

ZASTOSOWANIE WIELOMIANÓW HERMITE'A DO WYZNACZANIA MACIERZY SZTYWNOŚCI ELEMENTU TARCZY W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

KRZYSZTOF DEMS (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Metoda elementów skończonych jest jedną z nowszych metod przybliżonych stosowanych przy rozwiązywaniu zagadnień teorii sprężystości. Metoda ta pozwala przedstawić stan naprężeń i odkształceń w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego w zależności od przemieszczeń pewnych punktów ciała, przyjętych za węzłowe. Istotną cechą metody jest wyznaczenie tzw. macierzy sztywności, za pomocą której wyrazić można wewnętrzne siły uogólnione w węzłach w funkcji przemieszczeń węzłowych, zgodnie ze wzorem

$$(1.1) \quad P^i = \sum_k C^{ik} u_k,$$

gdzie

$C^{ik}$  — współczynnik macierzy sztywności,

$P^i$  — siła uogólniona w węźle,

$u_k$  — uogólnione przemieszczenie węzłowe.

Praca niniejsza stanowi próbę wykorzystania wielomianów Hermite'a do wyznaczenia macierzy sztywności tarczy poddanej płaskiemu stanowi naprężenia.

2. Postać i własności wielomianów Hermite'a

Wielomiany Hermite'a są to algebraiczne wielomiany jednej zmiennej o następującej własności

$$(2.1) \quad \frac{d^j H^p(z_k)}{dz^j} = \delta_{ik} \delta_{jp},$$

gdzie

$j$  — rząd pochodnej względem zmiennej  $z$ ,

$p$  — rząd wielomianu Hermite'a,

$i$  — indeks węzła, dla którego napisany jest wielomian,

$k$  — indeks węzła, dla którego obliczana jest wartość wielomianu,

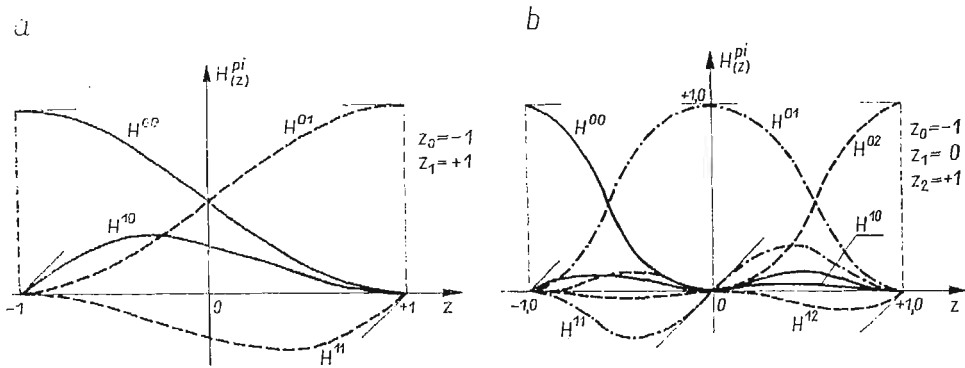
$\delta_{ik}$  — delta Kroneckera.

Jeżeli ograniczymy się do wielomianów rzędu zerowego i pierwszego, to postać ich będzie

następująca [2]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} H^{0i} &= [L^i(z)]^2 \{1 - 2(z - z_i)[L^i(z_i)]'\}, \\ H^{1i} &= [L^i(z)]^2 (z - z_i), \end{aligned}$$

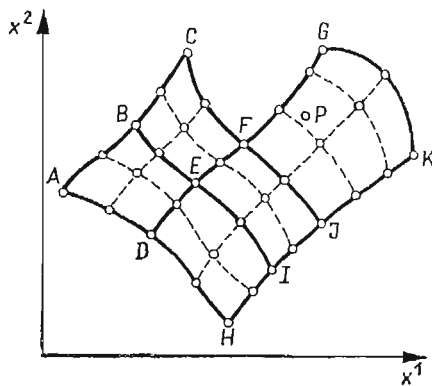
gdzie  $L^i(z) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{z - z_j}{z_i - z_j}$  — wielomian Lagrange'a, posiadający własność  $L^i(z_k) = \delta_{ik} (m + 1 - \text{liczba węzłów})$ . Przykładowy przebieg zmienności wielomianów Hermite'a dla dwóch i trzech węzłów przedstawiony jest na rysunkach 1a i 1b.



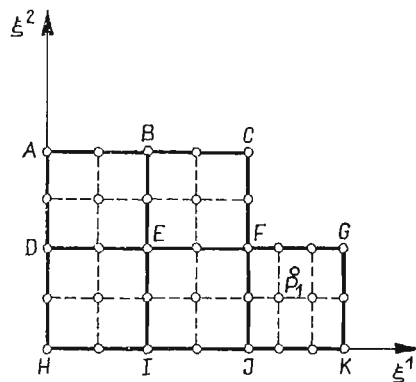
Rys. 1

### 3. Transformacja układu współrzędnych dla elementów tarczy o nieregularnych kształtach

Wyobraźmy sobie tarczę dowolnego kształtu, którą podzielono na krzywoliniowe czworokątne elementy dowolnych rozmiarów, zawierające węzły na brzegu i wewnątrz swego obszaru (rys. 2). Zastosujmy przekształcenie, które dowolnemu punktowi  $P(x^1, x^2)$



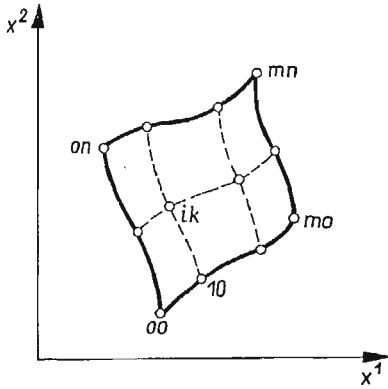
Rys. 2



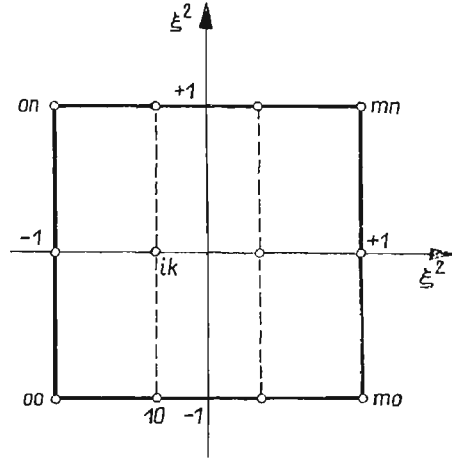
Rys. 3

na płaszczyźnie  $Ox^1x^2$  przyporządkowuje punkt  $P_1$  płaszczyzny  $O\xi^1\xi^2$  w ten sposób, aby obrazem przekształconego elementu z rys. 2 stał się regularny kwadrat o boku  $2 \times 2$ , w którym węzły rozmieszczone są równomiernie (rys. 3).

