

NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE W PÓŁPŁASZCZYŹNIE SPRĘŻYSTEJ O WZMOCNIONYM BRZEGU

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Zagadnienie wyznaczania naprężeń kontaktowych w półpłaszczyźnie sprężystej, której brzeg jest wzmocniony prętem, było przedmiotem rozważań kilku autorów. W pracach GIRKMANN, MARGUERRE'A, BIOTA, REISSNERA (por. [2]), rozpatrzono wpływ obciążenia pośredniego, które przekazywane jest poprzez pręt na półpłaszczyznę sprężystą. Ostatnio temat ten — z uwagi na zastosowania (blachownice), został podjęty przez SZERIEMIETJEW [6, 7], który zajmował się wyznaczaniem naprężeń w blachownicach o przekroju teowym i dwuteowym. W pracy ŁARKINA [5] rozpatrzono wpływ sił skupionych, przyłożonych w płaszczyźnie środkowej tarczy, na rozkład naprężeń kontaktowych występujących w miejscu połączenia tarczy z prętem. W pracy ARUTUNIANA [4] rozwiązano zagadnienie kontaktowe dla półpłaszczyzny, której brzeg jest wzmocniony prętem o skończonej długości. Rozwiązanie tego problemu sprowadzono do równania różniczkowo-całkowego typu Prandtla.

GODYCKI [3] podał przegląd prac dotyczących dźwigarów tarczowych z żebrami podporowymi. Przytoczono tam też analizę przydatności praktycznej wyników teoretycznych i doświadczalnych; przedstawiono aktualny stan omawianej problematyki ze szczególnym uwzględnieniem żelbetowych belek—ścian. Przegląd omawianej tutaj problematyki, lecz dla zagadnień termosprężystych, przedstawiono w pracy [1].

W niniejszej pracy rozwiązano zagadnienie wpływu momentu skupionego, leżącego w płaszczyźnie środkowej tarczy, na rozkład naprężeń kontaktowych występujących w miejscu połączenia tarczy z prętem. W zakończeniu pracy przytoczono przykład liczbowy.

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy półpłaszczyznę sprężystą

$$(2.1) \quad \mathcal{D} = \{(x, y): x > 0, -\infty < y < \infty\},$$

będącą powierzchnią środkową tarczy o grubości h , mającej moduł sprężystości E , której brzeg

$$(2.2) \quad \mathcal{C} = \{(x, y): x = 0, -\infty < y < \infty\}$$

połączony jest sprężycie z prętem; pręt ten ma przekrój F_1 i moment bezwładności I_1 ; jest też obciążony siłami poprzecznymi o intensywności $r(y)$. Przyjmować będziemy, że funkcja obciążenia $r(y)$ jest funkcją nieparzystą. Założymy dalej, że w punkcie $A(x_A = x_1, y_A = 0)$ przyłożony jest moment skupiony o wartości M , który jako para sił równoległych do osi y znajduje się w płaszczyźnie środkowej tarczy. Zadaniem naszym będzie wyznaczenie naprężeń kontaktowych, stycznych i normalnych, występujących w miejscu połączenia pręta z brzegiem tarczy. Przystępując do formalnego ujęcia występujących w zadaniu problemów brzegowych, określimy je następująco:

Pręt. Mamy wyznaczyć funkcje $u = u(y)$ i $v = v(y)$, kolejno klasy $C^{(4)}$, $C^{(2)}$, które przedstawiają współrzędne, odpowiednio w kierunku osi x i y , wektora przemieszczenia dowolnego punktu osi pręta połączonego z tarczą w sposób sprężysty. Funkcje te czynią zadość równaniom różniczkowym zagadnienia ściskania i zginania pręta prostego

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E_1 F_1 \frac{d^2 v}{dy^2} &= -s(y), \\ E_1 I_1 \frac{d^4 u}{dy^4} &= q(y) + r(y), \end{aligned}$$

gdzie występujące w równaniach (2.3) funkcje $s(y)$, $q(y)$ oznaczają kolejno obciążenie kontaktowe styczne i normalne występujące w przekroju tarczy $x = 0$ (brzeg tarczy).

