

ZASTOSOWANIE METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO OBLICZEŃ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH USTROJÓW OKRĘTOWYCH*

JAN KRUSZEWSKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

Do podstawowych problemów przy projektowaniu nowoczesnych ustrojów okrętowych należy zaliczyć zmniejszanie drgań kadłuba oraz zmniejszanie hałasu w pomieszczeniach, w których przebywają pasażerowie i załoga. Stały wzrost wymagań armatorów dotyczących komfortowych warunków odbywania podróży statkami sprawia, że wspomniane problemy nabierają coraz większego znaczenia.

Głównymi źródłami drgań i hałasów na statku są takie urządzenia, jak zespoły prądotwórcze, sprężarki, pompy itp. oraz śruba napędowa. W ostatnich latach pojawiło się wiele rozwiązań konstrukcyjnych mających na celu zmniejszenie drgań i hałasów pochodzących od wspomnianych źródeł. Do ciekawszych rozwiązań wprowadzanych ostatnio można zaliczyć tak zwane platformy «pływające» i wał śrubowy typu Grima.

Platforma «pływająca» umieszczana jest na podkładkach gumowych najczęściej w maszynie. Do tej platformy mocowane są urządzenia okrętowe, również za pomocą podkładek gumowych. Uzyskuje się w ten sposób dwustopniowe mocowanie sprężyste, co w rozwiązaniach rzeczywistych może powodować zmniejszenie nawet o 40 dB drgań akustycznych rozprzestrzeniających się drogą strukturalną na kadłub.

Wał śrubowy typu Grima należy do tak zwanych wałów elastycznych. Jego parametry dobiera się tak, aby poza pierwszą postacią drgań giętnych, kilka następnych posiadało amplitudy drgań własnych w miejscu zamocowania śruby napędowej w przybliżeniu równe zero. Pierwsza postać giętnych drgań własnych ma częstość znacznie mniejszą od istniejących częstości wymuszeń, natomiast pozostałe nie mogą być wzbudzone, ponieważ amplituda drgań własnych w miejscu przyłożenia siły wymuszającej jest prawie równa zero. Tego rodzaju rozwiązanie całkowicie eliminuje w praktyce najgroźniejsze źródło wymuszeń na statku, jakim jest śruba napędowa.

Oba rozwiązania wymagają podczas konstruowania wielokrotnego obliczenia kilku, a niekiedy nawet kilkunastu częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań. Są to układy złożone, w związku z czym tradycyjne metody obliczeń są dla potrzeb biur projektowych zbyt pracochłonne i trudne.

* III nagroda na Ogólnopolskim Konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Warszawski PTMTS w 1970 r.

Celem niniejszej pracy jest opracowanie takiej metody, za pomocą której obliczenia częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań, nawet dla bardzo złożonych układów o wielu stopniach swobody, mogłyby być przeprowadzane szybko, a proces obliczeń był możliwie najprostszy. Pomyślano również o tym, aby opracowany algorytm nadawał się do łatwego zaprogramowania na elektroniczne maszyny cyfrowe.

Wspomniane na wstępie rozwiązania konstrukcyjne stanowią przykłady zastosowania metody przedstawionej w niniejszej pracy. Metoda ta polega na zastąpieniu rzeczywistego ustroju ustrojem złożonym z nieodkształcalnych brył, nazwanych sztywnymi elementami skończonymi (SES), połączonych ze sobą i z ostoją nieważkimi elementami sprężystymi o charakterystykach liniowych. Ustroje, w których masa rozłożona jest w sposób ciągły, zastępuje się pomyślanymi elementami sztywnymi i pomyślanymi elementami sprężystymi. Współczynniki sztywności takich elementów obliczane są z prostych zależności wytrzymałości materiałów. Metodę tę nazwano metodą sztywnych elementów skończonych. Umożliwia ona, co zostanie przedstawione w dalszych rozważaniach, opracowanie sposobu układania macierzy równań ruchu bez potrzeby każdorazowego wyprowadzania tych równań.

Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych nie ogranicza się jedynie do wymienionych na wstępie układów; można bowiem za jej pomocą obliczać drgania giętne i giętno-skretne kadłubów, drgania lokalne nadbudówek, drgania giętne wałów na wielu podporach sprężystych, jak również drgania skretne rozwidlonych układów napędowych. Omawiana metoda nadaje się również do obliczania częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań ram i rusztów złożonych z prętów prostych i zakrzywionych o zmiennym przekroju poprzecznym, dowolnie rozłożonej masie i dowolnie podpartych. Przy obliczaniu drgań giętnych uwzględniany jest wpływ sił stycznych, a także wpływ masowych momentów bezwładności.

W oparciu o przedstawioną metodę autor ułożył kilka programów na elektroniczną maszynę cyfrową Elliott 803 [4, 5, 6]. Programy te znalazły szerokie zastosowanie w pracach biur konstrukcyjnych przemysłu okrętowego umożliwiając wprowadzanie nowych rozwiązań i przynosząc gospodarce narodowej poważne oszczędności.

2. Oznaczenia

Oznaczenia w niniejszej pracy stanowią trudny problem. Skomplikowane postacie wzorów zawierających liczne sumy, obejmujące różne obszary parametrów, a ponadto macierze utworzone z bloków złożonych z mniejszych bloków prowadzą do skomplikowanych układów wskaźników. Zagadnienie to wymaga przeto już na wstępie dokładnego omówienia, co pozwoli uniknąć niejasności w trakcie czytania pracy. Zastosowany sposób oznaczeń może się wydawać w pierwszej chwili nieco skomplikowany, uzasadniony jest jednak względami łatwego programowania obliczeń na elektroniczne maszyny cyfrowe. Należy bowiem pamiętać, że metody elementów skończonych są ściśle powiązane z techniką nowoczesnych obliczeń numerycznych i muszą być opracowywane pod tym kątem widzenia.

2.1. Uwagi ogólne. Macierze kwadratowe i składowe bloki tych macierzy oznaczane są dużymi literami umieszczonymi w nawiasach kwadratowych, np. [A].

Macierze kolumnowe (wektory) oznaczane są również dużymi literami, lecz umieszczonymi w nawiasach sześciennych, np. $\{Q\}$. W przypadku składania wektorów z wyrazów innych wektorów stosuje się następujące oznaczenia:

$$\text{jeżeli} \quad \{Q\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \text{to} \quad \{Q\}_{i-j} = \begin{pmatrix} q_i \\ q_{i+1} \\ \vdots \\ q_j \end{pmatrix}.$$

Te same zasady stosuje się również w odniesieniu do macierzy diagonalnych o wyrazach z pojedynczymi wskaźnikami.

Wyrazy macierzy, bloków i wektorów oznaczane są małymi literami.