Rozpatrzmy jeden z elementów z rys. 2. Na rys. 4 i 5 element ten jest przedstawiony na płaszczyźnie  $Ox^1x^2$  oraz  $O\xi^1\xi^2$ . Liczbę węzłów dla elementu przyjmiemy jako równą  $(m+1)(n+1)$ , gdzie  $m+1$  oraz  $n+1$  są liczbami węzłów na liniach równoległych do bo-



Rys. 4



Rys. 5

ków elementu. Funkcje transformujące zapisać można symbolicznie wzorem

$$(3.1) \quad x^i = x^i(\xi^1, \xi^2), \quad i = 1, 2.$$

Załadajmy, aby funkcje opisane wzorem (3.1) spełniały we wszystkich węzłach tarczy warunki:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x^i(\xi_j^1, \xi_k^2) &= x_{jk}^i, \\ [x^i(\xi_j^1, \xi_k^2)],_{\xi^l} &= x_{jk, \xi^l}^i, \\ [x^i(\xi_j^1, \xi_k^2)],_{\xi^1 \xi^2} &= x_{jk, \xi^1 \xi^2}^i. \end{aligned}$$

Symbol po przecinku oznacza tu różniczkowanie względem odpowiedniej zmiennej.

Aby spełnić powyższe warunki, funkcje transformujące przyjęć należy w postaci

$$(3.3) \quad x^j(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2) x_{ikpq}^j,$$

$$i = 0, 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad p, q = 0, 1,$$

gdzie

$x_{ikpq}^j$  — uogólnione współrzędne węzłowe, czyli wartości współrzędnych oraz odpowiednich pochodnych względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  w danym węzle tarczy,

$H^{pi}(\xi^1)$  oraz  $H^{qk}(\xi^2)$  — wielomiany Hermite'a.

Występujące we wzorze (3.3) uogólnione współrzędne węzłowe wyznacza się według schematu opisanego poniżej.

1. Dzieląc tarczę na elementy wyznacza się współrzędne węzłów, leżących na bokach i wewnątrz obszaru elementów.

2. Dla każdego elementu wprowadza się funkcje transformujące w postaci

$$(3.4.1) \quad x^j(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,k} L^i(\xi^1) L^k(\xi^2) x_{ik}^j,$$

gdzie

$L$  — wielomiany Lagrange'a,

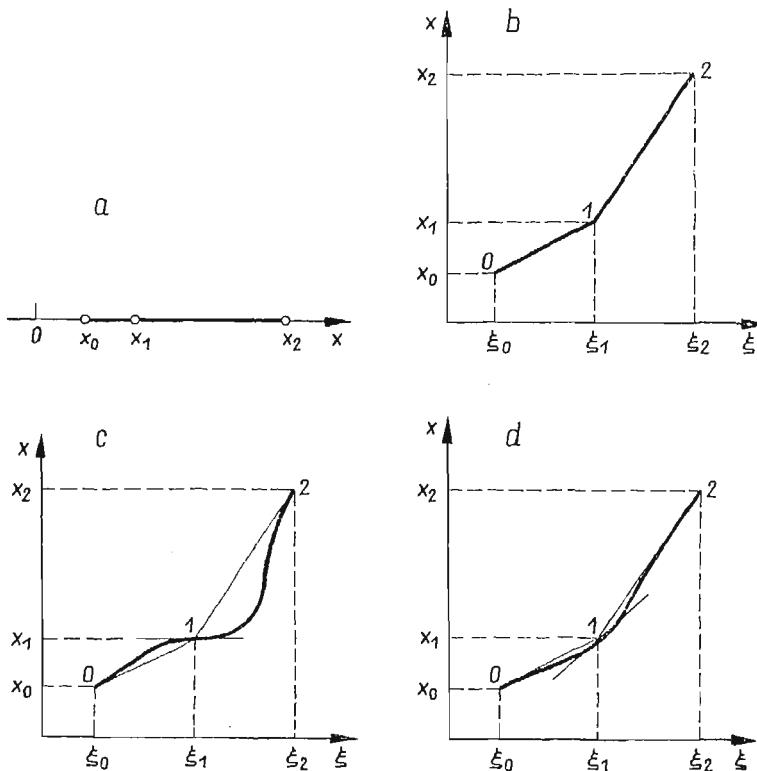
$x_{ik}^j$  — współrzędne węzłów.

Poprzez funkcje (3.4.1) każdy element oryginalny tarczy przekształca się również na regularny kwadrat o boku  $2 \times 2$  w układzie  $O\xi^1\xi^2$ .

3. Dla wszystkich węzłów każdego elementu oblicza się pochodne funkcji transformujących (3.4.1) względem  $\xi^1$  oraz  $\xi^2$ , zgodnie ze wzorem

$$(3.4.2) \quad \frac{\partial^{r+q} x_{sl}^j}{\partial \xi^{1r} \partial \xi^{2q}} = \sum_{i,k} \frac{\partial^r L^i(\xi_s^1)}{\partial \xi^{1r}} \frac{\partial^q L^k(\xi_l^2)}{\partial \xi^{2q}} x_{ik}^j,$$

$$r, q = 0, 1, \quad i, s = 0, 1, \dots, m, \quad k, l = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, 2.$$



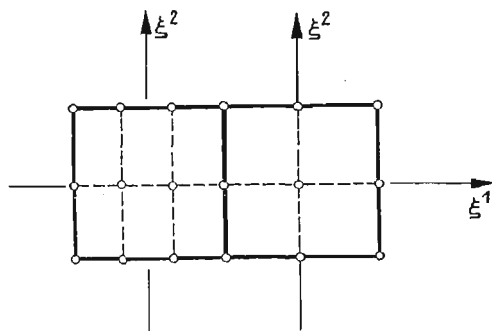
Rys. 6

4. Dla węzłów leżących na bokach elementów, jako należących równocześnie do kilku elementów, wartości odpowiednich pochodnych uśrednia się.

Dzięki takiemu postępowaniu w węzłach tarczy znane są współrzędne węzłowe oraz ich pochodne względem  $\xi^1$  oraz  $\xi^2$ . Tak więc określone są w zupełności funkcje transformujące (3.3).

Zaproponowany powyżej sposób wyznaczania pochodnych podyktowany jest dążeniem do uzyskania jak najmniejszej deformacji siatki narzuconej na tarczę przy transformacji układu współrzędnych.

Założmy, dla uproszczenia, że funkcje transformujące są funkcjami jednej zmiennej [postaci  $x = x(\xi)$ ] i rozpatrzmy dwa liniowe elementy położone wzdłuż osi  $x$ , które określone są poprzez współrzędne swoich końców (rys. 6a). Elementy te chcemy przekształcić na elementy jednakowej długości, położone wzdłuż osi  $\xi$ . Ustalając początkowo liniową zależność między  $x$  a  $\xi$ , przedstawioną na rys. 6b, widzimy, że w punkcie wspólnym dwóch sąsiednich elementów różne są pochodne  $x$  względem  $\xi$ . Tak więc, dla sąsiednich elementów przekształcenie takie nie zapewnia ciągłości pochodnej  $x_{,\xi}$ . Dążąc do zapewnienia tej ciągłości założymy w punkcie wspólnym elementów wartość tej pochodnej, na przykład zero. Funkcja transformująca musi mieć wtedy przebieg pokazany na rys. 6c. Przekształcenie takie znacznie różni się od poprzedniego przekształcenia liniowego. Można również założyć przekształcenie, w którym we wszystkich węzłach wspólnych pochodne  $x_{,\xi}$  równe będą średnim arytmetycznym pochodnych wynikających z liniowego przekształcenia każde-



Rys. 7

go elementu. Przebieg funkcji transformującej w tym przypadku pokazany jest na rys. 6d. Jak widać, to ostatnie przekształcenie zapewnia dla sąsiednich elementów ciągłość współrzędnej  $x$  oraz jej pochodnej  $x_{,\xi}$  przy stosunkowo małej deformacji w stosunku do przekształcenia z rys. 6b. Deformacja ta może mieć znaczenie w przypadku numerycznego całkowania funkcji  $f(x)$  metodą Gaussa. Gdy charakter przebiegu  $x$  w funkcji  $\xi$  różni się znacznie od przebiegu liniowego, wartość całki liczona metodą Gaussa (przy zamianie zmiennej  $x$  na  $\xi$  w wyrażeniu podcałkowym) może odbiegać od wartości dokładnej. Im bardziej funkcja transformująca zbliżona jest do funkcji liniowej, tym wartość całki jest dokładniejsza.