Tarcza. Należy wyznaczyć funkcję $F = F(x, y)$, która w obszarze \mathcal{D} jest klasy $C^{(4)}$ i czyni zadość równaniu płaskiego stanu naprężenia

$$(2.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{y_0}^y Y(x, \tilde{y}) d\tilde{y}, \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{D},$$

a na brzegu \mathcal{C} jest funkcją klasy $C^{(5)}$ i czyni zadość (por. [6]) warunkom brzegowym postaci następującej

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dy^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right), \\ \frac{d^4 u}{dy^4} &= -\frac{1}{E} \left[(2 + \nu) \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y^2} \right], \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (2.4) i (2.5) symbole F , Y oznaczają, kolejno, funkcję naprężeń Airy'ego i współzrędną siły masowej. Tę ostatnią wielkość, zgodnie z naszym założeniem, przyjmiemy w postaci

$$(2.6) \quad Y = -P[\delta(x, x_1; y, 0) - \delta(x, x_1 + \Delta x; y, 0)].$$

W (2.6) symbolem $\delta(x, x_1; y, y_1)$ oznaczono deltę Diraca w punkcie o współrzędnych (x_1, y_1) .

Funkcja $F(x, y)$ powinna mieć taki przebieg, aby dla $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \pm \infty$ spełnione były warunki równowagi oraz aby funkcje naprężeń stycznych i normalnych zerowały się dla przekrojów tarczy w nieskończoności:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(y) dy, \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, \\ h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y dy &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(y) y dy + M \quad \text{dla } x \rightarrow \infty; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &\rightarrow 0, \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &\rightarrow 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \rightarrow 0 \quad \text{dla } y \rightarrow \pm \infty. \end{aligned}$$

Dla zupełności sformułowanych zagadnień brzegowych potrzebne są jeszcze warunki ciągłości rozwiązań na linii $x = 0$. Warunki te otrzymujemy z porównania zależności (2.3) i (2.5). W naszym przypadku mają one postać

$$(2.8) \quad \begin{aligned} s(y) &= -kh \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right), \\ \dot{q}(y) + r(y) &= -\kappa h \left[(2 + \nu) \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial x^2} \right], \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

W równaniu (2.8) przyjęto

$$(2.9) \quad k = \frac{E_1 F_1}{Eh}, \quad \kappa = \frac{E_1 I_1}{Eh}.$$

Warunki (2.8) wynikają z równań ciągłości przemieszczeń. Oprócz tych warunków, powinny być jeszcze spełnione równania ciągłości naprężeń na linii $x = 0$ $\left(\tau_{xy} = \frac{1}{h} s(y), \sigma_y = \frac{1}{h} q(y) \right)$.

Doprowadza to nas do zależności

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{h} s(y), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{1}{h} q(y), \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Jeżeli połączymy ze sobą warunki (2.8) i (2.10), to otrzymamy

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} - \frac{1}{k} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (2 + \nu) \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\kappa h} r(y), \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

W ten sposób problem został sprowadzony do zagadnienia brzegowego, polegającego na wyznaczeniu funkcji $F(x, y)$ czyniącej zadość równaniu (2.4) oraz warunkom (2.7) i

(2.11). Znajomość tej funkcji pozwoli obliczyć naprężenia kontaktowe, styczne i normalne, tj. naprężenia $s(y)$ i $q(y)$ [wzory (2.10)], a przy znanym rozkładzie obciążenia $r(y)$ — umożliwi wyznaczenie pola naprężeń w przecie. Jeżeli chodzi o określenie pola naprężeń w tarczy, to uzyskać to możemy drogą różniczkowania funkcji naprężeń $F(x, y)$. Z tego też względu tym zadaniem w pracy zajmować się nie będziemy.

