

$$\frac{s}{a^2-b^2} = \zeta, \quad \frac{z}{a^2-b^2} = y$$

otrzymujemy równanie całkowe

$$(3.17) \quad \int_0^1 W(\zeta) \ln|y-\zeta| d\zeta = -(1-\nu^2)py + l' \sqrt{y(a^2-b^2)+b^2+m'}$$

rozwiązane przez Carlemana

$$W(\zeta) = \frac{A'}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \int_0^1 \left[\frac{-(1-\nu^2)p + \frac{l'}{2} \frac{a^2-b^2}{\sqrt{y(a^2-b^2)+b^2}}}{y-\zeta} \right] \sqrt{y(1-y)} dy,$$

gdzie A' i l' są stałymi zależnymi od l i m .

Wykonując całkowanie dostajemy dalej

$$(3.18) \quad W(\zeta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \left\{ A' + \left[-(1-\nu^2)p \frac{\pi}{2} (1-2\zeta) + \frac{l'}{2} (a^2-b^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^1 \frac{1}{y-\zeta} \sqrt{\frac{y(1-y)}{y(a^2-b^2)+b^2}} dy \right] \right\}.$$

Występującą tu całkę

$$I = \int_0^1 \frac{1}{y-\zeta} \sqrt{\frac{y(1-y)}{y(a^2-b^2)+b^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \int_0^1 \frac{y(1-y)}{y-\zeta} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}}, \quad d = \frac{b^2}{a^2-b^2},$$

możemy doprowadzić do postaci

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[- \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}} dy + (1-\zeta) \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}} + \right. \\ \left. + \zeta(1-\zeta) \int_0^1 \frac{1}{y-\zeta} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}} \right],$$

a po prostych przekształceniach i wprowadzeniu podstawień

$$k^2 = \frac{1}{1+d} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2; \quad n = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}; \quad y = 1 - \sin^2 \varphi$$

— do postaci

$$(3.19) \quad I = \frac{2}{a} \left[\left(\frac{1}{k^2} - \zeta \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \right. \\ \left. + \zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] = \frac{2}{a} \left[\left(\frac{1}{k^2} - \zeta \right) K(k) - \frac{1}{k^2} E(k) + \zeta \Pi(n, k) \right],$$

gdzie

$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ jest całką eliptyczną zupełną I rodzaju,

$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ jest całką eliptyczną zupełną II rodzaju,

$\Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2} - n, k\right)$ jest całką eliptyczną zupełną III rodzaju.

Wyrażenie $\zeta \Pi(n, k)$ przekształcić można dalej otrzymując

$$(3.20) \quad \zeta \Pi(n, k) = \frac{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}{\sqrt{1-k^2(1-\zeta)}} [K(k) E(\psi, k) - E(k) F(\psi, k)], \\ \psi = \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin \sqrt{1-\zeta}.$$

Podstawiając (3.20) do (3.19), a toż kolei do (3.18) otrzymamy

$$W(\zeta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \left\{ \left[A' - (1-\nu^2)p \frac{\pi}{2} + l' \frac{a^2-b^2}{a} \frac{K(k)-E(k)}{k^2} \right] + \right. \\ \left. - \zeta \left[-(1-\nu^2)p\pi + l' \frac{a^2-b^2}{a} K(k) \right] + l' \frac{a^2-b^2}{a} \frac{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}{\sqrt{1-k^2(1-\zeta)}} [K(k) E(\psi, k) + \right. \\ \left. - E(k) F(\psi, k)] \right\}.$$

Oznaczając

$$B' = A' - (1-\nu^2)p \frac{\pi}{2} + l' \frac{a^2-b^2}{a} \frac{K(k)-E(k)}{k^2}, \\ L = l' \frac{a^2-b^2}{a} K(k)$$

otrzymujemy

$$(3.21) \quad W(\zeta) = \frac{B' - \zeta(L - (1-\nu^2)p\pi)}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{L}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2(1-\zeta)}} \left[E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right].$$