Rozpatrzmy teraz ciągłość funkcji transformujących (3.3) oraz ich pochodnych względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  dla dwóch sąsiednich elementów tarczy z rys. 3 wzdłuż ich wspólnego boku. Dla elementów przedstawionych na rys. 7, dla których na boku wspólnym zmienia się jedynie  $\xi^2$ , mamy

$$\begin{aligned}
 x^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2) x_{ikpq}^j, \\
 x_{,\xi^1}^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} \frac{\partial H^{pi}(\xi^1)}{\partial \xi^1} H^{qk}(\xi^2) x_{ikpq}^j, \\
 x_{,\xi^2}^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{ikpq}^j, \\
 x_{,\xi^1\xi^2}^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} \frac{\partial H^{pi}(\xi^1)}{\partial \xi^1} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{ikpq}^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1}$$

Dla elementu lewego na boku wspólnym współrzędna  $\xi^1 = 1$ . Tak więc dla tego boku wzory (3.5.1) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 x^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{mk0q}^j, \\
 x_{,\xi^1}^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{mk1q}^j, \\
 x_{,\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{mk0q}^j, \\
 x_{,\xi^1\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{mk1q}^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.2}$$

Dla elementu prawego na boku wspólnym jest  $\xi^1 = -1$  i wzory (3.5.1) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 x^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{0k0q}^j, \\
 x_{,\xi^1}^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{0k1q}^j, \\
 x_{,\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{0k0q}^j, \\
 x_{,\xi^1\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{0k1q}^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.3}$$

Wzdłuż wspólnego boku zachodzą oczywiste związki

$$\begin{aligned}
 [x_{mkpq}^j]_{\text{lewe}} &= [x_{0kpq}^j]_{\text{prawe}}, \\
 \left[ \frac{\partial^s H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^{2s}} \right]_{\text{lewe}} &= \left[ \frac{\partial^s H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^{2s}} \right]_{\text{prawe}}, \quad s = 0, 1.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe widzimy, że wzory (3.5.2) i (3.5.3) mają identyczną postać. Tak więc przekształcenie określone wzorem (3.3) dla sąsiednich elementów zachowuje ciągłość współrzędnych oraz ich pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej względem

$\xi^1$  i  $\xi^2$ . Analogicznie można wykazać, że pozostałe pochodne rzędu drugiego zachowują ciągłość jedynie w kierunku wspólnego boku. Brak jest natomiast ciągłości tych pochodnych w kierunku prostopadłym do wspólnego boku dwóch elementów.

#### 4. Funkcje jednostkowe przemieszczeń elementu tarczy

Rozpatrzmy kwadratowy element tarczy w układzie  $\xi^1, \xi^2$  (rys. 5). Wprowadźmy jako uogólnione przemieszczenia w węźle tarczy wielkości:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_{ik00}^j &= u^j(\xi_i^1, \xi_k^2) \text{ — przemieszczenie węzła w kierunku osi } x^j, \\ u_{ik10}^j &= \frac{\partial u^j(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^1}, \\ u_{ik01}^j &= \frac{\partial u^j(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^2}, \\ u_{ik11}^j &= \frac{\partial^2 u^j(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu tarczy wyrazimy w postaci

$$(4.2) \quad u^j(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,k} \sum_{p,q} Q^{ikpq}(\xi^1, \xi^2) u_{ikpq}^j,$$

gdzie  $Q^{ikpq}$  są to wielomiany spełniające warunek

$$(4.3) \quad \frac{\partial^{r+s} Q^{ikpq}(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^{1r} \partial \xi^{2s}} = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{rp} \delta_{sq}.$$

Można więc funkcje te przyjąć w postaci

$$(4.4) \quad Q^{ikpq}(\xi^1, \xi^2) = H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2).$$

Uwzględniając (4.4) w (4.2), przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu tarczy określimy jako

$$(4.5) \quad u^i(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2) u_{ikpq}^j.$$

Powyższy wzór wyraża przemieszczenia dowolnego punktu elementu tarczy we współrzędnych  $\xi^1, \xi^2$ . Znajdźmy związki, jakie będą zachodziły między przemieszczeniami i ich pochodnymi w tym układzie i w układzie  $x^1, x^2$ . Ponieważ z założenia przemieszczenie  $u^j$  w dowolnym punkcie tarczy jest to przemieszczenie w kierunku osi  $x^j$ , przeto przemieszczenia w obu układach będą takie same. Inaczej natomiast przedstawia się sprawa z pochodnymi przemieszczeń w obu układach. W oparciu o tożsamości

$$(4.6.1) \quad \begin{aligned} u_{,\xi^1}^j &= u_{,x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^2}^j &= u_{,x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^2}^2, \end{aligned}$$

otrzymamy związek między pierwszymi pochodnymi przemieszczeń w obu układach. Związek między pochodnymi mieszanymi w obu układach wyznaczmy z układu tożsamości

$$(4.6.2) \quad \begin{aligned} u_{,\xi^1\xi^1}^j &= u_{,\xi^1x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,\xi^1x^2}^j x_{,\xi^1}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^1\xi^1}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^1\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^1\xi^2}^j &= u_{,\xi^1x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,\xi^1x^2}^j x_{,\xi^2}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^1\xi^2}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^1\xi^2}^2, \\ u_{,\xi^2\xi^1}^j &= u_{,\xi^2x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,\xi^2x^2}^j x_{,\xi^1}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^2\xi^1}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^2\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^2\xi^2}^j &= u_{,\xi^2x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,\xi^2x^2}^j x_{,\xi^2}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^2\xi^2}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^2\xi^2}^2, \\ u_{,\xi^1x^1}^j &= u_{,x^1x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,x^1x^2}^j x_{,\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^2x^1}^j &= u_{,x^1x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,x^1x^2}^j x_{,\xi^2}^2. \end{aligned}$$

Pochodne przemieszczeń względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  uzyskamy przez odpowiednie zróżniczkowanie wzoru (4.5). Następnie z dwóch pierwszych równań (4.6.2) wyznacza się pochodne  $u_{,\xi^1x^1}^j$  i  $u_{,\xi^1x^2}^j$ . Z równania trzeciego i czwartego wyznaczmy pochodne  $u_{,\xi^2x^1}^j$  i  $u_{,\xi^2x^2}^j$ , a z ostatnich dwóch równań (4.6.2) wyznaczyć będzie można wtedy pochodną  $u_{,x^1x^2}^j$ .