3. Rozwiązanie zadania

Zgodnie z założeniem przyjmujemy, że jedynym obciążeniem działającym w płaszczyźnie środkowej tarczy są dwie siły skupione (2.6) działające w punktach $A(x_1, 0)$ i $B(x_1 + \Delta x, 0)$. Siły te są równoległe do osi y , mają te same wartości, lecz zwroty przeciwne. Przy budowaniu funkcji F wykorzystamy pewne rozwiązania znane dla płaszczyzny sprężystej. W przypadku bowiem, gdy działa siła $-P$, przyłożona w punkcie $A(x_1, 0)$, wówczas stan naprężenia i odkształcenia opisany jest funkcją (por. [2, 5])

$$(3.1) \quad F_A = -\frac{1+\nu}{4} \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \left[\beta(x_1 - x) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] e^{-\beta(x_1 - x)} \sin \beta y d\beta;$$

zatem dla siły P , działającej w punkcie $B(x_1 + \Delta x, 0)$, funkcja określona równaniem (3.1) przyjmie postać

$$(3.1') \quad F_B = \frac{1+\nu}{4} \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \left[\beta(x_1 + \Delta x - x) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] e^{-\beta(x_1 + \Delta x - x)} \sin \beta y d\beta.$$

W przypadku, gdy działa para sił $(-P, P)$, wówczas funkcja Airy'ego będzie sumą funkcji F_A i F_B . Jeżeli przyjmujemy określenia $M = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ P \rightarrow \infty}} P \Delta x$, a $F_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} (F_A + F_B)$, to otrzymamy ostatecznie

$$(3.2) \quad F_1 = -\frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} \left[\beta(x_1 - x) - \frac{2\nu}{1+\nu} \right] e^{-\beta(x_1 - x)} \sin \beta y d\beta.$$

Wprowadźmy do (3.2) następujące oznaczenia

$$(3.3) \quad a = -\frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} \left(\beta x_1 - \frac{2\nu}{1+\nu} \right) e^{-\beta x_1}, \quad b = \frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1};$$

wówczas (3.2) będziemy mogli zapisać w postaci

$$(3.2') \quad F_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} (a + \beta b x) e^{\beta x} \sin \beta y d\beta.$$

Ponieważ funkcja (3.2') jest rozwiązaniem dla przypadku tarczy nieskończonej, obciążonej momentem przyłożonym w punkcie $A(x_1, 0)$, przeto w rozpatrywanej przez nas tarczy pojawią się w przekroju $x = 0$ naprężenia normalne i styczne, które — ogólnie biorąc — nie będą równe naprężeniom kontaktowym. Otrzymałą więc całkę, którą dla

naszego zadania powinniśmy uważać za całkę szczególną równania niejednorodnego (2.4), należy uzupełnić całką ogólną równania jednorodnego. Przy tym wyborze kierować będziemy się kształtem funkcji (3.2). W przypadku obciążeń przyłożonych na brzegu, funkcja ta ma postać

$$(3.2'') \quad F_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} (c + \beta dx) e^{-\beta x} \sin \beta y d\beta,$$

w której występują dwie nieokreślone funkcje $c = c(\beta)$ i $d = d(\beta)$, odpowiednio do dwu warunków brzegowych (2.11), gdyż pozostałe warunki (2.7) są przy funkcjach typu (3.2) spełnione.