Wskaźniki określające położenie wyrazu w macierzy, bloku lub wektorze umieszczone są na dole, z wyjątkiem wskaźników określających położenie bloku w r -tym pasmie poziomym i p -tym pasmie pionowym macierzy n -tego stopnia (patrz np. wzór 4.11). Wskaźniki mogą być pojedyncze w przypadku wektorów i macierzy diagonalnych lub podwójne w przypadku macierzy i bloków kwadratowych.

Wskaźniki podwójne rozdzielone są przecinkiem. Pierwszy z nich oznacza numer wiersza lub pasma poziomego, drugi — numer kolumny lub pasma pionowego.

Wskaźnik określający ukierunkowanie danego parametru wzdłuż lub wokół osi układu odniesienia umieszczany jest na dole.

Wskaźnik określający przynależność parametru do sztywnego elementu skończonego umieszczany jest u góry i oznacza numer tego elementu.

Wskaźnik określający przynależność parametru do elementu sprężystego umieszczany jest również u góry. Składa się on z dwóch a niekiedy nawet trzech liter. Pierwsze dwie, rozdzielone myślnikiem, oznaczają numery sztywnych elementów skończonych, złączonych rozpatrywanym elementem sprężystym. Jeżeli parametr odnosi się również do sztywnego elementu skończonego, to z dwóch omawianych wyżej liter pierwsza jest numerem tego elementu skończonego. Trzecia litera, oddzielona od poprzednich przecinkiem, oznacza numer elementu sprężystego w rozpatrywanym połączeniu. Tak więc np. $z_s^{r-p,l}$ jest współrzędną punktu zamocowania l -tego elementu sprężystego, należącego do połączenia między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym, do r -tego sztywnego elementu skończonego, mierzoną wzdłuż osi x_s^r .

Wskaźnik parametru należącego do elementu sprężystego wchodzącego w skład połączenia między sztywnym elementem skończonym a ostoją oznacza się podwójną literą, będącą numerem tego elementu skończonego, np. $z_s^{r-r,l}$.

Macierz transponowaną oznacza się literą T umieszczoną u góry, np. $[Z]^T$.

W celu uniknięcia możliwości pomyłki przy podnoszeniu do potęgi wyrazów ze wskaźnikami umieszczonymi u góry wyrazy te umieszcza się w nawiasach (patrz np. wzór 4.6).

2.2. Wskaźniki.

- i — numer wyrazu wektora, wyrazu macierzy diagonalnej lub wiersza macierzy kwadratowej (tylko dla macierzy n -tego stopnia), ($i = 1, 2, \dots, n$);
- j — numer kolumny macierzy kwadratowej n -tego stopnia, ($j = 1, 2, \dots, n$);
- l — numer elementu sprężystego w połączeniu między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym, ($l = 1, 2, \dots, e^{r-p}$);

- p — numer sztywnego elementu skończonego z jednej strony połączenia;
 r — numer sztywnego elementu skończonego z drugiej strony połączenia;
 s — wskaźnik określający ukierunkowanie oznaczanego parametru w stosunku do osi układu odniesienia ($s = 1, 2, 3$ — określa, że parametr odnosi się do kierunku wzdłuż osi x_1^r, x_2^r, x_3^r , natomiast $s = 4, 5, 6$ — wokół tych osi);
 t — wskaźnik występujący obok wskaźnika s , oznacza on numer kolumny, tak jak wskaźnik s numer wiersza bloku $[A^{r,p}]$ lub $[B^{r,p}]$, (patrz np. wzór 4.10);
 α — numer pasma poziomego bloku $[B^{r,p}]$, w którym znajduje się blok $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$;
 β — numer pasma pionowego bloku $[B^{r,p}]$, w którym znajduje się blok $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$.

2.3. Oznaczenia szczegółowe wielkości podstawowych.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ — przekształcona macierz stałych składników równań ruchu;}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A^{1,1}] & [A^{1,2}] & \dots & [A^{1,u}] \\ [A^{1,2}]^T & [A^{2,2}] & \dots & [A^{2,u}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [A^{1,u}]^T & [A^{2,u}]^T & \dots & [A^{u,u}] \end{bmatrix} \text{ — przekształcona macierz stałych składników równań ruchu utworzona z bloków } [A^{r,p}];$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1,n} & b_{2,n} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \text{ — macierz stałych składników równań ruchu (macierz ta może być również podzielona na bloki } [B^{r,p}] \text{ podobnie jak macierz } [A] \text{ na bloki } [A^{r,p}]);$$

$[C^{r-p,l}]$ — macierz kosinusów kierunkowych między układem osi $y_1^{r-p,l}, y_2^{r-p,l}, y_3^{r-p,l}$ a układem x_1^r, x_2^r, x_3^r ;

$[D]$ — macierz równań ruchu;

$[D^*]$ — przekształcona macierz równań ruchu;

e^{r-p} — liczba elementów sprężystych w połączeniu między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym;

$[G]$ — macierz diagonalna współczynników przekształcających;

$g_i = 1/\sqrt{m_i}$ — współczynnik przekształcający;

$[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$ — składowy blok bloku $[B^{r,p}]$;

$[I]$ — macierz jednostkowa;

$[K^{r-p,l}]$ — macierz diagonalna współczynników sztywności elementu sprężystego;

$k_s^{r-p,l}$ — współczynniki sztywności ($s = 1, 2, 3$ — liniowej, $s = 4, 5, 6$ — obrotowej);

$[M]$ — diagonalna macierz mas uogólnionych;

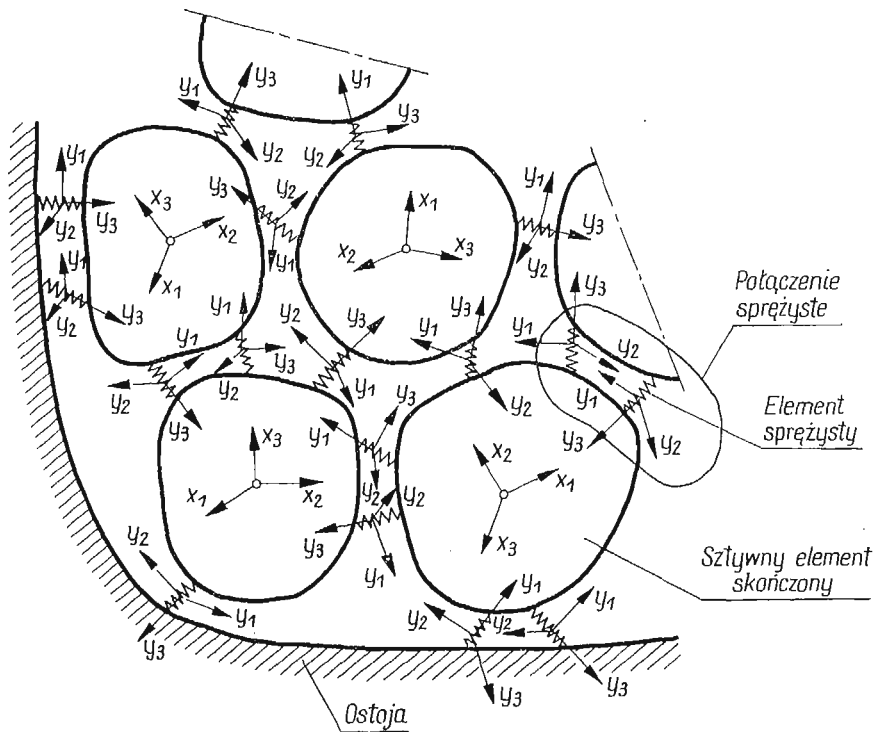
$[M^r]$ — diagonalny blok mas uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego;