Wynika więc z powyższego, że w dowolnym punkcie krzywoliniowego elementu tarczy z rys. 4 wyznaczyć można przemieszczenie oraz jego pochodne względem  $x^1$  i  $x^2$ , jeżeli tylko znane są przemieszczenia węzłowe (4.1).

Zbadajmy z kolei ciągłość przemieszczeń i ich pochodnych wzdłuż boku sąsiadujących elementów. W układzie  $\xi^1, \xi^2$  dla elementów z rys. 7, różniczkując kolejno względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  wzór (4.5) i uwzględniając, że dla elementu lewego  $\xi^1 = 1$ , a dla elementu prawego  $\xi^1 = -1$ , okaże się, że wzory określające przemieszczenia, ich pierwsze pochodne i pochodna mieszana dla boku wspólnego mają identyczną postać. Tak więc dla sąsiednich elementów zachowana jest wzdłuż wspólnego boku, ciągłość przemieszczeń, pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$ . Pozostałe pochodne rzędu drugiego zachowują ciągłość jedynie w kierunku wspólnego boku.

Przechodząc do współrzędnych  $x^1, x^2$ , przemieszczenie dla dwóch sąsiednich elementów zachowa ciągłość wzdłuż wspólnego boku, gdyż jest ono identyczne w obu układach współrzędnych i zachowuje ciągłość w układzie  $\xi^1, \xi^2$ . Występujące we wzorze (4.6.1) pochodne  $u_{,\xi^1}^j, u_{,\xi^2}^j, x_{,\xi^1}^1, x_{,\xi^1}^2, x_{,\xi^2}^1, x_{,\xi^2}^2$  zachowują, jak wykazano, ciągłość wzdłuż wspólnego boku, a więc i pochodne  $u_{,x^1}^j$  i  $u_{,x^2}^j$  zachowują też ciągłość. Inaczej przedstawia się ciągłość pochodnej mieszanej  $u_{,x^1x^2}^j$ . Ponieważ brak jest ciągłości drugich pochodnych przemieszczeń i współrzędnych w kierunku prostopadłym do wspólnego boku (w układzie  $\xi^1, \xi^2$ ), brak więc będzie również ciągłości pochodnej  $u_{,x^1x^2}^j$  dla sąsiednich elementów. Wskutek tego model tarczy ulega pewnemu skażeniu.

Dla przemieszczeń jednorodnych

$$(4.7) \quad u^j = A_j x^1 + B_j x^2 + C_j$$

przemieszczenia węzłów elementu wynoszą

$$\begin{aligned} u_{ik00}^j &= A_j x_{ik00}^1 + B_j x_{ik00}^2 + C_j, \\ u_{ik10}^j &= A_j x_{ik10}^1 + B_j x_{ik10}^2, \\ u_{ik01}^j &= A_j x_{ik01}^1 + B_j x_{ik01}^2, \\ u_{ik11}^j &= A_j x_{ik11}^1 + B_j x_{ik11}^2. \end{aligned}$$



Wstawiając te wartości do wzoru (4.5) otrzymamy, że przemieszczenie wyraża się ponownie wzorem (4.7). Tak więc omawiane przekształcenie oddaje w sposób ścisły przemieszczenia jednorodne, co w pracy [1] uznano za kryterium przydatności proponowanych funkcji jednostkowych.

### 5. Macierz sztywności elementu tarczy

Energię sprężystą elementu tarczy przedstawić można w postaci

$$E_s = \frac{1}{2} \int \int \int (\sigma_{x_1} \varepsilon_{x_1} + \sigma_{x_2} \varepsilon_{x_2} + \sigma_{x_1 x_2} \varepsilon_{x_1 x_2}) dx^1 dx^2 dx^3.$$

Zakładając, że grubość elementu tarczy jest stała oraz uwzględniając związki

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{E} (\sigma_{x_1} - \nu \sigma_{x_2}), \quad \varepsilon_{x_2} = \frac{1}{E} (\sigma_{x_2} - \nu \sigma_{x_1}), \quad \varepsilon_{x_1 x_2} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{x_1 x_2},$$

energię sprężystą elementu tarczy przedstawimy w postaci

$$(5.1) \quad E_s = \frac{1}{2} \int \int D \left[ \varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{x_2}^2 + 2\nu \varepsilon_{x_1} \varepsilon_{x_2} + \frac{1}{2} (1 - \nu) \varepsilon_{x_1 x_2}^2 \right] dx^1 dx^2,$$

(5.2) gdzie  $D = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$  — sztywność tarczy.

W przypadku małych odkształceń słuszne są związki

$$\varepsilon_{x^j} = \frac{\partial u^j}{\partial x^j}, \quad j = 1, 2,$$

$$\varepsilon_{x_1 x_2} = \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1}.$$

Uwzględniając, że przemieszczenia  $u^j$  wyrażone są wzorem (4.5), odkształcenia względne przedstawimy w postaci

$$(5.3) \quad \varepsilon_{x^j} = \sum_{i,p} \sum_{k,q} [H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2)]_{,x^j} u_{ikpq}^j, \quad j = 1, 2,$$

$$\varepsilon_{x_1 x_2} = \sum_{i,p} \sum_{k,q} \{ [H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2)]_{,x^2} u_{ikpq}^1 + [H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2)]_{,x^1} u_{ikpq}^2 \}.$$

Uwzględniając (5.3) w (5.1), energię sprężystą elementu tarczy przedstawić można w postaci

$$E_s = \frac{1}{2} \sum_{i,p} \sum_{k,q} \sum_{j,r} \sum_{l,s} \{ C_{11}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^1 u_{jlr}^1 +$$

$$+ C_{12}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^1 u_{jlr}^2 + C_{21}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^2 u_{jlr}^1 + C_{22}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^2 u_{jlr}^2 \}.$$

Zapisując powyższy wzór krócej otrzymamy

$$E_s = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{i=0}^m \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^1 \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^1 C_{\alpha\beta}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^{\alpha} u_{jlr}^{\beta}.$$

Korzystając ze wzoru (4.4) oznaczmy

$$Q^{ikpq} = H^{pi}(\xi^1)H^{qk}(\xi^2).$$

Wtedy współczynniki  $C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}$  określone są wzorami

$$(5.5) \quad \begin{aligned} C_{11}^{ikpqjtrs} &= \iint D \left\{ Q_{,x^1}^{ikpq} Q_{,x^1}^{jtrs} + \frac{1}{2} (1-\nu) Q_{,x^2}^{ikpq} Q_{,x^2}^{jtrs} \right\} J d\xi^1 d\xi^2, \\ C_{12}^{ikpqjtrs} &= \iint D \left\{ \nu Q_{,x^1}^{ikpq} Q_{,x^2}^{jtrs} + \frac{1}{2} (1-\nu) Q_{,x^2}^{ikpq} Q_{,x^1}^{jtrs} \right\} J d\xi^1 d\xi^2, \\ C_{21}^{ikpqjtrs} &= C_{12}^{jtrsikpq}, \\ C_{22}^{ikpqjtrs} &= \iint D \left\{ Q_{,x^2}^{ikpq} Q_{,x^2}^{jtrs} + \frac{1}{2} (1-\nu) Q_{,x^1}^{ikpq} Q_{,x^1}^{jtrs} \right\} J d\xi^1 d\xi^2, \end{aligned}$$

gdzie  $J$  jest jacobianem przekształcenia.