Ostatecznie, po dodaniu funkcji F_1 i F_2 otrzymamy funkcję naprężeń w postaci

$$(3.4) \quad F = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} [(a + \beta bx) e^{\beta x} + (c + \beta dx) e^{-\beta x}] \sin \beta y d\beta.$$

Obciążenie $r(y)$ przedstawimy w postaci całki Fouriera, dla funkcji nieparzystej; reprezentacja ta może być zapisana jako

$$(3.5) \quad r(y) = \int_0^{\infty} r(\beta) \sin \beta y d\beta,$$

gdzie

$$r(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r(\mu) \sin \beta \mu d\mu.$$

Podstawiając (3.4), (3.5) do warunków brzegowych (2.11), otrzymamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} -[1 + \beta k(1 + \nu)]c + (1 + 2\beta k)d &= -[1 - \beta k(1 + \nu)]a - (1 - 2\beta k)b, \\ [1 - \kappa\beta^3(1 + \nu)]c - [2 + \beta^3\kappa(1 - \nu)]d &= -[1 + \beta^3\kappa(1 + \nu)]a - [2 - \beta^3\kappa(1 - \nu)]b. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.6), uzyskamy

$$(3.7) \quad c = \frac{D_c}{D}, \quad d = \frac{D_d}{D},$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{aligned} D &= 1 + 2\beta\nu k + 2\beta^3\kappa + \beta^4\kappa k(3 + 2\nu - \nu^2), \\ D_c &= \frac{1 + \nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \left\{ \frac{4\pi r(\beta)}{(1 + \nu)M} (1 + 2\beta k) e^{\beta x_1} + 2 \frac{2 + 5\nu}{1 + \nu} - \beta \left(3x_1 + \frac{4k\nu^2}{1 + \nu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta^2 k x_1 \nu + 4\beta^3 \kappa \frac{\nu}{1 + \nu} - 2\beta^4 \kappa [x_1 + k(2 - 3\nu - \nu^2)] - \beta^5 \kappa \kappa x_1 (1 + \nu)^2 \right\}, \\ D_d &= \frac{1 + \nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \left\{ \frac{4\pi r(\beta)}{(1 + \nu)M} e^{\beta x_1} [1 + \beta k(1 + \nu)] + \frac{3 + 7\nu}{1 + \nu} + \right. \\ &\quad \left. - 2\beta(x_1 - k\nu) - 2\beta^3 \kappa + \beta^4 \kappa k(1 + \nu)(1 + 5\nu) - 2\beta^5 \kappa k x_1 (1 + \nu)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (2.10), (3.4), wyznaczmy funkcje naprężeń kontaktowych

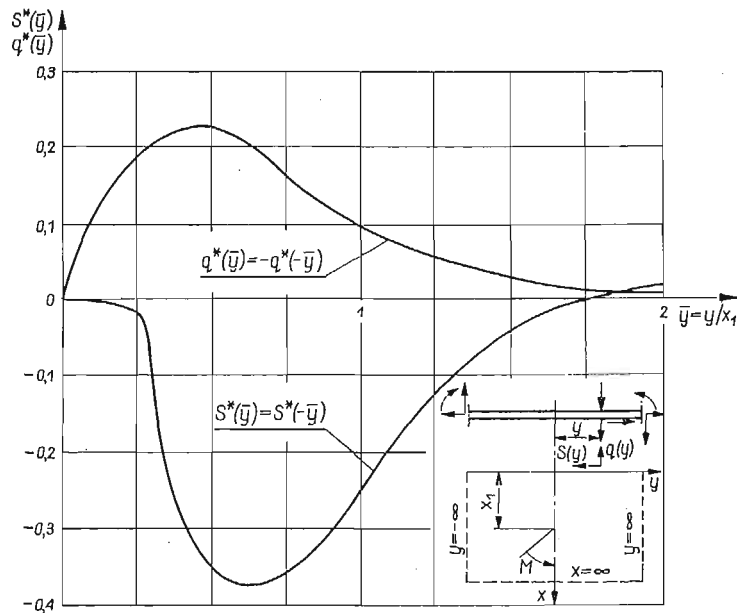
$$(3.9) \quad -\frac{1}{h} s(y) = \int_0^{\infty} (a+b-c+d)\beta \cos \beta y d\beta,$$

$$\frac{1}{h} q(y) = \int_0^{\infty} (a+2b+c-2d)\beta \sin \beta y d\beta.$$

W zakończeniu podamy jeszcze, dla ilustracji sposobu rozwiązania, przykład liczbowy, który został wykonany przy założeniu, że $\nu = k = \infty$. Na podstawie (3.7), (3.8) otrzymujemy

$$(3.9') \quad c = -\frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \frac{2-3\nu-\nu^2+\beta x_1(1+\nu)^2}{(1+\nu)(3-\nu)},$$

$$d = \frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \frac{1+5\nu-2\beta(1+\nu)x_1}{3-\nu},$$