- m_s^r — masa uogólniona (dla $s = 1, 2, 3$ — masy biorące udział w ruchu w kierunku osi x_1^r, x_2^r, x_3^r , natomiast dla $s = 4, 5, 6$ — masowe momenty bezwładności wokół tych osi);
 n — stopień macierzy równań ruchu;
 $[0]$ — macierz zerowa;
 $\{Q\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{Q^1\} \\ \{Q^2\} \\ \vdots \\ \{Q^n\} \end{pmatrix}$ — wektor współrzędnych uogólnionych;
 $\{Q^r\}$ — wektor — blok współrzędnych uogólnionych;
 q_s^r — współrzędna uogólniona będąca przemieszczeniem środka masy (gdy $s = 1, 2, 3$) albo obrotem sztywnego elementu skończonego (gdy $s = 4, 5, 6$);
 T — energia kinetyczna;
 U — energia potencjalna;
 u — liczba sztywnych elementów skończonych rozpatrywanego układu;
 $\{V^{r-p,l}\}$ — wektor przemieszczeń punktu zamocowania elementu sprężystego w układzie $y_1^{r-p,l}, y_2^{r-p,l}, y_3^{r-p,l}$,
 $\Delta v_s^{r-p,l}$ — odkształcenie elementu sprężystego;
 x_s^r — oś nieruchomego układu odniesienia przynależnego do środka masy r -tego sztywnego elementu skończonego;
 $y^{r-p,l}$ — oś nieruchomego układu odniesienia przynależnego do elementu sprężystego;
 $[Z^{r-p,l}]$ — macierz współrzędnych zamocowania elementu sprężystego
 δ — błąd w % metody sztywnych elementów skończonych względem innej metody;
 ζ — liczba stopni swobody sztywnego elementu skończonego;
 $\{\Xi\}$ — wektor postaci drgań, który jest zarazem wektorem względnych amplitud współrzędnych uogólnionych;
 τ — czas;
 $\{\Psi\}$ — wektor własny macierzy $[A]$;
 ω — częstość kołowa drgań własnych.

3. Model obliczeniowy

Założony w niniejszej pracy model obliczeniowy zastępujący rzeczywistą konstrukcję składa się (patrz rys. 1) z u elementów skończonych będących bryłami nieodkształcalnymi, z których każda ma sześć stopni swobody. Własności dynamiczne sztywnego elementu

skończonego określone są sześcioma masami uogólnionymi m_s^r , z których pierwsze trzy ($s = 1, 2, 3$) są masami biorącymi udział w ruchu w kierunku głównych centralnych osi bezwładności x_1^r, x_2^r, x_3^r , natomiast pozostałe ($s = 4, 5, 6$) masowymi momentami bezwładności wokół tych osi. W większości zagadnień technicznych można założyć, że masy biorące udział w ruchu we wszystkich trzech kierunkach są jednakowe. Istnieją jednak takie przypadki, w których należy przyjmować różne ich wartości. Z przy-



Rys. 1. Model obliczeniowy

padkami takimi można się spotkać w okrętownictwie przy obliczaniu drgań elementów kadłuba. Inny jest bowiem wpływ masy wody towarzyszącej na drgania pionowe, a inny na drgania poziome. W pracy zachowano zatem we wszystkich rozważaniach możliwość występowania różnych wartości mas w zależności od kierunku ich ruchu.

Szttywne elementy skończone połączone są dowolnie ze sobą lub z ostoją. Połączenia te składają się z dowolnej liczby elementów sprężystych przenoszących siły w kierunku ich głównych osi sztywności i momenty wokół tych osi. Główne osie sztywności posiadają takie własności, że siły działające w ich kierunku powodują odkształcenia elementu sprężystego tylko w kierunku działania tych sił. Założono ponadto, że elementy sprężyste są nieważkie, mają małe wymiary w stosunku do wymiarów sztywnych elementów skończonych i posiadają charakterystyki liniowe. Założenie charakterystyk liniowych jest możliwe do przyjęcia z uwagi na niewielkie odkształcenia elementów sprężystych występujące w praktyce. Każdy element sprężysty określony jest sześcioma współczynnikami sztyw-

ności $k_s^{r-p,l}$, przy czym pierwsze trzy ($s = 1, 2, 3$) są współczynnikami sztywności liniowych (rozciąganie i ścinanie), natomiast pozostałe ($s = 4, 5, 6$) współczynnikami sztywności obrotowych (zginanie i skręcanie). Współczynniki sztywności definiuje się jako stosunek siły uogólnionej do uogólnionego odkształcenia.

W celu zorientowania w przestrzeni poszczególnych układów odniesienia (każdy sztywny element skończony i każdy element sprężysty ma swój niezależny układ) należy znać dziewięć kosinusów kierunkowych kątów między osiami sąsiednich układów.

Rzeczywiste ustroje obliczane metodą sztywnych elementów skończonych można podzielić na trzy zasadnicze typy.

Pierwszy typ — to ustroje złożone ze sztywnych urządzeń, mocowanych na podkładkach sprężystych. Typowym przykładem takiej konstrukcji jest sztywna platforma umieszczona w maszynowni okrętu na podkładkach gumowych (platforma «pływająca») z urządzeniami ustawionymi na niej również na podkładkach gumowych. W ustrojach tego typu za sztywne elementy skończone przyjmuje się całe urządzenia traktowane jako bryły nieodkształcalne, natomiast za elementy sprężyste — wszelkiego rodzaju sprężyny, podkładki gumowe, resory, wałki skrętne itp.

Drugi typ — to ustroje o charakterze ciągłym, w których podział na sztywne elementy skończone dokonuje się w sposób pomyślany. Do tego typu ustrojów zalicza się wszelkiego rodzaju układy belkowe i płytowe o masie rozłożonej w sposób ciągły.

