

WYZNACZENIE POLA TEMPERATURY I POLA STRUMIENIA CIEPLNEGO  
W PRZEGRODZIE WIELOWARSTWOWEJ  
PRZY HARMONICZNIE ZMIENNYM PRZEPLYWIE CIEPŁA

WŁADYSŁAW TOMCZAK, LUCJA BULZAK-MROZOWSKA (WROCLAW)

Ważniejsze oznaczenia

- $a$  współczynnik wyrównywania temperatury, [m<sup>2</sup>/s]  
 $ber_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $bei_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $c$  ciepło właściwe, [J/kg grd]  
 $i$  jednostka urojona  
 $ker_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $kei_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $q$  amplituda zespolona fali strumienia ciepłego, [W/m<sup>2</sup>]  
 $q(r, \tau)$  chwilowa wartość strumienia ciepłego, [W/m<sup>2</sup>]  
 $r$  współrzędna, [m]  
 $t$  amplituda zespolona fali temperatury, [°C]  
 $t(r, \tau)$  chwilowa wartość fali temperatury, [°C]  
 $A, B$  stałe całkowania  
 $F$  powierzchnia, [m<sup>2</sup>]  
 $M, N, P, Q$  patrz wzory (5) i (6) oraz tablica 2  
 $R$  współrzędna powierzchni ograniczającej warstwę przegrody złożonej, [m]  
 $V$  objętość, [m<sup>3</sup>]  
 $W$  opór cieplny [m<sup>2</sup> grd/W]  
 $\alpha$  współczynnik przejmowania ciepła, [W/m<sup>2</sup> grd]  
 $\lambda$  współczynnik przewodzenia ciepła, [W/m grd]  
 $\rho$  gęstość, [kg/m<sup>3</sup>]  
 $\tau$  czas, [s]  
 $\omega$  częstotliwość kątowna, [1/s]

Indeksy:

- $a$  dotyczy powierzchni napływu fali  
 $b$  dotyczy powierzchni odpływu fali  
 $k$  numer warstwy przegrody  $n$ -warstwowej

1. Wprowadzenie

Spośród wielu zagadnień związanych z niestalonym przewodzeniem ciepła, analiza przepływu fal temperatury i związanych z nimi fal strumienia ciepłego zasługuje na szczególną uwagę. Głównym powodem wyróżniającym ten problem spośród wielu innych jest fakt, że dowolną funkcję okresową, a więc także i temperaturę zmieniającą się okresowo w czasie możemy rozłożyć w szereg Fouriera, będący sumą harmonik o różnych ampli-

tudach, fazach i częstotliwościach kątowych. Tak więc harmoniczne fale temperatury są podstawowymi elementami, z których można zbudować funkcję wyznaczającą dowolną okresową zmianę temperatury.

Rozwiązania tego typu dla półprzestrzeni znaleźć można w pracy [6]. Znane są także rozwiązania dla przegród wielowarstwowych płaskich, cylindrycznych i oporów, podające związek pomiędzy amplitudami zespolonymi fal temperatury i strumienia ciepłego na powierzchniach ograniczających te przegrody [1]. W pracy [7] przeprowadzono analizę zagadnienia symetrii przepływu ciepła w płaskich przegrodach złożonych. Opracowanie [8] poświęcone jest wyznaczeniu ustalonych pól temperatury i strumienia ciepłego w przegrodach złożonych z wewnętrznymi źródłami ciepła. Brak jest dotychczas opracowań uwzględniających pojemności cieplne o zerowym oporze przewodzenia oraz wzorów wyznaczających chwilowe wartości temperatury i strumienia ciepłego w dowolnym  $r$ -tym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej. Niniejsza praca poświęcona jest rozwiązaniu tych właśnie zagadnień.