Wracając do (3.16), wzór na $V(\zeta)$ przybiera postać

$$V(\zeta) = W(\zeta) \sqrt{b^2 + \zeta(a^2 - b^2)} = \sqrt{b^2 + \zeta(a^2 - b^2)} \left\{ \frac{B' - \zeta(L - (1 - \nu^2)p\pi)}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1 - \zeta)}} + \frac{L}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2(1 - \zeta)}} \left[E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right] \right\}.$$

Żądając regularności przemieszczenia $v(\zeta, t)$ należy usunąć osobliwości pierwszego wyrazu dla $\zeta = 0$ i $\zeta = 1$. Musi być wtedy

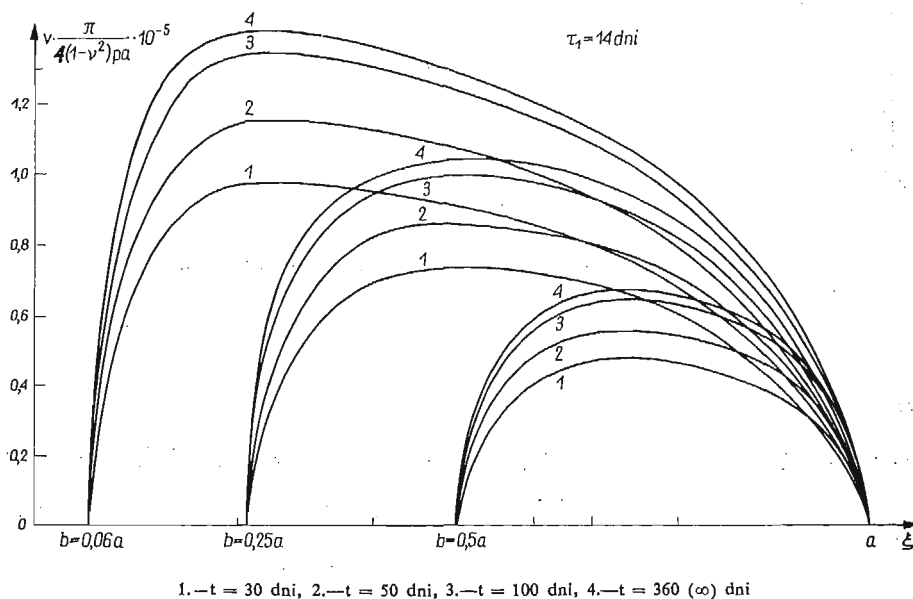
$$[B' - \zeta(L - (1 - \nu^2)p\pi)]_{\zeta=0}^{\zeta=1} = 0,$$

skąd

$$B' = 0, \quad L = (1 - \nu^2)p\pi.$$

Ostatecznie więc, po wstawieniu wartości współczynnika k

$$(3.22) \quad V(\zeta) = \frac{(1 - \nu^2)pa}{\pi} \left[E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right].$$



Rys. 2

Poszukiwana postać przemieszczenia na brzegu $v(\zeta, t)$ wynosi więc na podstawie (3.14)

$$(3.23) \quad v(\zeta, t) = \frac{(1 - \nu^2)pa}{\pi} \left[E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right] \delta(t, \tau_1).$$

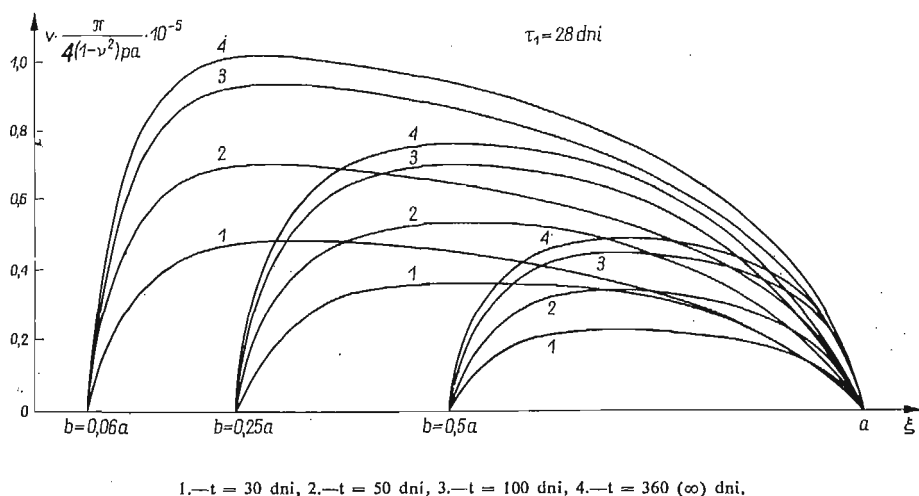
Dla przypadku sprężystego jest $\delta(t, \tau_1) = 1/E = \text{const}$ i otrzymujemy wynik zgodny z rezultatem Willmore'a.