Trzeci typ — to ustroje składające się z obu poprzednio omówionych układów. Ustrojem takim będzie np. wspomniana wyżej platforma z urządzeniami okrętowymi, traktowana jednak jako odkształcalna i podzielona, w pomyślany sposób, na szereg sztywnych elementów skończonych.

Współczynniki sztywności elementów sprężystych w przypadku pierwszego typu ustroju wyznaczane są na ogół doświadczalnie i podawane przez producentów w katalogach. W przypadku drugiego typu ustroju elementami sprężystymi są elementy pomyślane. Tego rodzaju elementy sprężyste zastępują sztywności pewnych odcinków rzeczywistych układów ciągłych. Zastosowany model obliczeniowy można więc nazwać modelem o dyskretnie rozłożonej sztywności. Wartości współczynników sztywności takich elementów wyznacza się z prostych zależności wytrzymałości materiałów przy założeniu stałego rozkładu naprężeń w zastępowanym odcinku. Tak więc np. współczynnik sztywności zginania odcinka belki o długości Δl , momencie bezwładności przekroju poprzecznego I i module Younga E wynosi

$$(3.1) \quad k = \frac{EI}{\Delta l}.$$

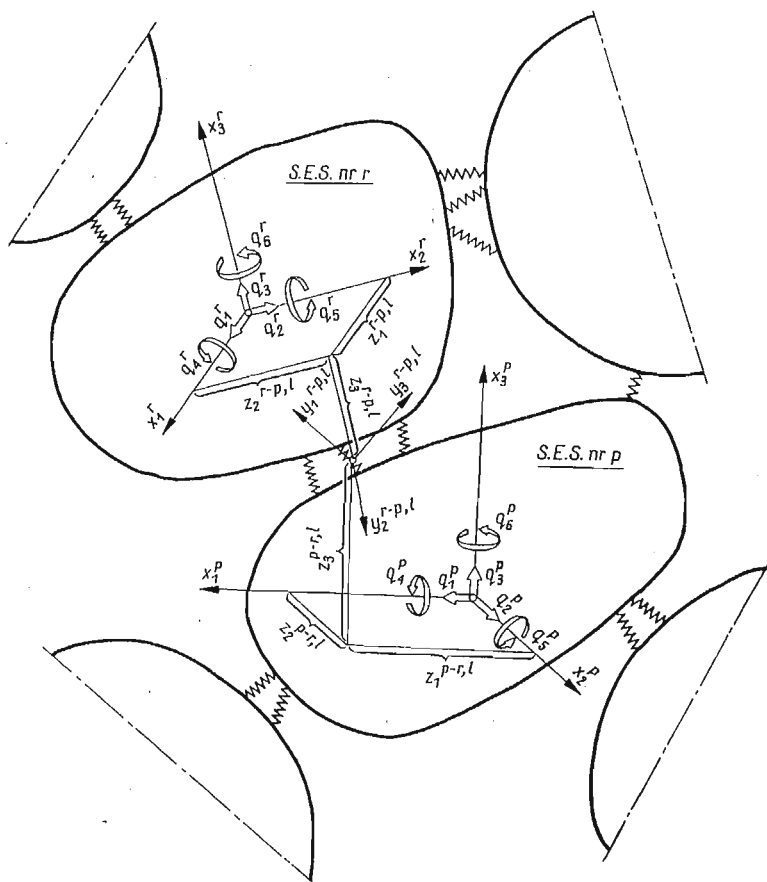
4. Macierz równań ruchu

Równania ruchu wyprowadzono w oparciu o równania Lagrange'a. Dla małych przemieszczeń w przypadku braku wymuszeń i przy pominięciu tłumienia mają one następującą postać:

$$(4.1) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s^r} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_s^r} = 0.$$

Dla każdego sztywnego elementu skończonego można ułożyć sześć takich równań, a więc $n = 6u$ dla całego układu. Pominięcie tłumienia jest uzasadnione, ponieważ jego wpływ na wartości częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań w większości rozwiązań konstrukcyjnych jest bardzo mały.

Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia liniowe środków mas sztywnych elementów skończonych w kierunkach ich głównych centralnych osi bezwładności i przemieszczenia obrotowe wokół tych osi (patrz rys. 2).



Rys. 2. Schemat oznaczenia współrzędnych uogólnionych

Energię kinetyczną układu przy takim założeniu współrzędnych oblicza się z następującej zależności:

$$(4.2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u \sum_{s=1}^6 m_s^r (\dot{q}_s^r)^2.$$

Pochodne cząstkowe energii kinetycznej względem prędkości uogólnionych są równe

$$(4.3) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s^r} = m_s^r \dot{q}_s^r.$$

Energię potencjalną odkształcenia elementów sprężystych całego układu rozdzielono na dwie części. Pierwsza część obejmuje energię potencjalną zależną od współrzędnych uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego, druga — energię potencjalną niezależną od tych współrzędnych. Oznaczając pierwszą z nich przez U^r , a drugą przez U^* uzyskuje się następującą zależność:

$$(4.4) \quad U = U^r + U^*.$$

Ponieważ U^* nie zależy od współrzędnych uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego, pochodna cząstkowa całkowitej energii potencjalnej układu względem współrzędnych uogólnionych tego elementu jest równa

$$(4.5) \quad \frac{\partial U}{\partial q_s^r} = \frac{\partial U^r}{\partial q_s^r}.$$

W dalszych rozważaniach wystarczy więc obliczać energię potencjalną U^r , którą wyznacza się z zależności

$$(4.6) \quad U^r = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} \sum_{s=1}^6 k^{r-p,l} (\Delta v_s^{r-p,l})^2.$$

We wzorze (4.6) sumy obejmują energię potencjalną wszystkich elementów sprężystych doczepionych do r -tego sztywnego elementu skończonego. Jeżeli między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym nie ma połączenia, to oczywiście $k_s^{r-p,l} = 0$.

