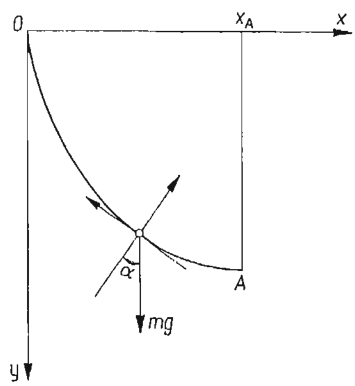
MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 9 (1971)

PEWNE UOGÓLNIENIE PROBLEMU BRACHISTOCHRONY

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

Problem brachistochrony był pierwszym zagadnieniem rachunku wariacyjnego postawionym w czerwcu 1696 r. przez Jana BERNOULIEGO.

Jak wiadomo, problem ten polegał na wyznaczeniu w płaszczyźnie pionowej takiej r zywej łączącej dwa punkty O, A (rys. 1), po której punkt materialny ślizgający się bez



Rys. 1

tarcia pod wpływem siły ciężkości (mający w punkcie O prędkość początkową równą zeru) osiągnie w najkrótszym czasie punkt A.

W pracy tej uwzględniono tarcie ślizgowe. Oczywiście w takim przypadku rozwiązanie bardzo się komplikuje. Rozwiązanie problemu doprowadzono do układu trzech nieliniowych zwyczajnych równań różniczkowych. W toku rozwiązania otrzymano wzór umożliwiający wyznaczenie czasu spadania punktu materialnego po dowolnej krzywej w płaszczyźnie pionowej z uwzględnieniem tarcia ślizgowego. Poza tym otrzymano równanie krzywej, po której punkt materialny przesuwa się ze stałą prędkością.

Wprowadzono następujące oznaczenia: $y = y(x)$ — równanie poszukiwanego toru, g — przyspieszenie ziemskie, ϱ — promień krzywizny toru, v — prędkość punktu materialnego, m — masa punktu materialnego, μ — współczynnik tarcia ślizgowego, α — kąt nachylenia stycznej do krzywej w dowolnym punkcie.

Różniczkę przyrostu energii kinetycznej wyrażamy następująco:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mg\sin\alpha\, ds - \mu mg\cos\alpha\, ds - \mu\frac{mv^2}{\varrho}\, ds. \tag{1}$$

Wykonując różniczkowanie oraz uwzględniając znane związki

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \tag{2}$$

$$ds = (1+y_x^2)^{1/2}dx, \qquad \frac{1}{\varrho} = y_{xx}(1+y_x^2)^{-3/2}, \tag{3}$$

doprowadzamy równanie (1) do postaci

$$v\,dv = g\,dy - \mu g\,dx - \mu v^2 y_{xx}(1+y_x^2)^{-1/2}dx. \tag{4}$$

Na podstawie $(3)_1$ znajdujemy

$$v = \dot{s} = \dot{x}(1+y_x^2)^{1/2}, \tag{5}$$

czyli

$$dv = \frac{dv}{dt}dt = [y_{xx}y_x\dot{x}^2 + (1+y_x^2)\ddot{x}](1+y_x^2)^{-1/2}dt, \tag{6}$$

a więc z (5) i (6) jest

$$v\,dv = [y_{xx}y_x\dot{x}^2 + (1+y_x^2)\ddot{x}]\dot{x}\,dt. \tag{7}$$

Z przyrównania prawych stron wzorów (4) i (7) otrzymujemy

$$y_{xx}y_x\dot{x}^3 + (1+y_x^2)\dot{x}\ddot{x} = g\dot{y} - \mu g\dot{x} - \mu y_{xx}\dot{x}^3, \tag{8}$$

lub

$$y_{xx}y_x\dot{x}^2 + (1+y_x^2)\ddot{x} = gy_x - \mu g - \mu y_{xx}\dot{x}^2. \tag{9}$$

Następnie przyjmujemy podstawienie

$$B(x) = \dot{x}^2. \tag{10}$$

Po zróżniczkowaniu znajdujemy

$$\frac{dB(x)}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x}, \qquad \frac{dB(x)}{dx} = 2\ddot{x}. \tag{11}$$

Uwzględniając wzory (10), (11) doprowadzamy równanie (9) do postaci

$$K(y)\frac{dB(x)}{dx} + L(y)B(x) = M(y), \tag{12}$$

gdzie

$$K(y) = \frac{1}{2}(1+y_x^2), \qquad L(y) = y_{xx}(y_x+\mu), \qquad M(y) = g(y_x-\mu). \tag{13}$$

Rozwiązanie równania (12) jest następujące:

$$B(x) = e^{-\int\frac{L(y)}{K(y)}dx}\left\{C_1 + \int\left[\frac{M(y)}{K(y)}e^{\int\frac{L(y)}{K(y)}dx}\right]dx\right\}. \tag{14}$$

Następnie wykonujemy całkowanie

$$\int \frac{L(y)}{K(y)}dx = 2\int \frac{y_{xx}y_x}{1+y_x^2}dx+2\mu\int \frac{y_{xx}}{1+y_x^2}dx = \ln(1+y_x^2)+2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x+C_2. \tag{15}$$