## 2. Równanie dla przegrody wielowarstwowej

Rozwiązanie równania przewodzenia ciepła

$$(2.1) \quad \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\beta - 1}{r} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} \right],$$

gdzie  $\beta = 1$  dla przegrody płaskiej,  $\beta = 2$  dla przegrody cylindrycznej i  $\beta = 3$  dla przegrody sferycznej, przy założeniu harmonicznie zmiennej temperatury w otoczeniu (lub na powierzchni  $r = R_0$ ) można przedstawić w postaci [1]

$$(2.2) \quad t(r, \tau) = [AE(r) + BF(r)] \exp i\omega\tau.$$

Po zastosowaniu do równania (2.2) prawa Fouriera

$$(2.3) \quad q(r, \tau) = -\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r}$$

otrzymamy wzór określający wartość strumienia ciepłego

$$(2.4) \quad q(r, \tau) = [AE_1(r) + BF_1(r)] \exp i\omega\tau.$$

Funkcje  $E(r)$ ,  $F(r)$ ,  $E_1(r)$ ,  $F_1(r)$  dla  $\beta = 1, 2, 3$  podane są w tabelcy 1. Symbole  $A$  i  $B$  oznaczają stałe całkowania.

Wyrażenia znajdujące się w nawiasach kwadratowych prawych stron równań (2.2) i (2.4) określają odpowiednio amplitudy zespolone fali temperatury i fali strumienia ciepłego. W dalszym ciągu operować będziemy amplitudami zespolonymi pomijając czynnik  $\exp i\omega\tau$  wymuszający okresowość zjawiska [1].

Przyjmując w równaniach (2.3) i (2.4)  $r = R_{a,1}$  możemy wyznaczyć stałe  $A$  i  $B$ . Po przeprowadzeniu przekształceń, amplitudy zespolone fali temperatury i fali strumienia ciepłego na powierzchni napływu tych fal możemy wyrazić poprzez amplitudy zespolone na powierzchni odpływu

$$(2.5) \quad t_{a,1} = M_1 t_{b,1} + N_1 q_{b,1},$$

$$(2.6) \quad q_{a,1} = P_1 t_{b,1} + Q_1 q_{b,1}.$$

Wielkości  $M$ ,  $N$ ,  $P$  i  $Q$  przedstawiono w tabelcy 2. Wskaźnik  $a$  dotyczy powierzchni napływu, a wskaźnik  $b$  — powierzchni odpływu fal.

Tablica 1. Funkcje równań (2.2) i (2.4)

	Przegroda płaska	Przegroda cylindryczna	Przegroda sferyczna
	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$
$E(r)$	$\operatorname{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$I_0\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{1}{r}\operatorname{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
$F(r)$	$\operatorname{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$K_0\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{1}{r}\operatorname{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
$E_1(r)$	$-\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\operatorname{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$-\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}I_0\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{\lambda}{r^2}\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\operatorname{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right) - \frac{\lambda}{r}\operatorname{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
$F_1(r)$	$-\lambda\operatorname{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}K_1\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{\lambda}{r^2}\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\operatorname{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right) - \frac{\lambda}{r}\operatorname{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
	$0 \leq r \leq R$	$R_a \leq r \leq R_b$	$R_a \leq r \leq R_b$

Tablica 2. Rzeczywiste i urojone części elementów macierzy różnego rodzaju warstw

	Przegroda płaska	Przegroda cylindryczna	Przegroda sferyczna	Opór	Pojemność	
	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	—	—	
	1	2	3	4	5	6
[0ε]	$\text{Re } M_k$	$ch d \cos d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\text{ber } z_a (\text{kei}_1 z_b - \text{ker}_1 z_b) +$ $+ \text{ber}_1 z_b (\text{kei } z_a + \text{ker } z_a) +$ $- \text{bei } z_a (\text{kei}_1 z_b + \text{ker}_1 z_b) +$ $- \text{bei}_1 z_b (\text{kei } z_a - \text{ker } z_a)]$	$\frac{1}{2R_b z} (\text{sh } h \cos b + \text{ch } h \sin h) +$ $+ \frac{R_a}{R_b} \text{ch } h \cos h$	1	1
	$\text{Im } M_k$	$sh d \sin d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\text{ber } z_a (\text{kei}_1 z_b + \text{ker}_1 z_b) +$ $+ \text{ber}_1 z_b (\text{kei } z_a - \text{ker } z_a) +$ $+ \text{bei } z_a (\text{kei}_1 z_b - \text{ker}_1 z_b) +$ $+ \text{bei}_1 z_b (\text{kei } z_a - \text{ker } z_a)]$	$\frac{1}{2R_b z} (\text{ch } h \sin h - \text{sh } h \cos h) +$ $+ \frac{R_a}{R_b} \text{sh } h \sin h$	0	0
	$\text{Re } N_k$	$-\frac{R}{2\lambda d} [\text{sh } d \cos d +$ $+ \text{ch } d \sin d]$	$\frac{R_b}{\lambda} [\text{bei } z_a \text{kei } z_b + \text{ber } z_b \text{ker } z_a +$ $- \text{ber } z_a \text{kei } z_b - \text{bei } z_b \text{ker } z_a]$	$-\frac{1}{\lambda z} \frac{R_a}{R_b} (\text{sh } h \cos h + \text{ch } h \sin h)$	$W$	0
	$\text{Im } N_k$	$\frac{R}{2\lambda d} [\text{sh } d \cos d +$ $- \text{ch } d \sin d]$	$\frac{R_b}{\lambda} [\text{ber } z_b \text{kei } z_a + \text{bei } z_b \text{ker } z_a +$ $- \text{ber } z_a \text{kei } z_b - \text{bei } z_a \text{ker } z_b]$	$\frac{1}{\lambda z} \frac{R_a}{R_b} (\text{sh } h \cos h - \text{ch } h \sin h)$	0	0