Odształcenia elementów sprężystych w układzie osi związanych z nimi są równe

$$(4.7) \quad \Delta v_s^{r-p,l} = v_s^{r-p,l} - v_s^{p-r,l}.$$

W celu uzależnienia energii potencjalnej U^r od współrzędnych uogólnionych należy się posłużyć następującymi zależnościami:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \{V^{r-p,l}\}_{1-3} &= [C^{r-p,l}] \cdot (\{Q^T\}_{1-3} - [Z^{r-p,l}] \cdot \{Q^T\}_{4-6}), \\ \{V^{r-p,l}\}_{4-6} &= [C^{r-p,l}] \cdot \{Q^T\}_{4-6}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.9) \quad [Z^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} 0 & z_3^{r-p,l} & -z_2^{r-p,l} \\ -z_3^{r-p,l} & 0 & z_1^{r-p,l} \\ z_2^{r-p,l} & -z_1^{r-p,l} & 0 \end{bmatrix}.$$

Po prostych, lecz pracochłonnych przekształceniach pochodne cząstkowe energii potencjalnej względem współrzędnych uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego przyjmują postać:

$$(4.10) \quad \frac{\partial U}{\partial q_s^r} = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^6 b_{s,i}^{r,p} q_s^p,$$

gdzie $b_{s,i}^{r,p}$ są wyrazami bloków $[B^{r,p}]$ macierzy $[B]$. Bloki te składają się z czterech mniejszych bloków $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$

$$(4.11) \quad [B^{r,p}] = \begin{bmatrix} b_{1,1}^{r,p} & b_{1,2}^{r,p} & \dots & b_{1,6}^{r,p} \\ b_{2,1}^{r,p} & b_{2,2}^{r,p} & \dots & b_{2,6}^{r,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{6,1}^{r,p} & b_{6,2}^{r,p} & \dots & b_{6,6}^{r,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{1,1}^{r,p}] & [H_{1,2}^{r,p}] \\ [H_{2,1}^{r,p}] & [H_{2,2}^{r,p}] \end{bmatrix}.$$

Bloki $[H_{\alpha,\beta}^{r,r}]$ należące do bloków $[B^{r,r}]$, które leżą na przekątnej macierzy $[B]$ ($p = r$), oblicza się z następujących zależności:

$$(4.12) \quad [H_{1,1}^{r,r}] = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{r-p,l}],$$

$$(4.13) \quad [H_{1,2}^{r,r}] = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{r-p,l}] \cdot [Z^{r-p,l}],$$

$$(4.14) \quad [H_{2,1}^{r,r}] = [H_{1,2}^{r,r}]^T,$$

$$(4.15) \quad [H_{2,2}^{r,r}] = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} ([C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{4-6} \cdot [C^{r-p,l}] + \\ + [Z^{r-p,l}]^T \cdot [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{r-p,l}] \cdot [Z^{r-p,l}]).$$

Bloki $[B^{r,r}]$ są symetryczne względem swoich przekątnych. Zawierają one wyrazy złożone z parametrów r -tego sztywnego elementu skończonego i parametrów doczepionych do niego elementów sprężystych. Każdy ze sztywnych elementów skończonych ma więc jakby swój odpowiednik w postaci bloku $[B^{r,r}]$.

Bloki $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$ należące do bloków $[B^{r,p}]$, które leżą nad główną przekątną macierzy $[B]$ ($p > r$), oblicza się z zależności

$$(4.16) \quad [H_{1,1}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}],$$

$$(4.17) \quad [H_{1,2}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}] \cdot [Z^{p-r,l}],$$

$$(4.18) \quad [H_{2,1}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [Z^{r-p,l}]^T \cdot [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}],$$

$$(4.19) \quad [H_{2,2}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} ([C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{4-6} \cdot [C^{p-r,l}] + \\ + [Z^{r-p,l}]^T \cdot [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}] \cdot [Z^{p-r,l}]).$$

Bloki te zawierają wyrazy złożone z parametrów elementów sprężystych połączenia między r -tym i p -tym sztywnym elementem skończonym oraz z parametrów sztywnych elementów skończonych, złączonych za pomocą tego połączenia. Każde z połączeń łączących dwa sztywne elementy skończone ma zatem jakby swój odpowiednik w postaci bloku $[B^{r,p}]$. Bloki $[B^{p,r}] = [B^{r,p}]^T$, a więc macierz $[B]$ jest symetryczna względem głównej przekątnej.

Wstawiając zależności (4.3) i (4.10) do równań Lagrange'a (4.1) uzyskuje się dla każdego sztywnego elementu skończonego układ sześciu jednorodnych równań różniczkowych. Układ ten ma następującą postać:

$$(4.20) \quad [M^r] \cdot \{\ddot{Q}^r\} + \sum_{p=1}^u [B^{r,p}] \cdot \{Q^p\} = 0.$$

Układów takich jest oczywiście tyle, z ilu sztywnych elementów skończonych składa się rozpatrywany ustrój. Dla całego ustroju można więc ułożyć $n = 6u$ jednorodnych równań różniczkowych, które należy zapisać w następujący sposób:

$$(4.21) \quad [M] \cdot \{\ddot{Q}\} + [B] \cdot \{Q\} = 0.$$

Rozwiązanie takiego układu równań różniczkowych zakłada się w postaci harmoniczej

$$(4.22) \quad \{Q\} = \{E\} \sin \omega \tau.$$

Po wstawieniu zależności (4.22) do układu równań (4.21) uzyskuje się, po uproszczeniu przez wspólny czynnik $\sin \omega \tau$, układ n jednorodnych równań algebraicznych o następującej postaci:

$$(4.23) \quad ([B] - [M]\omega^2) \cdot \{E\} = 0.$$

Są to równania ruchu, a macierz charakteryzująca je przybiera postać

$$(4.24) \quad [D] = [B] - [M]\omega^2.$$

Jak wiadomo, układ jednorodnych równań algebraicznych ma tylko wtedy rozwiązania nietrywialne, jeżeli wyznacznik macierzy $[D]$ jest równy zeru. Własność tę wykorzystuje się w obliczeniach częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań w oparciu o rachunek macierzowy. W tym celu macierz $[D]$ przekształca się w ten sposób, aby współczynniki przy ω^2 były równe jedności, a wyznacznik tak przekształconej macierzy pozostał równy zeru. Dokonuje się tego mnożąc lewostronnie i prawostronnie macierz $[D]$ przez macierz współczynników przekształcających $[G]$. Tak przekształcona macierz równań ruchu jest równa

$$(4.25) \quad [D^*] = [G] \cdot [B] \cdot [G] - [G] \cdot [M] \cdot [G] \omega^2.$$

Wyrażenie $[G] \cdot [M] \cdot [G]$ jest macierzą jednostkową. Wprowadzając oznaczenie

$$(4.26) \quad [A] = [G] \cdot [B] \cdot [G],$$

przekształconą macierz równań ruchu można przedstawić w postaci

$$(4.27) \quad [D^*] = [A] - [I]\omega^2.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy $[D^*]$ jest nadal równy zeru, obliczenie częstości drgań własnych rozpatrywanego ustroju sprowadza się do znalezienia wartości własnych macierzy $[A]$, zwanej dalej przekształconą macierzą stałych składników równań ruchu.