Występujące we wzorach (5.5) pochodne  $Q_{,x^j}^{ikpq}$  wyznaczyć można z układu równań

$$(5.6) \quad \begin{aligned} Q_{,\xi^1}^{ikpq} &= Q_{,x^1}^{ikpq} x_{,\xi^1}^1 + Q_{,x^2}^{ikpq} x_{,\xi^1}^2, \\ Q_{,\xi^2}^{ikpq} &= Q_{,x^1}^{ikpq} x_{,\xi^2}^1 + Q_{,x^2}^{ikpq} x_{,\xi^2}^2. \end{aligned}$$

Stosując zasadę prac przygotowanych do elementu tarczy będącego w stanie równowagi pod działaniem sił zewnętrznych (dla tego elementu) można wykazać, że jeżeli energia odkształcenia wyrażona jest jako funkcja przemieszczeń uogólnionych, odpowiadających tym siłom, to

$$(5.7) \quad \frac{\partial E_s}{\partial u_i} = P_i.$$

Zróżniczkujmy więc wyrażenie (5.4) względem uogólnionego przemieszczenia węzłowego

$$\frac{\partial E_s}{\partial u_{ikpq}^\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^1 C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs} u_{jtrs}^\beta.$$

Uwzględniając poprzednie i (5.7) można napisać

$$(5.8) \quad P_{ikpq}^\alpha = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^1 C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs} u_{jtrs}^\beta,$$

gdzie  $P_{ikpq}^\alpha$  — uogólniona siła węzłowa, odpowiadająca uogólnionemu przemieszczeniu węzłowemu  $u_{ikpq}^\alpha$ ,

Porównując (5.8) z (1.1) widzimy, że współczynniki  $C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}$  określone wzorami (5.5) są poszukiwanymi współczynnikami macierzy sztywności elementu tarczy.

## 6. Sieć działań dla wyznaczenia macierzy sztywności

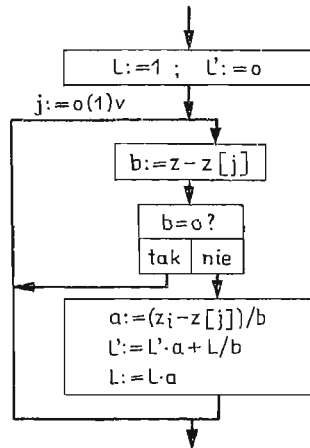
Obliczenie współczynników sztywności elementu tarczy wymaga wykonania bardzo dużej ilości rachunków. Dlatego też jedyną praktyczną drogą ich wyznaczenia jest wykorzystanie do obliczeń elektronicznej maszyny cyfrowej. Poniżej omówiona została sieć działań dla obliczenia tych współczynników.

Obliczenia współczynników macierzy sztywności podzielić można na dwa zasadnicze etapy. W etapie pierwszym, po wczytaniu danych dla całej tarczy, wyznacza się uogólnione współrzędne węzłowe dla wszystkich węzłów tarczy. W etapie drugim wyznacza się macierz sztywności dla danego elementu.

Jako dane wejściowe wprowadzamy współczynnik Poissona  $\nu$ , moduł sprężystości podłużnej  $E$ , grubość tarczy  $h$ , liczbę elementów, na które podzielono tarczę oraz współrzędne  $x^1, x^2$  węzłów tarczy. Wyznaczenie uogólnionych współrzędnych węzłowych przeprowadza się w oparciu o rozważania p. 3. Po pierwsze wyznaczyć należy pochodne współrzędnych węzłowych na podstawie wzoru (3.4.2). W tym celu wczytujemy numery węzłów należących do kolejnego elementu i na ich podstawie zapamiętuje się współrzędne węzłów w blokach  $x^1 [0:m, 0:n]$  i  $x^2 [0:m, 0:n]$ . W blokach  $\xi^1 [0:m]$  i  $\xi^2 [0:n]$  zapisujemy współrzędne węzłów w układzie  $\xi^1, \xi^2$ . Współrzędne te wyznacza się ze wzorów:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \xi^1 [i] &= -1 + \frac{2}{m} i, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ \xi^2 [j] &= -1 + \frac{2}{n} j, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Jak wynika ze wzoru (3.4.2), przy obliczaniu pochodnych zachodzi konieczność wielorotnego wyznaczania wartości wielomianu Lagrange'a  $L^i(z)$  i jego pierwszej pochodnej.



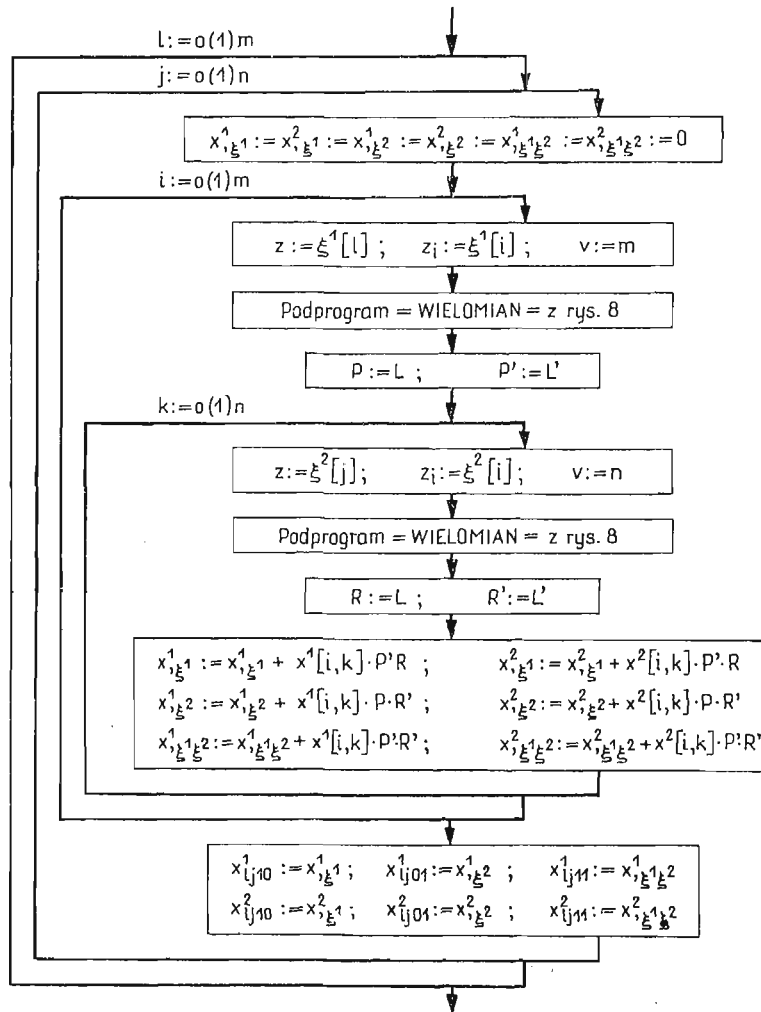
Rys. 8

Obliczenia te wykonywane są przez podprogram = WIELOMIAN = z rys. 8. Wartość wielomianu i jego pochodnej wyznacza się ze wzorów rekurencyjnych

$$(6.2) \quad \begin{aligned} L^{i*} &= L^i \frac{z - z_j}{z_i - z_j}, \\ L^{i*' } &= L^{i' } \frac{z - z_j}{z_i - z_j} + L^i \frac{1}{z_i - z_j}, \quad j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, v. \end{aligned}$$

