

ANALIZA PEWNEGO UKŁADU NIELINIOWEGO
PRZY WYMUSZENIU STOCHASTYCZNYM

WŁODZIMIERZ GAWRÓŃSKI (GDAŃSK)

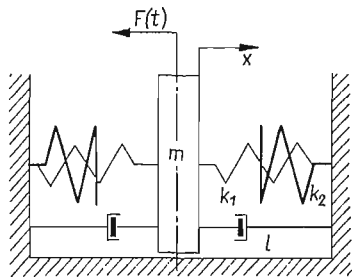
1. Opis układu

Schemat układu przedstawiono na rys. 1.

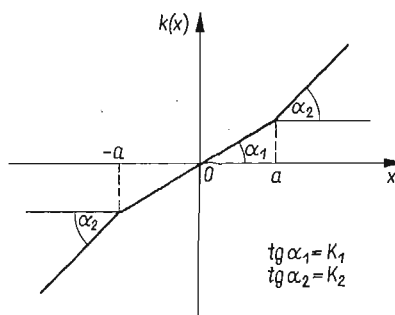
Jest to układ o jednym stopniu swobody, o współczynniku inercyjności m , współczynniku tarcia lepkiego l i sile sprężystości $k(x)$ danej związkami (1.1) (rys. 2)

$$(1.1) \quad k(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{dla } |x| \leq a \\ k_2 x + a(k_1 - k_2) & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

Charakterystyka sprężysta $k(x)$ jest nieparzysta. Dla $k_2 > k_1$ układ ma charakterystykę sztywną, dla $k_2 < k_1$ — miękką; gdy $k_2 = k_1$ układ jest liniowy.



Rys. 1



Rys. 2

Zakładamy, że siła wymuszająca $F(t)$ jest procesem stochastycznym typu «biały szum» o rozkładzie normalnym. Gęstość widmowa tego procesu wynosi

$$S(\omega) = S_0^* = \text{const},$$

zaś funkcja korelacyjna procesu dana jest związkiem

$$(1.2) \quad R^*(\tau) = 2\sigma^2\delta(\tau),$$

gdzie

$$\sigma^2 = \pi S_0^*$$

$\delta(\tau)$ — delta funkcja Diraca.

Wartość średnia procesu $F(t)$ jest równa zero

$$E[F(t)] \equiv 0.$$

Równanie stanu dynamicznego układu ma postać

$$(1.3) \quad m\ddot{x} + l\dot{x} + k(x) = F(t)$$

lub

$$(1.4) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + g(x) = f(t),$$

gdzie

$$2h = \frac{l}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m},$$

$$g(x) = \begin{cases} \omega_0^2 x & \text{dla } |x| \leq a \\ \omega_0^2 b^2 x + a\omega_0^2(1-b^2) & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, \quad b^2 = \frac{k_2}{k_1},$$

zaś gęstość widmowa procesu $f(t)$ jest

$$S_0 = \frac{S_0^*}{m^2}.$$

Równanie (1.4) możemy przedstawić za pomocą układu dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -2hv - g(x) + f(t). \end{aligned}$$

2. Charakterystyki probabilistyczne reakcji

Funkcja wymuszająca $f(t)$ jest stacjonarną, ciągłą funkcją losową, będącą zbiorem poszczególnych swych realizacji $\tilde{f}(t)$. Reakcja układu $x(t)$, zależna od własności dynamicznych układu oraz od wymuszenia, jest również zbiorem realizacji $\tilde{x}(t)$, odpowiadających realizacjom $\tilde{f}(t)$. Dla układów liniowych można znaleźć wzajemną odpowiedniość między $\tilde{x}(t)$ i $\tilde{f}(t)$ za pomocą liniowego funkcjonału charakteryzującego dany układ. Korzystając z zasady superpozycji można z dowolną dokładnością określić charakterystyki funkcji losowej $x(t)$. Ponieważ dla układów nieliniowych nie obowiązuje zasada superpozycji, tylko w nielicznych przypadkach można znaleźć pełne charakterystyki reakcji [jeśli układ opisany jest równaniem różniczkowym rzędu n -tego, to pełnym opisem reakcji układu będzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $n-1$ współrzędnych stanu $p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$].