1	2	3	4	5	6
Re $P_k$	$\frac{\lambda}{R} d [\operatorname{sh} d \cos d +$ $- \operatorname{ch} d \sin d]$	$\lambda z_b^2 [\operatorname{ber}_1 z_b \operatorname{ker}_1 z_a + \operatorname{ber}_1 z_a \operatorname{ker}_1 z_b +$ $+ \operatorname{bei}_1 z_a \operatorname{kei}_1 z_b - \operatorname{bei}_1 z_b \operatorname{kei}_1 z_a]$	$\frac{\lambda}{R_b^2 z} (\operatorname{sh} h \operatorname{cosh} h + \operatorname{ch} h \sin h) +$ $+ \lambda z \frac{R_a}{R_b} (\operatorname{ch} h \sin h - \operatorname{sh} h \operatorname{cosh} h) +$ $- \frac{\lambda (R_b - R_a)}{R_b^2} \operatorname{ch} h \operatorname{cosh} h$	0	0
Im $P_k$	$-\frac{\lambda}{R} d [\operatorname{sh} d \cos d +$ $+ \operatorname{ch} d \sin d]$	$\lambda z_b^2 [\operatorname{ber}_1 z_b \operatorname{kei}_1 z_a + \operatorname{ber}_1 z_a \operatorname{ker}_1 z_b +$ $+ \operatorname{bei}_1 z_a \operatorname{ker}_1 z_b - \operatorname{bei}_1 z_b \operatorname{ker}_1 z_a]$	$\frac{\lambda}{R_b^2 z} (\operatorname{ch} h \sin h - \operatorname{sh} h \operatorname{cosh} h) +$ $- \lambda z \frac{R_a}{R_b} (\operatorname{ch} h \sin h + \operatorname{sh} h \operatorname{cosh} h) +$ $- \frac{\lambda (R_b - R_a)}{R_b^2} \operatorname{sh} h \sin h$	0	$\frac{V}{F}$
Re $Q_k$	$\operatorname{ch} d \cos d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\operatorname{ber} z_b (\operatorname{kei}_1 z_a - \operatorname{ker}_1 z_a) +$ $+ \operatorname{ber}_1 z_a (\operatorname{kei} z_b + \operatorname{ker} z_b) +$ $- \operatorname{bei} z_b (\operatorname{kei}_1 z_a + \operatorname{ker}_1 z_a) +$ $- \operatorname{bei}_1 z_a (\operatorname{kei} z_b - \operatorname{ker} z_b)]$	$\frac{R_a}{R_b} \operatorname{ch} h \operatorname{cosh} h - \frac{R_a}{R_b^2 z} (\operatorname{ch} h \sin h +$ $+ \operatorname{sh} h \operatorname{cosh} h)$	1	$\frac{F_h}{F_a}$
Im $Q_k$	$\operatorname{sh} d \sin d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\operatorname{ber} z_b (\operatorname{kei}_1 z_a + \operatorname{ker}_1 z_a) +$ $+ \operatorname{ber}_1 z_a (\operatorname{kei} z_b - \operatorname{ker} z_b) +$ $+ \operatorname{bei} z_b (\operatorname{kei}_1 z_a - \operatorname{ker}_1 z_a) +$ $+ \operatorname{bei}_1 z_a (\operatorname{kei} z_b - \operatorname{ker}_1 z_b)]$	$\frac{R_a}{R_b} \operatorname{sh} h \sin h - \frac{R_a}{R_b^2 z} (\operatorname{ch} h \sin h +$ $- \operatorname{sh} h \operatorname{cosh} h)$	0	0
	$d = R \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$	$z_a = R_a \sqrt{\frac{\omega}{a}}; \quad z_b = R_b \sqrt{\frac{\omega}{a}}$	$h = (R_b - R_a) \sqrt{\frac{\omega}{2a}}; \quad z = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$		