Obliczenia pochodnych w węzłach elementu przeprowadza się według schematu z rys. 9. W opisany sposób oblicza się pochodne współrzędnych w węzłach kolejnych elementów,

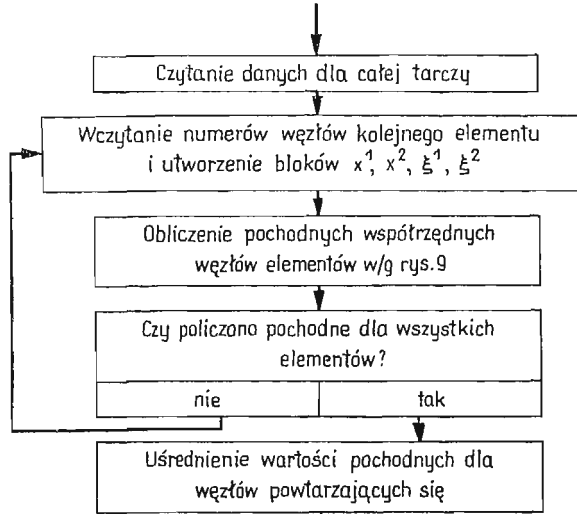
zapamiętując równocześnie ile razy powtórzył się dany węzeł. Po przeprowadzeniu obliczeń dla wszystkich elementów, w węzłach, które powtórzyły się więcej niż jeden raz oblicza się średnie arytmetyczne odpowiednich pochodnych. W wyniku tego postępowania mamy określony dla każdego węzła tarczy zespół uogólnionych współrzędnych  $x^1, x^2, x_{,\xi^1}^1, x_{,\xi^1}^2, x_{,\xi^2}^1, x_{,\xi^2}^2, x_{,\xi^1\xi^2}^1, x_{,\xi^1\xi^2}^2$ . Całość obliczeń uogólnionych współrzędnych węzłowych przebiegać będzie według programu z rys. 10.



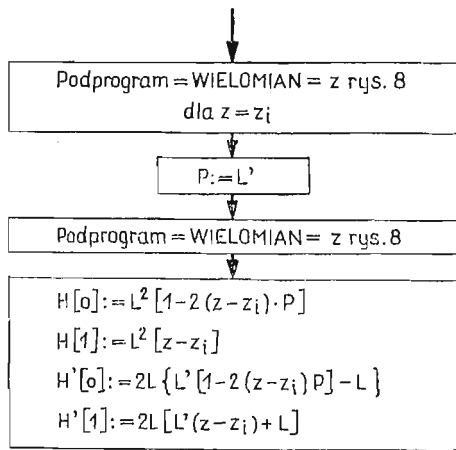
Rys. 9

Po zakończeniu etapu pierwszego przechodzi się do właściwego obliczenia współczynników macierzy sztywności. W etapie tym zachodzić będzie konieczność wielokrotnego wyznaczania wartości wielomianów Hermite'a i ich pierwszych pochodnych. Obliczenia te wykonuje podprogram = HERMIT = z rys. 11. Korzystając z podprogramu = WIELOMIAN = oblicza się  $L^i(z)$ ,  $[L^i(z)]'$  oraz  $[L^i(z_i)]'$ , a następnie korzystając z wzorów (2.2)

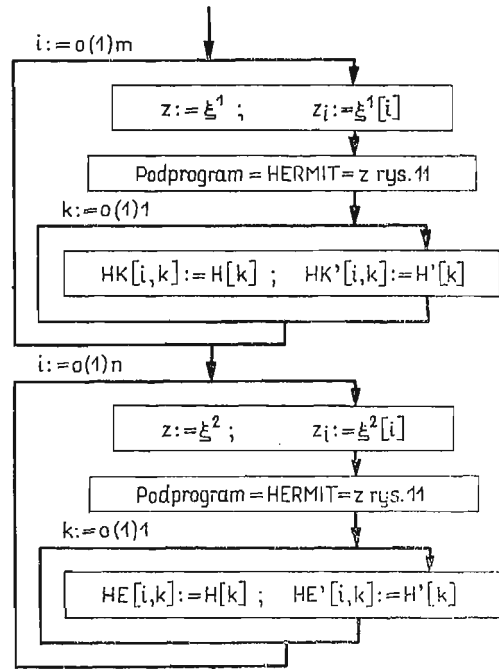
wyznaczamy wartość wielomianów Hermite'a rzędu zerowego i pierwszego oraz ich pochodnych. Wynik obliczeń zapamiętany jest w pomocniczych blokach  $H$  i  $H'$ . Obliczenia wartości wielomianów Hermite'a i ich pochodnych dla wszystkich węzłów elementu prze-