Do nielicznych wyjątków należy stacjonarna reakcja układu na proces wymuszający typu «biały szum». W przypadku tym gęstość rozkładu współrzędnych stanu układu można znaleźć jako rozwiązanie cząstkowego równania różniczkowego, tzw. równania

Fokkera—Plancka. Dotychczas nie znaleziono rozwiązania tego równania dla przypadku, gdy układ znajduje się w stanie przejściowym.

Tak więc, jeżeli wymuszenie jest idealnym białym szumem, to funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa współrzędnych stanu x i $v = \frac{dx}{dt}$ dla układu nieliniowego określona jest równaniem Fokkera—Plancka ([4] s. 14).

Rozwiązaniem równania Fokkera—Plancka dla układu równań (1.5) jest funkcja [2, 3]

$$(2.1) \quad p(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{2h}{\sigma_1^2} \left[\frac{v^2}{2} + G(x) \right] \right\},$$

gdzie $\sigma_1^2 = \pi S_0$ — wariancja procesu $f(t)$, $G(x)$ — energia potencjalna układu

$$(2.2) \quad G(x) = \int_0^x g(u) du = \begin{cases} \omega_0^2 \frac{x^2}{2} & \text{dla } |x| \leq a \\ \omega_0^2 \frac{b^2}{2} \left[\left(x + a \frac{1-b^2}{b^2} \right)^2 - a^2 \frac{1-b^2}{b^4} \right] & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

oraz stała C określa się z warunku normowania

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dx dv = 1.$$

Uwzględniając (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$(2.4) \quad C^{-1} = 2\pi\sigma_0^2\omega_0 \left\{ \operatorname{erf}(s) + \frac{B}{b} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right] \right\},$$

gdzie

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0^2}, \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}\sigma_0}, \quad B = \exp\left(s^2 \frac{1-b^2}{b^2}\right).$$

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^s e^{-u^2} du.$$

Z równania (2.1) wynika, że gęstość rozkładu $p(x, v)$ można przedstawić w postaci

$$p(x, v) = Cp_1(x)p_2(v),$$

gdzie

$$p_1(x) = \exp\left[-\frac{2hG(x)}{\sigma_1^2}\right], \quad p_2(v) = \exp\left[-\frac{hv^2}{\sigma_1^2}\right],$$

a więc x i v są statystycznie niezależne.

Dla $|x| \leq a$ rozkład zmiennej losowej x jest normalny, dla $|x| > a$ rozkład prawdopodobieństwa x nie jest gaussowski.

Rozkłady graniczne wynoszą

$$(2.5) \quad p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 J} \exp\left[-\frac{G(x)}{\sigma_0^2\omega_0^2}\right],$$

$$(2.6) \quad p(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\omega_0} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_0^2\omega_0^2}\right],$$

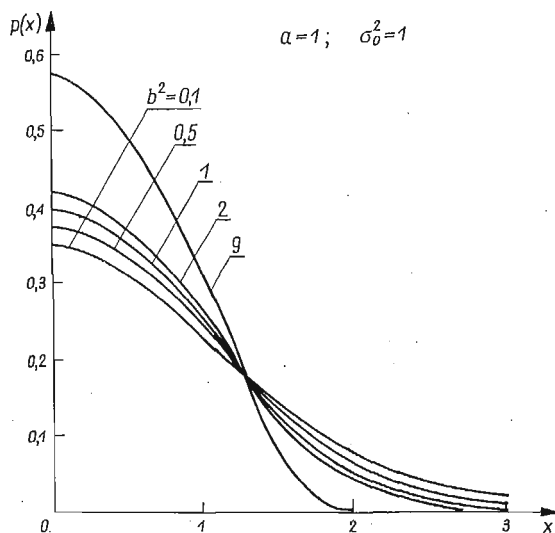
gdzie

$$J = \operatorname{erf}(s) + \frac{B}{b} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right].$$

Funkcja $p(v)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Wykres $p(x)$ dano na rys. 3.