$R$  — grubość warstwy

$(R_b - R_a)$  — grubość warstwy

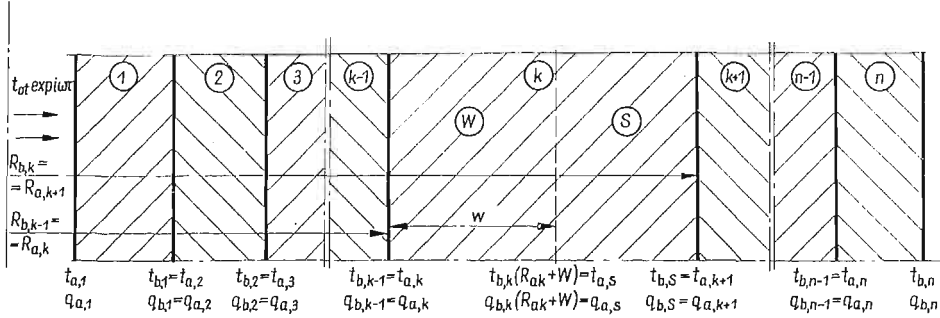
$(R_b - R_a)$  — grubość warstwy

Uwaga: Współczynniki w podanych w tablicy wzorach dotyczą warstwy  $k$ , ze względu na uproszczenie zapisu pominięto przy nich indeks  $k$ .

Układ równań (2.5), (2.6) przedstawić można w postaci macierzowej, [1, 2, 5]:

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} t_{a,1} \\ q_{a,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ P_1 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,1} \\ q_{b,1} \end{bmatrix}.$$

Wartości  $M_1, N_1, P_1, Q_1$  dla  $\beta = 1, 2, 3$  przedstawiono w tabelcy 2. Teorię funkcji Thomsona występujących w kolumnie 3 tej tabeli znaleźć można w pracy [3].



Rys. 1. Przegroda  $n$ -warstwowa

Jeżeli dana jest przegroda składająca się z  $n$  warstw, pomiędzy którymi nie ma oporu cieplnego, czyli kiedy spełnione są związki (rys. 1):

$$(2.8) \quad \left. \begin{aligned} t_{b,k} &= t_{a,k+1} \\ q_{b,k} &= q_{a,k+1} \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

to zależność pomiędzy amplitudami fal temperatury i strumienia na powierzchniach ograniczających tę przegrodę możemy przedstawić w postaci równania macierzowego

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} t_{a,1} \\ q_{a,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,n} \\ q_{b,n} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.10) \quad \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n \begin{bmatrix} M_k & N_k \\ P_k & Q_k \end{bmatrix}.$$

### 3. Macierzowe przedstawienie oporu

Jeżeli na styku dowolnej warstwy  $k$  i  $k+1$  istnieje opór cieplny  $W$ , to będziemy mieli

$$(3.1) \quad q_{b,k} = \frac{1}{W} [t_{b,k} - t_{a,k+1}]$$

oraz

$$(3.2) \quad q_{b,k} = q_{a,k+1}.$$

Po przekształceniach układ równań (3.1), (3.2) można zapisać w postaci macierzowej

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} t_{b,k} \\ q_{b,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{a,k+1} \\ q_{a,k+1} \end{bmatrix}.$$

Opór możemy zatem traktować jak warstwę, której pojemność cieplna równa jest zeru. Współczynniki macierzy tej warstwy są liczbami rzeczywistymi. Typowym przykładem takiej warstwy jest opór przy napływie fali temperatury na powierzchnię przegrody. Równy on jest odwrotności współczynnika przejmowania ciepła. Elementy macierzy warstwy — oporu przedstawione są w rubryce 5 tablicy 2.