Ze wzoru (4.26) wynika, że wyraz macierzy $[A]$, leżący w i -tym wierszu i j -tej kolumnie oblicza się dzieląc analogiczny wyraz macierzy $[B]$ przez iloczyn pierwiastków kwadratowych z mas uogólnionych o wskaźnikach i i j

$$(4.28) \quad a_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{\sqrt{m_i m_j}}.$$

W praktyce tylko niektóre ustroje wymagają tak ogólnego modelu obliczeniowego. Rzeczywisty ustrój można najczęściej zastąpić układem, w którym centralne główne osie bezwładności wszystkich sztywnych elementów skończonych i główne osie sztywności

wszystkich elementów sprężystych są odpowiednio względem siebie równoległe. Proces obliczeń wyrazów macierzy $[A]$ znacznie się wtedy upraszcza, ponieważ macierze kosinusów kierunkowych stają się macierzami jednostkowymi. Dla niektórych układów można ponadto stosować sztywne elementy skończone o trzech, dwóch lub o jednym stopniu swobody.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o trzech stopniach swobody (q_1^r, q_2^r, q_6^r) stosowano przy obliczaniu drgań kadłuba w płaszczyźnie pionowej, z uwzględnieniem drgań wzdłużnych nadbudówek, symetrycznej platformy «pływającej» z urządzeniami oraz płaskiej ramy na podporach sprężystych.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o trzech stopniach swobody (q_3^r, q_4^r, q_5^r) stosowano przy obliczaniu drgań rusztów i płyt.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o dwóch stopniach swobody (q_2^r, q_6^r) stosowano przy obliczaniu drgań pionowych kadłuba, drgań giętych wału śrubowego typu Grima i wałów na wielu podporach.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o jednym stopniu swobody (q_4^r) stosowano przy obliczaniu drgań skrętnych rozwidlonych układów napędowych.

Stosowanie sztywnych elementów skończonych o zmniejszonej liczbie stopni swobody pozwala zmniejszyć wymiar macierzy $[A]$ lub zwiększyć gęstość podziału elementów ciągłych przy zachowaniu niezmiennych wymiarów tej macierzy. Zmniejszenie wymiarów macierzy $[A]$ znacznie skraca czas obliczeń na elektronicznej maszynie cyfrowej, ponieważ jest on proporcjonalny do drugiej, a niekiedy nawet do trzeciej potęgi stopnia macierzy. Natomiast zwiększenie gęstości podziału zwiększa dokładność obliczeń.

Macierze równań ruchu układów złożonych ze sztywnych elementów skończonych o zmniejszonej liczbie stopni swobody uzyskuje się z macierzy układów przestrzennych przez skreślenie wierszy i kolumn odpowiadających pominiętym współrzędnym uogólnionym.

Jak już wspomniano, macierz $[A]$ nawet bardzo złożonych ustrojów można ułożyć w sposób automatyczny bez wyprowadzania równań ruchu. W tym celu należy:

1. Wykonać szkic układu obliczeniowego numerując kolejno sztywne elementy skończone od 1 do u (patrz przykład na rys. 4).

2. Przygotować tablicę (patrz rys. 3) do wpisywania wyrazów macierzy $[A]$ składającą się z u pasm poziomych i u pionowych (pasma te zaznaczono na rys. 3 grubymi liniami).

3. Podzielić każde pasmo poziome i pionowe na ζ części, uzyskując tablicę o $n = \zeta u$ wierszach i n kolumnach.

4. Ponumerować pasma poziome i pionowe od 1 do u .

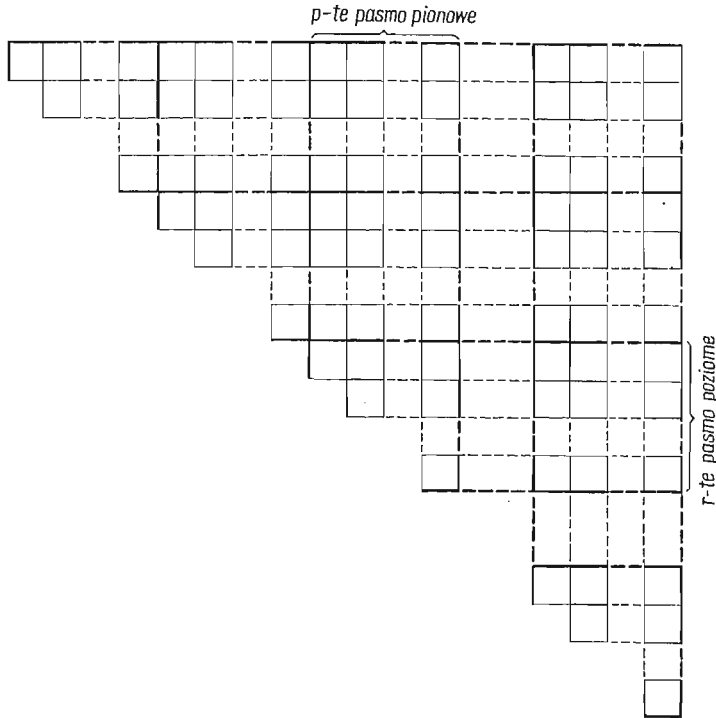
5. Ponumerować wiersze i kolumny każdego pasma zgodnie z wskaźnikami (s, t) współrzędnych uogólnionych sztywnych elementów skończonych (dla układów przestrzennych $s = t = 1, 2, \dots, 6$, a np. dla układów złożonych ze sztywnych elementów skończonych o dwóch stopniach swobody — $s = t = 2, 6$).

6. Obliczyć i wpisać do tablicy wyrazy bloków $[A^{r,p}]$ utworzonych przez przecięcie się r -tego pasma poziomego z p -tym pasmem pionowym według zależności

$$(4.29) \quad a_{s,t}^{r,p} = \frac{b_{s,t}^{r,p}}{\sqrt{m_s^r m_t^p}}.$$

Dla ułatwienia procesu układania macierzy $[A]$ podano niżej kilka wskazówek:

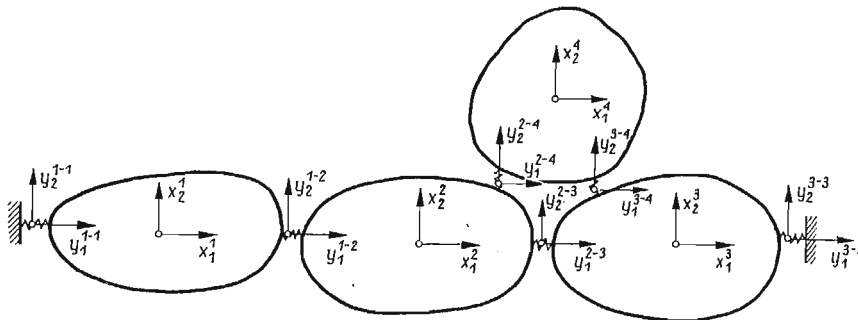
1. Ze względu na symetrię macierzy $[A]$ wykonuje się tylko część tablicy zawierająca wyrazy leżące na głównej przekątnej i nad nią. Przy obliczeniach na elektronicznych maszynach cyfrowych tylko te wyrazy wczytywane są do pamięci.