Wariancja zmiennej losowej x wynosi:

$$(2.7) \quad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx.$$



Rys. 3

Zgodnie z (2.5) otrzymamy

$$(2.8) \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{J} \left\langle \operatorname{erf}(s) - \frac{2s}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) + \frac{B}{b^4} \left\{ \frac{2s}{\sqrt{\pi}} (2b^2 - 1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-\frac{s^2}{b^2}\right) + \frac{b^2 + 2s^2(1-b^2)^2}{b} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right] \right\} \right\rangle.$$

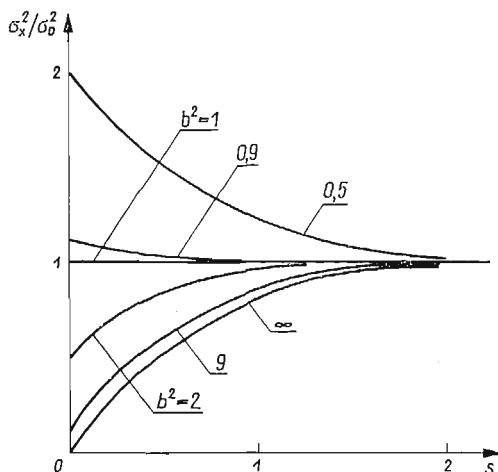
Wielkość σ_x jest dyspersją zmiennej x dla rozpatrywanego układu, σ_0 — dyspersją x dla układu liniowego. Wykres zależności (2.8) dano na rys. 4. Z wykresu rys. 4 widzimy, że dla $s > 2$, a więc $a > 2\sqrt{2}\sigma_0 = 2,82\sigma_0$ wariancja reakcji układu nieliniowego mało różni się od wariancji reakcji układu liniowego o charakterystyce sprężystej $k(x) = k_1x$. Wynika to z analizy krzywych gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej x (rys. 3): prawdopodobieństwo, że zmienna losowa x przyjmie wartości $x > 3$ jest bardzo małe (mniejsze niż 0,3%).

Wariancja zmiennej v wynosi

$$(2.9) \quad \sigma_v^2 = \omega_0^2 \sigma_0^2,$$

czyli jest równa wariancji v dla układu liniowego.

Obliczymy średnią częstość przekraczania przez układ poziomą $x = r$. Częstość tę oznaczmy ν_r^+ . Ponieważ dany poziom układ może przekraczać z dołu do góry lub z góry do dołu, wobec tego przyjmujemy, że za średnią częstość będziemy uważali ilość przejść



Rys. 4

w jednostce czasu z dołu do góry, a więc gdy $v > 0$. Założenie to uwzględnia indeks „+” w oznaczeniu ν_r^+ .

Wartość średnia częstości przekraczania przez układ poziomą $x = r$ z prędkością dodatnią dana jest związkiem [1,2]

$$(2.10) \quad \nu_r^+ = \int_0^{\infty} v p(r, v) dv.$$

Jeżeli przyjmiemy $r = 0$, wówczas związek (2.10) określa średnią wartość częstości układu, tj. średnią ilość przekraczania przez układ poziomą $x = 0$ w kierunku z dołu do góry ν_0^+ . Zgodnie z (2.10) i (2.1) otrzymujemy

$$(2.11) \quad \nu_r^+ = \frac{CS_0}{2h} \exp\left[-\frac{2hG(r)}{S_0}\right]$$

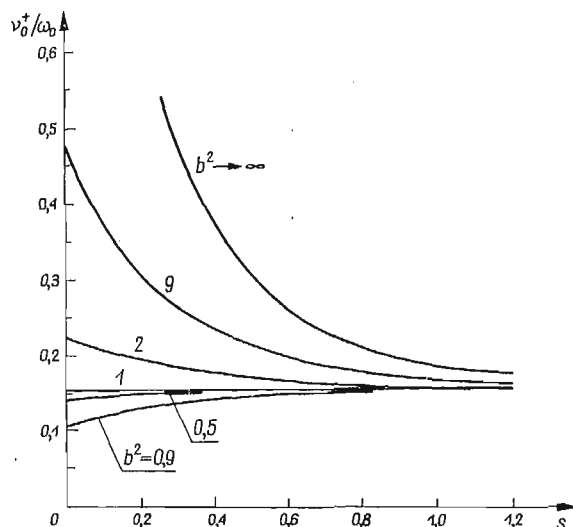
i

$$(2.12) \quad \nu_0^+ = \frac{\pi CS_0}{2h}.$$

Z (2.12) i (2.4) otrzymujemy

$$(2.13) \quad \frac{\nu_0^+}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi \left\{ \operatorname{erf}(s) + \frac{B}{b} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right] \right\}} = \frac{1}{2\pi J}.$$