Uwzględniając wyrażenia (13), (15) doprowadzamy wzór (14) do następującej postaci:

$$\dot{x}^2 = (1+y_x^2)^{-1}e^{-2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}\Big[C+2g\int (y_x-\mu)e^{2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}dx\Big]. \tag{16}$$

Z warunku $v(0) = 0$ znajdujemy $C = 0$ oraz po wykonaniu prostego przekształcenia otrzymujemy wzór na czas T ześliznięcia się punktu materialnego po torze płaskim $y = y(x)$ z uwzględnieniem tarcia ślizgowego

$$T = \int_0^{x_A} (1+y_x^2)^{1/2}z^{-1/2}e^{\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}dx, \tag{17}$$

gdzie

$$z_x = 2g(y_x-\mu)e^{2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}. \tag{18}$$

Łatwo zauważyć, że przy $\mu = 0$ wzór (17) upraszcza się do znanej postaci

$$T = \int_0^{x_A} \left(\frac{1+y_x^2}{2gy}\right)^{1/2} dx. \tag{19}$$

Rozwiązanie problemu doprowadzono do zadania rachunku wariacyjnego na ekstremum warunkowe dla funkcjonału

$$J = \int_0^{x_A} H(y_x, z, z_x)dx, \tag{20}$$

gdzie

$$H = (1+y_x^2)^{1/2}z^{-1/2}e^{\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}+\lambda(x)[z_x-2g(y_x-\mu)e^{2\mu \operatorname{arc\,gt} y_x}]. \tag{21}$$

Jak wiadomo, muszą być w tym przypadku spełnione następujące równania Eulera:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial y_x} = C,\\ &\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_x}\right) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Po wykonaniu różniczkowania otrzymujemy następujący układ trzech sprzężonych nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} C &= (y_x+\mu)[z(1+y_x^2)]^{-1/2}e^{\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}-2g\lambda(x)e^{2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}[1+2\mu(y_x-\mu)(1+y_x^2)^{-1}],\\ \lambda_x(x) &= -e^{\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}(1+y_x^2)^{1/2}(4z^3)^{-1/2},\\ z_x &= 2g(y_x-\mu)e^{2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ścisłe rozwiązanie układu równań (23) jest niemożliwe. Rozwiązanie tego układu można otrzymać w sposób przybliżony, np. za pomocą metody iteracji. Układ (23) można przedstawić w postaci jednego równania różniczkowo - całkowego. Natomiast sprowadzenie go do jednego równania różniczkowego powoduje duże trudności.

Łatwo zauważyć, że przy $\mu = 0$ jest

$$z = 2gy. \tag{24}$$

Wtedy na podstawie $(23)_1$ i $(23)_2$ znajdujemy równanie różniczkowe

$$2yy_{xx} + y_x^2 + 1 = 0, \tag{25}$$

którego rozwiązanie umożliwia otrzymanie znanych parametrycznych równań cykloidy.

Na podstawie wzoru (16) można łatwo otrzymać równanie krzywej, po której punkt materialny przesuwa się ze stałą prędkością v_c.

Wykorzystując przekształcenie

$$\dot{x}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\right)^2 = (1+y_x^2)^{-1} v_c^2 \tag{26}$$

doprowadzamy wzór (16) do postaci

$$v_c^2 e^{2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x} = 2g \int_0^x (y_x - \mu) e^{2\mu \operatorname{arc\,tg} y_x} dx. \tag{27}$$

Po wykonaniu różniczkowania względem zmiennej x otrzymujemy

$$v_c^2 \mu y_{xx} = g(y_x - \mu)(1+y_x^2). \tag{28}$$

Podstawiając $y_x = p$, $y_{xx} = p_x$, znajdujemy

$$\int dx = \frac{\mu v_c^2}{g} \int \frac{dp}{(1+p^2)(p-\mu)}. \tag{29}$$

Zatem

$$x + C = A\left(\int \frac{dp}{p-\mu} - \int \frac{p+\mu}{1+p^2} dp\right), \tag{30}$$

gdzie

$$A = \frac{v_c^2}{g} \frac{\mu}{1+\mu^2}. \tag{31}$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$x + C = A[\ln(y_x - \mu)(1+y_x^2)^{-1/2} - \mu \operatorname{arc\,tg} y_x]. \tag{32}$$

Резюме

НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ

В работе дано некоторое обобщение задачи о брахистохроне, состоящее в учете трения скольжения.

Решение задачи приведено к решению системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (23), точное нахождение которого не возможно. Осуществимо, однако, построение приближенного решения, например по методу итераций.

В ходе решения получена формула (17), по которой рассчитывается время падения материальной точки вдоль произвольной кривой, расположенной в вертикальной плоскости; при этом учитывается линия скольжения.

Выведено также дифференциальное уравнение (32) кривой, по которой материальная точка перемещается с постоянной скоростью.

Summary

A CERTAIN GENERALIZATION OF THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM

In this paper a certain generalization is given of the brachistochrone problem by introducing the slide friction.

The problem is reduced to the system (23) of three non-linear, ordinary differential equations. The exact solution of these equations is not possible but an approximate solution may be obtained, for example by means of the iteration method.

In the paper also the formula (17) is qiven for the determination of the time of fall of the material point along an arbitrary curve lying in the vertical plane, the slide friction being taken into account.

The differential equation (32) describing the curve on which the velocity of the material point is constan has been additionally obtained.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1970 r.