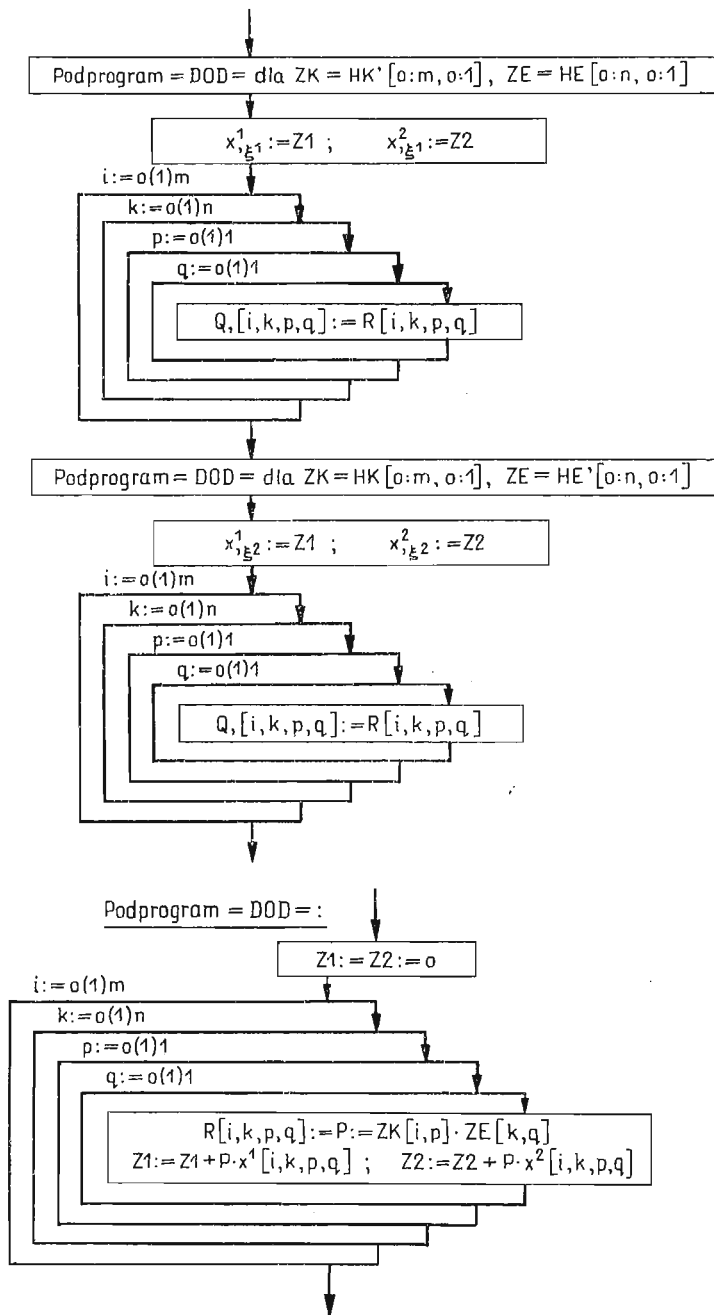
Rys. 10



Rys. 11

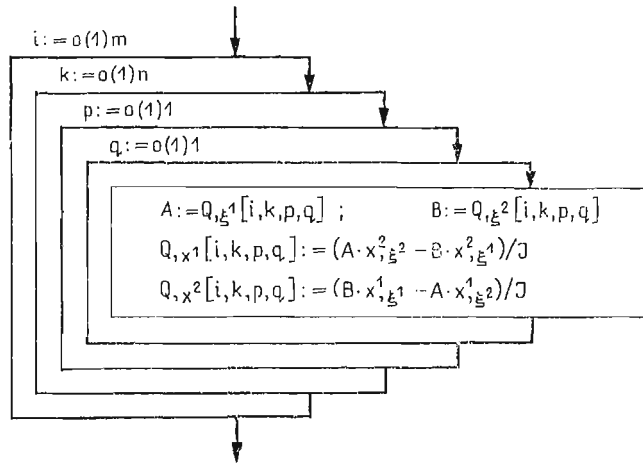


Rys. 12



Rys. 13

prowadza się według rys. 12. Wyniki obliczeń zapamiętane są w blokach  $HK, HK_{,\xi^1}, HE, HE_{,\xi^2}$ . Uprzednio wyznaczyć należy współrzędne węzłów w układzie  $\xi^1, \xi^2$  według wzorów (6.1). Następnym krokiem obliczeń jest wyznaczenie pochodnych względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  funkcji transformujących (3.3) oraz funkcji  $Q^{ikpq}$  określonych wzorem (4.4). Obliczenia te prowadzi się według programu z rys. 13. Występujący tu podprogram = DOD = oblicza odpowiednie pochodne względem jednej ze zmiennych  $\xi^1$  lub  $\xi^2$ . W podprogramie tym wykorzystane są bloki  $x^1$  i  $x^2$  zawierające uogólnione współrzędne węzłów elementu.



Rys. 14

Transformację funkcji  $Q_{,\xi^1}^{ikpq}$  i  $Q_{,\xi^2}^{ikpq}$  na funkcje  $Q_{,x^1}^{ikpq}$  oraz  $Q_{,x^2}^{ikpq}$  przeprowadza się według rys. 14 w oparciu o układ równań (5.6). Występujący tu jacobian przekształcenia (6.3) został wyliczony w kroku poprzednim

$$(6.3) \quad J = x_{,\xi^1}^1 x_{,\xi^2}^2 - x_{,\xi^2}^1 x_{,\xi^1}^2.$$

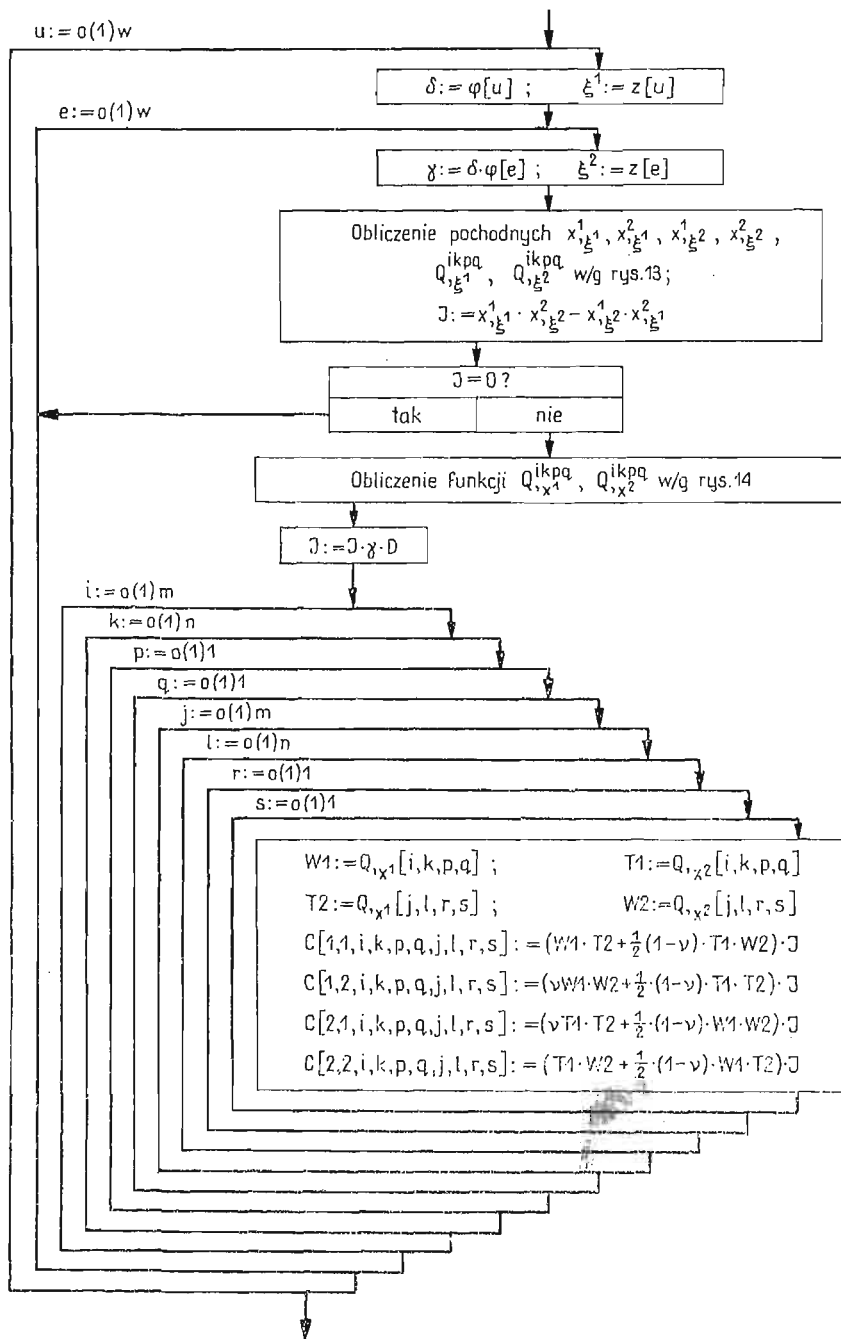
Całkowanie wzorów (5.5) przeprowadzamy numerycznie według wzoru kwadratur Gaussa [2]