Wykres zależności (2.13) dano na rys. 5. I tu widzimy, że dla dużych wartości s ($s > 2$) wartość średniej częstości drgań układu nieliniowego zbliża się do wartości częstości drgań układu liniowego z powodów wyżej wymienionych.



Rys. 5

Rozważania powyższe dotyczyły reakcji układu na wymuszenie stochastyczne typu «biały szum». Układy mechaniczne są filtrami dolnoprzepustowymi, wobec tego analiza powyższa jest słuszna również dla wymuszenia o funkcji gęstości widmowej dostatecznie gładkiej w zakresie niskich częstotliwości.

3. Stabilność techniczna układu

Analizę stabilności układu przeprowadzono w sensie technicznym [5]. Warunki stateczności są tu mniej silne od warunków stabilności asymptotycznej procesu stochastycznego (por. [4], s. 50—53; [6], s. 915, 916). Analiza techniczna stabilności w rozpatrywanym przypadku nie obejmuje zachowania się układu w procesie przejściowym, a tylko jego stan ustalony (ze względu na to, że nieznanne jest niestacjonarne rozwiązanie równania Fokkera—Plancka). Dla rozwiązań stacjonarnych warunki te są w wielu wypadkach dostatecznie dokładne [5].

Dany jest obszar Ω określony zależnością

$$(3.1) \quad \Omega \equiv \{|x| \leq \beta_1, |v| \leq \beta_2\}$$

gdzie β_1, β_2 — dane parametry.

Układ uważamy za stabilny technicznie, jeżeli zmienne losowe x i v należą do obszaru Ω z żądanym prawdopodobieństwem $1 - \varepsilon$, tzn. jeśli jest spełniony warunek

$$(3.2) \quad p[(x, v) \in \Omega] \geq 1 - \varepsilon,$$

gdzie ε — dana wartość, określająca wymagania dotyczące niezawodności układu.

Dla ułatwienia analizy stabilności, nieliniowe równanie różniczkowe układu (1.4) zastąpimy równaniem liniowym w postaci

$$(3.3) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_1^2 x = f(t),$$

gdzie ω_1^2 — zlinearyzowany współczynnik, wyznaczony z równości prac wykonanych przez siły sprężystości w układzie liniowym i nieliniowym, zgodnie ze wzorem

$$\int_0^{\beta_1} g(x) dx = G(\beta_1) = \frac{\omega_1^2}{2} \beta_1^2,$$

stąd

$$(3.4) \quad \omega_1^2 = \begin{cases} \omega_0^2 & \text{dla } |x| \leq a \\ \omega_0^2 \frac{b^2}{\beta_1} \left[\left(\beta_1 + a \frac{1-b^2}{b^2} \right)^2 - a^2 \frac{1-b^2}{b^4} \right] & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

Rozwiązanie równania Fokkera—Plancka dla układu liniowego (3.3), w stanie ustalonym ma postać

$$(3.5) \quad p(x, v) = C_1 \exp \left[-\frac{h}{\sigma_1^2} (v^2 + \omega_1^2 x^2) \right],$$

gdzie

$$\sigma_1^2 = \pi S_0, \quad C_1 = \frac{h\omega_1}{\pi\sigma_1}.$$

Mamy więc

$$(3.6) \quad p[(x, v) \in \Omega] = \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} \int_{-\beta_2}^{+\beta_2} p(x, v) dx dv.$$

Po podstawieniu (3.5) do (3.6) i odpowiedniej transformacji otrzymujemy

$$(3.7) \quad p[(x, v) \in \Omega] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \int_{-\eta_0}^{+\eta_0} \exp \left[-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right] d\xi d\eta,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \xi_0 = \frac{\beta_1}{\sigma_1} \omega_1 \sqrt{2h} \quad \eta_0 = \frac{\beta_2}{\sigma_1} \sqrt{2h}.$$