Wzór (3.23) stanowi rozwiązanie postawionego problemu brzegowego. Dla ilustracji liczbowej wykonano przykład obliczeniowy przyjmując materiał Arutuniana—Masłowa o jądrze

$$(3.24) \quad \delta(t, \tau_1) = \frac{1}{E(\tau_1)} + \varphi(\tau_1)[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}],$$

gdzie

$$E(\tau_1) = E_0(1 - \beta e^{-\alpha\tau_1}), \quad \varphi(\tau_1) = C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}.$$



Rys. 3

Dla wartości parametrów

$$E_0 = 2 \cdot 10^5; \quad \beta = 1, \quad \alpha = 0,03; \quad C_0 = 0,90 \cdot 10^{-5}; \quad A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026$$

wieku materiału $\tau_1 = 14$ i $\tau_1 = 28$ dni oraz różnych wartości czasu t sporządzono wykresy przemieszczeń podane na rys. 2 i 3.

4. Zakończenie

Znając rozwiązanie problemu brzegowego wyrażone funkcją (3.23) możemy wyznaczyć parametr $A(\alpha)$ z (3.9), a stąd naprężenia i przemieszczenia w dowolnym punkcie półpłaszczyzny. Szczegółów tych obliczeń nie będziemy przytaczać z uwagi na ich podobieństwo z [2]. Warto zauważyć, że przeprowadzone rozważania nie ulegną zmianie, gdy szerokość

przedziału (b, a) będzie funkcją czasu: $a = a(t)$, $b = b(t)$. Wynika to stąd, że równanie całkowe (3.15) pozostanie słuszne dla każdej chwili t . Możemy więc napisać [w miejsce (3.23)]

$$v(\xi, t) = \frac{(1-\nu^2)pa(t)}{\pi} \left[E(\psi, k(t)) - \frac{E(k(t))}{K(k(t))} F(\psi, k(t)) \right] \delta(t, \tau_1), \quad k(t) = 1 - \left[\frac{b(t)}{a(t)} \right]^2.$$

Dalsze uogólnienie uzyskamy biorąc zmienne obciążenie $p = p(x_1)$. Bez żadnych zmian pozostaną wtedy obliczenia aż do (3.14) włącznie, a jedynie końcowy wynik spowodowany całkowaniem względem zmiennej x_1 [jak to widać z rozważań poprzedzających (3.15)] będzie inny. Jak już we wstępie wspomniano, wyniki pracy mogą znaleźć zastosowanie w teorii szczelin, mechanice górotworu, teorii konstrukcji i w innych dziedzinach nauk technicznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Х. Арутюнян, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва—Ленинград 1952.
2. Z. PIEKARSKI, G. SZEFER, *Pełzanie półpłaszczyzny przy mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos. (w druku).
3. C. J. TRANTER, *The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure*, Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1961.
4. T. J. WILLMORE, *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack*, Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 2, 53, 1949.

Р е з ю м е

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОЛУПЛОСКОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В статье рассмотрена ползучесть полуплоскости из вязко-упругого материала, подчиняющегося линейной теории старения Арутюняна, при смешанных граничных условиях. Дано точное решение задачи, с применением интегрального преобразования Фурье и элементов теории обобщенных функций. Работа может найти применение в теории трещин, механике горной породы и теории конструкции.

Summary

ON A CERTAIN CASE OF CREEP OF A HALF-PLANE
WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

The problem of creep of a semi-infinite plane made of a Arutunian-type visco-elastic material and subject to discontinuous boundary conditions has been considered. The exact closed-form solution is based on the application of Fourier transforms and the elements of the distribution theory. The results can be applied in the crack theory, rock mechanics and the theory of engineering structures.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 sierpnia 1969 r.