Rys. 3. Schemat tablicy do układania macierzy równań ruchu

2. Blok $[A^{r,r}]$ leżący na głównej przekątnej macierzy $[A]$ jest odpowiednikiem r -tego sztywnego elementu skończonego. Bloków takich jest tyle, z ilu sztywnych elementów skończonych składa się rozpatrywany ustrój.

3. Blok $[A^{r,p}]$ leżący nad główną przekątną macierzy $[A]$ jest odpowiednikiem połączenia między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym. Bloków takich jest tyle,



Rys. 4. Układ złożony z czterech sztywnych elementów skończonych

ile połączeń między sztywnymi elementami skończonymi posiada rozpatrywany układ. Blok ten leży w r -tym pasmie poziomym i p -tym pasmie pionowym macierzy $[A]$.

4. Połączenia między sztywnymi elementami skończonymi a ostoją nie posiadają swoich odpowiedników w postaci niezerowych bloków $[A^{r,p}]$.

5. Pozostałe klatki są blokami zerowymi. Leżą one na przecięciu się pasm o numerach równych numerom sztywnych elementów skończonych, nie połączonych ze sobą.

Dla zilustrowania metody układania macierzy $[A]$ przedstawiono na rys. 4 ustrój złożony z czterech sztywnych elementów skończonych. Macierz $[A]$ tego ustroju ma następującą postać:

$$(4.30) \quad [A] = \begin{bmatrix} [A^{1,1}] & [A^{1,2}] & [0] & [0] \\ & [A^{2,2}] & [A^{2,3}] & [A^{2,4}] \\ & & [A^{3,3}] & [A^{3,4}] \\ & & & [A^{4,4}] \end{bmatrix}.$$

5. Częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań

Znając przekształconą macierz stałych składników równań ruchu, obliczenie częstości drgań własnych sprowadza się do wyznaczenia wartości własnych tej macierzy. Wartości własne są bowiem kwadratami częstości kołowych drgań własnych [patrz wzór (4.27)].

Jedną z najlepszych metod wyznaczania wartości własnych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań jest metoda Householdera. Autor stosował ją z niewielkimi zmianami we wszystkich programach wykorzystujących metodę sztywnych elementów skończonych. Polega ona na przekształceniu macierzy $[A]$ do postaci trójprzekątniowej (kodiagonalnej). Dokonuje się tego na drodze szeregu przekształceń ortogonalnych [3, 7, 8]. Wartości własne tak uzyskanej macierzy trójprzekątniowej są równe wartościom własnym macierzy wyjściowej. Oblicza się je w prosty sposób metodą tak zwaną bisekcji. Główną zaletą metody Householdera w połączeniu z metodą bisekcji jest jej duża stabilność i niezawodność, a ponadto możliwość obliczania tylko wybranych wartości własnych.

Wektory formy drgań oblicza się mnożąc lewostronnie wektory własne macierzy $[A]$ przez macierz przekształcającą $[G]$

$$(5.1) \quad \{\Xi\} = [G] \cdot \{\Psi\}.$$

Tak więc w celu obliczenia i -tej składowej postaci drgań należy i -tą składową wektora własnego macierzy $[A]$ podzielić przez pierwiastek kwadratowy z odpowiadającej masy uogólnionej

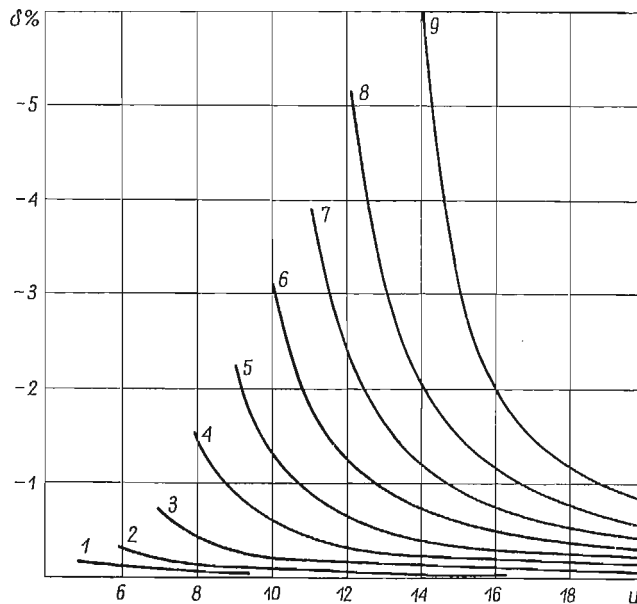
$$(5.2) \quad \xi_i = \frac{\psi_i}{\sqrt{m_i}}.$$

Wektory postaci drgań normuje się jeszcze przeważnie w ten sposób, aby maksymalne moduły ich składowych były równe jedności.

Przy obliczaniu wektorów własnych macierzy $[A]$ autor we wszystkich opracowywanych przez siebie programach stosował metodę WILKINSONA [9].

6. Dokładność metody

Dokładność metody sztywnych elementów skończonych, pomijając błędy wynikające z działań numerycznych, uzależniona jest od gęstości podziału układów ciągłych. Dla stwierdzenia dokładności metody wykonano obliczenia dziewięciu częstości drgań własnych belki swobodnej, dzieląc ją na różne liczby sztywnych elementów skończonych. Wyniki obliczeń porównano (patrz rys. 5) z wynikami uzyskanymi ze wzoru CSUPORA [2]. Wzór ten można uznać za bardzo dokładny, ponieważ uwzględniono w nim wpływ sił stycznych i wpływ masowych momentów bezwładności. Z rys. 5 wynika, że metoda



Rys. 5. Błąd obliczeń częstości drgań własnych swobodnej belki przyzmatycznej w zależności od gęstości jej podziału

sztywnych elementów skończonych daje dobre rezultaty nawet przy niezbyt gęstym podziale belki. Tak więc np. przy podziale na 10 sztywnych elementów skończonych błąd obliczeń pierwszych czterech częstości drgań własnych jest mniejszy od 1%. Wykonano również obliczenia drgań własnych prostokątnej płyty podpartej swobodnie na krawędziach, dzieląc ją na 25 sztywnych elementów skończonych. Błąd pierwszej częstości drgań własnych w stosunku do metody tradycyjnej wynosi poniżej 3%.

W Zakładzie Dynamiki Centralnego Ośrodka Konstrukcyjno-Badawczego Przemysłu Okrętowego w Gdańsku wykonano badania modelowe drgań platformy «pływającej» z jednym i z dwoma urządzeniami. W tablicy 1 zestawiono błędy obliczeń częstości drgań własnych, wykonanych metodą sztywnych elementów skończonych z wynikami uzyskanymi z wspomnianych pomiarów modelowych. Stwierdzono również bardzo dobrą zgodność obliczonych postaci drgań platformy z postaciami uzyskanymi z pomiarów.