Dla danych ε , β_1 , β_2 i σ_1^2 należy dobrać parametry układu h i ω_0^2 tak, aby była spełniona nierówność (3.2). Jeżeli we wzorze (3.7) oznaczymy

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) d\xi,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta_0}^{+\eta_0} \exp \left(-\frac{\eta^2}{2} \right) d\eta,$$

wówczas warunek stabilności (3.2) przyjmie postać:

$$\Phi_1 \Phi_2 \geq 1 - \varepsilon.$$

Przykład. Przyjmijmy $\varepsilon = 0,02$. Wartości Φ_1 i Φ_2 wybieramy tak, aby spełniona była nierówność

$$(3.9) \quad \Phi_1 \Phi_2 \geq 0,98.$$

Na dwie wielkości niezależne został nałożony jeden warunek, wobec tego wybieramy jedną z nich dowolnie, względnie narzucamy dodatkowy warunek optymalizujący układ. Przyjmijmy więc

$$\Phi_2 \geq 0,9836,$$

wówczas

$$\Phi_1 \geq 0,9973.$$

Dla tych wartości Φ_1 i Φ_2 z tablicy otrzymujemy

$$\xi_0 \geq 3,00 \quad \eta_0 \geq 2,40.$$

Związki (3.7) i (3.8) dają

$$(3.10) \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1} \omega_1 \sqrt{2h} \geq 3,00,$$

$$(3.11) \quad \frac{\beta_2}{\sigma_1} \sqrt{2h} \geq 2,40.$$

Z porównania (3.4), (3.10) i (3.11) po przekształceniach otrzymujemy warunki stabilności technicznej układu

$$(3.12) \quad h \geq 9,04 \frac{S_0}{\beta^2},$$

$$(3.13) \quad \omega_0^2 \geq \begin{cases} 1,25 \frac{\beta_1}{\beta_2} & \text{dla } |x| \leq a \\ 1,25 \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2 \left[\left(\beta_1 + a \frac{1-b^2}{b^2} \right)^2 + a^2 \frac{1-b^2}{b^4} \right]} & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

Literatura cytowana w tekście

1. S. H. CRANDALL, *Random vibration of a nonlinear system with a set-up spring*, J. Appl. Mech., 29, 1962, 477—482.
2. *Случайные колебания*, ред. С. Крандалл, Москва 1967.
3. T. K. SAUGHEY, *On the response of a class of nonlinear oscillators to stochastic excitation*, Div. Eng. and Appl. Institute of Technology, Pasadena, California, June 1964, tłum. ros., Механика, Сб. пер., 1965.
4. А. А. Красовский, *Статистическая теория переходных процессов в системах управления*, Москва 1968.

5. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna maszyn wirnikowych przy wymuszeniach stochastycznych*, Sb. V Konf. Dynamika Stroju, Liblice 1968.
6. P. З. Хасминский, *Об устойчивости нелинейных стохастических систем*, ПММ, 30, вып. 5, 1966.

R e z y u m e

АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
СО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В работе исследована реакция нелинейной системы с кусочно линейной характеристикой при случайном возмущении типа «белый шум». С помощью уравнения Фоккера—Планка определена плотность распределения вероятности установившегося процесса; определена вариация перемещения и скорости и средняя частота колебаний системы.

Исследована устойчивость системы в техническом смысле [5] и для требуемой надежности системы определено множество её параметров. Определенная на этом множестве система технически устойчива.

S u m m a r y

ANALYSIS OF ONE CLASS NONLINEAR SYSTEM TO STOCHASTIC
EXCITATION

In the paper the response of the nonlinear system with the piecewise linear spring characteristic to stochastic excitation «white noise» is given. The probable density of the stationary process is determined by the Fokker—Planck partial differential equation. The variance of the displacement and the velocity as well as the mean frequency of the vibration of the system have been found.

The technical stability of the system [5] is analysed. The set of the parameters of the system for its given reliability have been found. The system determined for this set is technical stability.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1969 r.