$$(6.4) \quad C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs} = \iint F_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}(\xi^1, \xi^2) d\xi^1 d\xi^2 = \sum_{u=0}^w \varphi_u \sum_{e=0}^w \varphi_e F_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}(t_u, t_e),$$

gdzie  $F_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}$  są to wyrażenia podcałkowe wzorów (5.5),  $\varphi_j$  — współczynniki wzoru kwadratur Gaussa,  $t_j$  — pierwiastki wielomianu Legendre'a, nazywane węzłami wzoru kwadratur Gaussa. Liczbę węzłów należy przyjmować taką, aby błąd całkowania numerycznego funkcji podcałkowej (5.5), będącej wielomianem algebraicznym, był równy zeru. Dla funkcji podcałkowej typu  $\xi^{1p} \xi^{2q}$  liczba węzłów musi być taka, aby spełniony był warunek

$$(6.5) \quad p + q \leq 2w - 2.$$

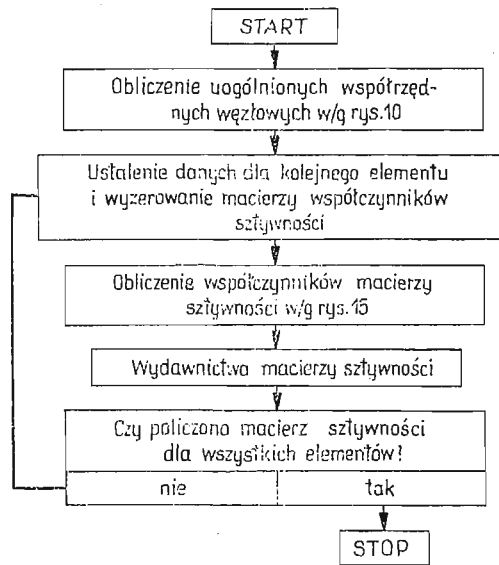
Należy zwrócić uwagę, że gdy jacobian przekształcenia  $J = 0$ , to funkcje podcałkowe wzorów (5.5) stają się zerem. Możemy dzięki temu pominąć sumowanie (6.4) i unikamy



Rys. 15



działania, w którym występuje dzielenie przez zero. Obliczenie wartości powyższych całek przedstawia program z rys. 15. Oczywiście przed wykonaniem tego programu należy wstępnie wyzerować macierz  $C_{\alpha\beta}^{ijklrs}$ . Zatem ostatecznie obliczenie macierzy sztywności elementów tarczy przebiegać będzie według programu z rys. 16.



Rys. 16

Na podstawie omówionej powyżej sieci działań opracowano program obliczeń macierzy sztywności na elektronowej maszynie cyfrowej ZAM 2-beta.

## 7. Uwagi końcowe

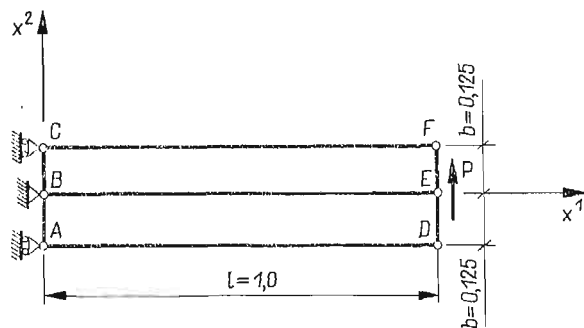
O dokładności metody elementów skończonych decyduje między innymi trafne przyjęcie postaci funkcji przedstawiającej przemieszczenia punktów tarczy. Zastosowanie w tych funkcjach, jak również w funkcjach transformujących układ  $Ox^1x^2$  na układ  $O\xi^1\xi^2$ , wielomianów Hermite'a ma tę zaletę, że zapewniamy w ten sposób w całym obszarze tarczy ciągłość przemieszczeń oraz ich pierwszych pochodnych względem  $x^1$  i  $x^2$ . Dzięki temu uzyskujemy w całym obszarze tarczy ciągłość odkształceń.

Korzystając z zaproponowanej metody wyznaczania macierzy sztywności przeprowadzono przykładowo obliczenia przemieszczeń prostokątnej tarczy obciążonej siłą styczną wzdłuż jednego boku (rys. 17). Tarczę podzielono na dwa elementy zawierające po 4 węzły każdy. Macierz sztywności dla każdego elementu obliczono według toku postępowania opisanego w p. 6.

Rozwiązanie ściśle dla omawianej tarczy, przy założeniu, że siła  $P$  jest rozłożona wzdłuż przekroju końcowego  $x^1 = l$  według paraboli, wynosi [5]:

$$u_D^1 = 48,0 \frac{P}{Eh}, \quad u_E^1 = 0, \quad u_F^1 = -48,0 \frac{P}{Eh},$$

$$u_D^2 = u_E^2 = u_F^2 = 267,0 \frac{P}{Eh}.$$



Rys. 17

Wartości przemieszczeń, uzyskane przy wykorzystaniu omawianej macierzy sztywność wynoszą:

$$u_D^1 = 52,78 \frac{P}{Eh}, \quad u_E^1 = -0,127 \frac{P}{Eh}, \quad u_F^1 = -52,78 \frac{P}{Eh},$$

$$u_D^2 = u_E^2 = u_F^2 = 300,30 \frac{P}{Eh}.$$

Błąd względny uzyskanych wyników nie przekracza 13%. Należy przypuszczać, że przy zwiększeniu liczby elementów, na które dzieli się tarczę, otrzymane wyniki będą jeszcze bliższe rozwiązaniu dokładnemu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Mc Graw-Hill, London-New York-Toronto-Sydney 1967.
2. Z. KOPAL, *Numerical analysis*, Chapman and Hall Ltd, London 1961.
3. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty*, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, nr 4 (200) 1969.
4. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
5. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.

## Резюме

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКА В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов состоит в замене сплошной среды дискретной моделью, состоящей из элементов, соединённых между собой конечным числом узлов. В методе определяется «матрица жесткости», с помощью которой можно представить внутренние обобщенные силы в узлах элемента как линейные функции перемещений узлов.

В работе представлен метод применения полиномов Эрмита для определения матрицы жесткости элемента диска, находящегося в плоском напряженном состоянии. Представлена также схема расчета матрицы жесткости на электронной вычислительной машине.

## Summary

## APPLICATION OF HERMITE POLYNOMIALS TO THE DETERMINATION OF THE STIFFNESS MATRIX OF PLATE ELEMENTS METHOD

The finite element method is based on replacing the continuum by a discrete model composed of elements connected in a finite number of nodes. The method consists in determining the so-called «stiffness matrix» which serves to express the generalized internal forces in nodes of the element as linear functions of the nodes displacement.

The present paper applies Hermite's polynomials for determining the stiffness matrix of the element subjected to plane stress. The flow diagram for preparing the computation programme of the stiffness matrix by means of a digital computer has also been given.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 sierpnia 1970 r.*

---