#### 4. Macierzowe przedstawienie pojemności cieplnej

Niech będzie dana warstwa zbudowana z materiału o nieskończenie małym oporze przewodzenia ciepła. Przez powierzchnię  $F_1$  napływa na tę warstwę zmienny w czasie strumień ciepła  $q_1 \exp i\omega\tau$  powodując wzrost temperatury. Jednocześnie z powierzchni  $F_2$  odpyływa strumień  $q_2 \exp i\omega\tau$  powodując jej obniżenie. Z pewnym przybliżeniem za taką warstwę uważać możemy warstwę płynu, którego zmiany temperatury są stosunkowo wolne w czasie [6]. Bilans ciepły dla takiej warstwy przedstawiał się będzie następująco:

$$(4.1) \quad F_1 q_1 \exp i\omega\tau d\tau - F_2 q_2 \exp i\omega\tau d\tau = c_0 V dt(\tau),$$

gdzie  $V$  jest pojemnością warstwy. Przyjmujemy, że zmiany temperatury otoczenia na granicy z powierzchnią  $F_1$  mają charakter harmoniczny. Harmoniczne będą także zmiany temperatury w warstwie,

$$(4.2) \quad t(\tau) = t \exp i\omega\tau.$$

Oznaczając przez  $t_1$  amplitudę zespoloną fali temperatury na powierzchni  $F_1$ , a przez  $t_2$  amplitudę na powierzchni  $F_2$ , otrzymamy

$$(4.3) \quad t_1 = t_2 = t.$$

Po zróżniczkowaniu zależności (4.2) względem czasu i uwzględnieniu jej w równaniu (4.1) oraz po przeprowadzeniu działań otrzymamy

$$(4.4) \quad q_1 = ic_0\omega \frac{V}{F_1} t_2 + \frac{F_2}{F_1} q_2.$$

Układ równań (4.3), (4.4) można zapisać w postaci macierzowej

$$(4.5) \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ic_0\omega \frac{V}{F_1} & \frac{F_2}{F_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy dla warstwy — pojemności przedstawiono w kolumnie 6 tablicy 2.

W celu bliższego wyjaśnienia rozważań podanych w rozdziałach 3 i 4 posłużymy się następującym przykładem.

Warstwa  $k$  (rys. 1) przegrody  $n$ -warstwowej o pojemności  $V$  wypełniona jest płynem o ciepłe właściwym  $c_k$  i gęstości  $\rho_k$ . Współczynniki przejmowania ciepła na powierzchniach  $F_{a,k-1}$  i  $F_{b,k+1}$  wynoszą odpowiednio  $\alpha_{a,k-1}$  i  $\alpha_{b,k+1}$ .

Formalnie mamy tutaj do czynienia z połączeniem trzech warstw: oporem, pojemnością cieplną i oporem. Przypisując oporom kolejne numery  $k-1$  oraz  $k+1$  możemy, po wyko-

rzystraniu rozwiązań zawartych w rozdziale 3 i 4 napisać zależność pomiędzy amplitudami na powierzchniach stałych przegrody, ograniczającej warstwę płynu

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} t_{a,k-1} \\ q_{a,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_{a,k-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\omega c_k \varrho_k \frac{V_k}{F_{a,k-1}} & \frac{F_{b,k+1}}{F_{a,k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_{a,k+1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,k+1} \\ q_{b,k+1} \end{bmatrix}.$$

Dla przegrody płaskiej mamy  $F_2 = F_1$  i  $\frac{V_k}{F_{a,k-1}} = R_k$ , gdzie  $R_k$  jest grubością  $k$ -tej warstwy.

### 5. Analiza wzorów z tablicy 2

Wzory dla przegrody cylindrycznej i sferycznej podane w kolumnach 3 i 4 tablicy 2 przechodzą dla  $R_b > R_a \gg R_b - R_a$  we wzory dla przegrody płaskiej przedstawione w kolumnie 2 tejże tablicy.