Rys. 1

a po uwzględnieniu (3.3) i (3.9), uzyskujemy wzory określające naprężenia kontaktowe

$$(3.10) \quad s(y) = -\frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \beta (2-\beta x_1) e^{-\beta x_1} \cos \beta y d\beta,$$

$$q(y) = \frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{M\nu}{\pi} \int_0^{\infty} \beta \left(\frac{1-3\nu}{1+\nu} + \beta x_1 \right) e^{-\beta x_1} \sin \beta y d\beta.$$

По обчисленіу całек występуючых в (3.10), отржмем

$$(3.11) \quad \begin{aligned} s^*(\bar{y}) &\stackrel{\text{af}}{=} \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\pi}{M} \frac{x_1^2}{2} s(\bar{y}) = \frac{\bar{y}^2-3}{(1+\bar{y}^2)^3} \bar{y}^2, \\ q^*(\bar{y}) &\stackrel{\text{af}}{=} \frac{3-\nu}{\nu} \frac{\pi}{M} \frac{x_1^2}{8} q(\bar{y}) = \frac{1-\nu\bar{y}}{(1+\bar{y}^2)^3} \bar{y}, \end{aligned}$$

где чрез \bar{y} означено в (3.11) нову змінну, окреслену рівнянням $\bar{y} = y/x_1$. Выкресы напружень контактowych stycznых $s^*(\bar{y})$ і нормальных $q^*(\bar{y})$, будуче образом геометричезным функці (3.11), представіоно на рис. 1.

Література цытована в текіе

1. S BORKOWSKI, *Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965—1967)*, Mech. Teor. Stos., 2, 7 (1969), 107—153.
2. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1957.
3. T. GODYCKI, *Przegląd ważniejszych prac na temat dźwigarów tarczowych z żebrami podporowymi*, Arch. Inż. Łąd., 1/2, 15 (1969), 173—200.
4. Н. Х. АРУТУНЯН, *Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением*, Прикл. Мат. Мех., 4, 32 (1968), 632—646.
5. Ю. И. ЛАРКИН, *Напряженное состояние упругой полуплоскости с подкрепленным краем, наеруэенной сосредоточенной силой*, Изв. Вузов, Стр. Арх., 12, 10 (1967), 47—57.
6. М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ, *Пластинки с подкрепленным краем*, Львов 1960.
7. М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ, *Орпеделеніе напруэенного состояния тавровых и двутавровых балок методами плоской задачи теории упругости*, Прил. теории функции в мех. спл. среды, Москва 1965.

Резюме

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

В работе рассмотрена упругая полуплоскость, край которой упруго соединен со стержнем обладающим определенным сечением и моментом инерции. В дальнейшем принимается, что в некоторой точке полуплоскости действует сосредоточенный момент, который, рассматриваемый в качестве пары сил, действует в серединной плоскости диска. Приводятся решения задачи о контактных нормальных и касательных напряжениях, появляющихся на соединении стержня с краем диска. В заключение дается численный пример.

S u m m a r y

CONTACT STRESSES IN ELASTIC HALF-PLANE WITH STIFFENED
BOUNDARY

An elastic half-plane with the boundary elastically connected with a rod of a given crosssection is considered. At an arbitrary point of the half-plane a moment is applied. The pair of forces forming the couple is acting in the central plane. The solution for the contact shear and normal stresses acting along the surface between the strip with the half-plane. A numerical example is given.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1969 r.