Ponadto obliczono częstości pionowych drgań własnych kadłuba zbiornikowca o nośności 53000 DWT, dzieląc go na 21 sztywnych elementów skończonych. Dane dotyczące

Tablica 1. Zestawienie błędów obliczeń częstości drgań własnych, wykonanych metodą sztywnych elementów skończonych z wynikami uzyskanymi z pomiarów modelowych platformy «pływającej»

Stopień drgań		1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ %	jedno urządzenie	1,9	2,2	-2,1	-0,2	0,7	1,4	—	—	—
	dwa urządzenia	-0,4	0,0	0,2	-2,6	4,7	4,1	0,3	-0,5	1,7

wszystkich parametrów statku potrzebnych do obliczeń oraz wyniki pomiarów zaczerpnięto z pracy [1]. Wartości błędów δ umieszczono w tablicy 2.

Tablica 2. Zestawienie błędów obliczeń częstości drgań własnych, wykonanych metodą sztywnych elementów skończonych z wynikami pomiarów kadłuba zbiornikowca

Stopień drgań	1	2	3	4	5	6	7	8
δ %	0,5	0,2	2,1	2,9	—	3,1	5,1	8,0

7. Wnioski

1. Metoda sztywnych elementów skończonych pozwala ująć w jeden algorytm obliczenia częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań dowolnych układów o charakterystykach liniowych.

2. Przy obliczaniu macierzy równań ruchu nie ma potrzeby wyprowadzania tych równań, opracowano bowiem zasady umożliwiające budowanie tych macierzy w sposób automatyczny.

3. Dokładność metody, nawet przy niezbyt gęstym podziale rzeczywistego ustroju na sztywne elementy skończone, jest dla celów praktycznych bardzo dobra.

4. Stosując metodę sztywnych elementów skończonych można przeprowadzać obliczenia układów złożonych, dla których metody tradycyjne są zbyt pracochłonne lub niekiedy nawet niemożliwe do zastosowania.

5. Metoda jest przeznaczona do wykonywania obliczeń za pomocą elektronicznych maszyn cefrowych. Przygotowanie danych jest proste, a proces obliczeń zautomatyzowany, w związku z czym wiele skomplikowanych obliczeń mogą wykonywać pracownicy techniczni nie posiadający większego przygotowania teoretycznego.

6. Czas potrzebny do przeprowadzenia obliczeń jest w porównaniu do innych metod bardzo krótki.

7. Omówiona metoda znalazła szerokie zastosowanie w polskim przemyśle okrętowym, szczególnie przy projektowaniu najnowszych rozwiązań konstrukcyjnych.

8. Metodą sztywnych elementów skończonych można również obliczać częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań wszelkiego rodzaju ram, rusztów i płyt o zmiennych przekrojach poprzecznych i nierównomiernie rozłożonej masie, z uwzględnieniem wpływu sił stycznych i masowych momentów bezwładności.

Literatura cytowana w tekście

1. G. ANDERSON, K. NORRAND, *A method for the calculation of vertical vibration with several nodes and some other aspects of ship vibration*, RINA, (1969).
2. D. CSUPOR, *Methoden zur Berechnung der freien Schwingungen des Schiffskörpers*, Jahrbuch der STG, 50 Band, (1956).
3. A. S. HOUSEHOLDER, F. L. BAUER, *On certain methods for expanding the characteristic polynomial*, Numerische Meth., Nr 1 (1959).
4. J. KRUSZEWSKI, *Obliczenia drgań skrętnych okrętowych układów napędowych. Opis programu Nr 27-TWD na EMC Elliott 803*, Wyd. wewn. COKB Gdańsk (1964).
5. J. KRUSZEWSKI, *Obliczenia drgań skrętnych rozdielonych układów napędowych. Opis programu Nr 29-TWD na EMC Elliott 803*, Wyd. wewn. COKB Gdańsk (1964).
6. J. KRUSZEWSKI, *Obliczenia drgań konstrukcji okrętowych za pomocą sztywnych elementów skończonych o pięciu podstawowych kombinacjach stopni swobody*. Wyd. wewn. Zakł. Mech. i Wytr. Mat. PG, (1969).
7. J. KRUSZEWSKI, Z. POWIERZA, *Optymalizacja macierzy dynamicznych równań ruchu układów napędowych ze względu na czas potrzebny do wyznaczenia częstości skrętnych drgań własnych*, Zbiór Prac WSMW, Nr 21 (1968).
8. J. H. WILKINSON, *Householder's method for the solution of the algebraic eigenproblem*, Computer J., Nr 3 (1960).
9. J. H. WILKINSON, *The calculation of the eigenvectors of codiagonal matrices*, Computer J., Nr 7 (1958).

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
К РАСЧЁТАМ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ СИСТЕМ

Метод жестких конечных элементов состоит в замене действительной конструкции расчетной системой недеформируемых тел (жестких конечных элементов), соединенных между собой или с основанием невесомыми упругими элементами с линейными характеристиками. Разработаны алгоритмы расчетов матричных уравнений движения. Метод приспособлен к проведению расчетов с помощью ЭВМ. На примере свободной призматической балки показана точность метода в зависимости от шага деления (рис. 5). Рассматриваемый метод нашёл широкое применение в судостроении, особенно при расчетах колебаний корпусов, изгибных колебаний валов на многих упругих опорах и винтовых валов Грима, колебаний т. н. плавающих платформ с устройствами на резиновых подкладках, крутильных колебаний разветвленных приводных систем. Метод жестких конечных элементов весьма полезен также при расчетах частот собственных колебаний рам, колосниковых решеток и плит с переменными сечениями и с неравномерно распределенной массой. При этих расчетах учитывается влияние касательных сил и массовых моментов инерции.

S u m m a r y

APPLICATION OF THE RIGID FINITE ELEMENTS METHOD TO CALCULATION
OF NATURAL VIBRATION FREQUENCIES OF SHIP STRUCTURES

The method of calculation consists in replacing the actual system by a system of rigid finite elements interconnected and attached to the foundation by elastic elements with linear characteristics. The matrix of the equations of motion is constructed directly without their explicit derivation. The accuracy of the

computerized method depending upon the number of finite elements (see fig. 5) is shown on the example of a simply supported prismatic beam. The method described is widely applied in shipbuilding industry, especially for calculations of ship hull vibrations, bending vibrations of the shafting fitted on many elastic supports, bending vibrations of elastic Grim-type propeller shafts, vibrations of the «raft» with flexibly fitted equipment and torsional vibrations of branch propulsion systems. The method of rigid finite elements is most useful in calculation of natural vibration frequencies of the frames and grillages with varying cross-sections. The influence of shearing and inertia forces are taken into account.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 stycznia 1971 r.