Tak więc, przegrodę płaską (kolumna 2) możemy traktować jako szczególny przypadek przegród cylindrycznej i sferycznej. Ma on miejsce wtedy, kiedy mamy do czynienia z dużymi zmianami krzywizn. Z dobrą dokładnością możemy przyjąć, że ma to miejsce dla

$$R_a \sqrt{\frac{\omega}{2a}} > 3.$$

Przyjmując w zależnościach podanych w kolumnie 2, 3 i 4  $c\varrho = 0$ , czyli  $a = \lambda/c\varrho = \infty$ , przy przejściu do granicy otrzymamy zależności uwidocznione w kolumnie 5. Jest to zupełnie zrozumiałe, ponieważ założenie  $c\varrho = 0$  oznacza, że pojemność cieplna przegrody jest równa zero, a więc mamy do czynienia tylko z oporem. Wreszcie przyjmując, że opór cieplny jest równy zero, czyli że  $\lambda = \infty$  po wyznaczeniu granic z zależności przedstawionych w kolumnach 2, 3, 4 otrzymamy związki dla pojemności przedstawione w kolumnie 6.

Opór i pojemność cieplna są zatem szczególnymi przypadkami warstw opisanych wzorami w kolumnach 2, 3 i 4.

### 6. Wyznaczenie chwilowej wartości temperatury i strumienia cieplnego w dowolnym punkcie przegrody wielowarstwowej

Związek pomiędzy amplitudami na wejściu i wyjściu w przegrodzie wielowarstwowej określony jest równaniem (2.9). Może być to przegroda składająca się z oporów, pojemności i warstw spełniających równanie Fouriera przewodzenia ciepła. Spośród czterech amplitud zespolonych:  $t_{s,1}$ ,  $q_{a,1}$ ,  $t_{b,n}$  i  $q_{b,n}$  wystarczy znać dwie, żeby za pomocą wzoru (2.9) wyznaczyć dwie pozostałe. Znajomość dwóch amplitud jest równoznaczna ze znajomością dwóch warunków brzegowych, a wyznaczenie pozostałych amplitud za pomocą zależności (2.9) uwzględni wpływ własności materiału wszystkich warstw na ich wartości. Możemy zatem przyjąć, że znamy wartości  $t_{b,n}$ ,  $q_{b,n}$ .



Wykorzystując to stwierdzenie wyznaczmy wzór określający amplitudy zespolone fali temperatury i fali strumienia ciepłego w dowolnym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej.

Podzielmy umownie  $k$ -tą warstwę na dwie warstwy zbudowane z tego samego materiału, ograniczone powierzchniami o współrzędnych  $R_{b,k-1} = R_{a,w}$ ;  $R_{b,w} = R_{a,w+w}$  oraz  $R_{b,w} = R_{a,s}$ ;  $R_{b,s} = R_{a,k+1}$ , gdzie (rys. 1)

$$R_{a,k} \leq w \leq R_{a,k+1}.$$

Amplitudy zespolone na powierzchni  $R_{a,k}+w = R_{b,w} = R_{a,s}$  będą równe

$$(6.1) \quad \begin{bmatrix} t_k(R_{b,w}) \\ q_k(R_{b,w}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_w & N_w \\ P_w & Q_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,n} \\ q_{b,n} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(6.2) \quad \begin{bmatrix} M_w & N_w \\ P_w & Q_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(R_{a,k}+w) & N(R_{a,k}+w) \\ P(R_{a,k}+w) & Q(R_{a,k}+w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k+1} & N_{k+1} \\ P_{k+1} & Q_{k+1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} M_n & N_n \\ P_n & Q_n \end{bmatrix}.$$

Z zależności (6.1), po uwzględnieniu członu  $\exp i\omega\tau$  wymuszającego okresowość zjawiska, wyznaczmy wzory określające chwilowe wartości fali temperatury i fali strumienia ciepłego w dowolnym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej:

$$(6.3) \quad t_k(R_{b,w}, \tau) = [(M_w t_{b,n} + N_w q_{b,n})] \exp i\omega\tau,$$

$$(6.4) \quad q_k(R_{b,w}, \tau) = [(P_w t_{b,n} + Q_w q_{b,n})] \exp i\omega\tau.$$

Zazwyczaj znamy wartości amplitud na obu powierzchniach przegrody złożonej. Jest to równoznaczne, w ujęciu macierzowym, ze znajomością warunków brzegowych pierwszego lub trzeciego rodzaju.

Po wyznaczeniu z równania (2.9) wartości  $q_{b,n}$ , wstawieniu jej do wzorów (6.3) i (6.4) i wykonaniu przekształceń otrzymamy związek określający amplitudy zespolone fali temperatury i strumienia ciepłego w dowolnym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej, jako funkcje amplitud temperatury na powierzchniach ograniczających tę przegrodę,

$$(6.5) \quad t_k(R_{b,w}, \tau) = \left[ \left( M_w - \frac{N_w}{N} M \right) t_{b,n} + \frac{N_w}{M} t_{a,1} \right] \exp i\omega\tau,$$

$$(6.6) \quad q_k(R_{b,w}, \tau) = \left[ \left( P_w - \frac{Q_w}{N} M \right) t_{b,n} + \frac{Q_w}{N} t_{a,1} \right] \exp i\omega\tau.$$

Znając amplitudy zespolone zawarte w nawiasach kwadratowych prawych stron równań (6.5) i (6.6) bez trudu wyznaczmy amplitudy rzeczywiste oraz przesunięcia faz fali temperatury i strumienia ciepłego.

## 7. Wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono metodę wyznaczania pola temperatury i pola strumienia ciepłego w wielowarstwowych przegrodach płaskich, cylindrycznych i sferycznych przedzielanych oporami i pojemnościami cieplnymi, przy założeniu harmonicznej zmiany temperatury na powierzchniach napływu. Stosując rozwinięcie w szereg Fouriera

można za pomocą przedstawionej metody wyznaczyć pole temperatur i pole strumienia ciepłego w przegrodach wielowarstwowych przy założeniu dowolnej okresowej zmiany temperatury na jednej z jej powierzchni. Obliczenia te wykorzystać można przy założeniu warunków brzegowych pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju, a także przy założeniu mieszanych warunków brzegowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARLSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959.
2. T. CHOLEWICKI, *Analiza obwodów elektrycznych*, WNT, Warszawa 1962.
3. N. W. MC LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
4. L. BULZAK-MROZOWSKA, *Analiza przepływu fal temperatury i fal strumienia ciepłego w płaskich przegrodach jedno- i wielowarstwowych*, praca doktorska, Wrocław 1969.
5. L. A. PIPES, *Zastosowanie rachunku macierzowego w technice. Nowoczesna matematyka dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1962.
6. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
7. W. TOMCZAK, L. BULZAK-MROZOWSKA, *Wyznaczenie tłumienia fali temperatury w wielowarstwowych ścianach osłonowych*, Arch. Inż. Łąd., 1/XIV, Warszawa 1968.
8. W. TOMCZAK, *Macierzowa analiza ustalonego pola temperatury w przegrodach wielowarstwowych z wewnętrznymi źródłami ciepła*, Arch. Bud. Masz., 4, 1969.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И ПОЛЯ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА В МНОГОСЛОЙНОЙ СТЕНКЕ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПО ГАРМОНИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ ТЕПЛОМ Потоке

В работе приводится метод определения мгновенных значений температуры и теплового потока в произвольной  $n$ -ной точке  $k$ -того слоя  $n$ -слойной стенки, в предположении, что температура изменяется по гармоническому закону. Этот метод дает возможность получения решений для многослойных плоских, цилиндрических и сферических стенок, в предположении краевых условий первого, второго и третьего рода, а также смешанных краевых условий. Приводится расчетная схема учитывающая термическое сопротивление на контакте между слоями, а также присутствие слоев с нулевым термическим сопротивлением и отличной от нуля теплоемкостью.

#### Summary

#### DETERMINATION OF THE TEMPERATURE AND HEAT FLUX FIELD IN A MULTI-LAYER DIAPHRAGM AT HARMONIC HEAT FLOW

The paper presents a method of determination of the values of temperature and heat flux at an arbitrary point of the  $k$ -th layer of a  $n$ -layer diaphragm under the assumptions that the temperature varies harmonically. The presented method applies to plane, cylindrical and spherical multi-layer diaphragms with boundary conditions of the 1st, 2nd and 3rd kind or mixed. The proposed procedure takes into consideration the thermal resistance between the layers as well as the layers with vanishing resistance and a definite heat capacity.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1969 r.