MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 9 (1971)

STATECZNOŚĆ WSTĘPNIE SPRĘŻONEGO WALCA KOŁOWEGO PRZY SKRĘCANIU

ELENA ZŁATANOWA (SOFIA)

Autorzy prac [1]–[4] rozważają różne zagadnienia stateczności pełnego walca kołowego poddanego skończonym odkształceniom. W pracy [5] zbadana została stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego bez obciążenia zewnętrznego. Niniejsza praca bada walec jak w pracy [5], nie posiadający stanu naturalnego, przy dużym skręcaniu. Obliczenia opierają się na teorii opracowanej przez Greena, Rivlina i Shielda w [6]. Stosuje się oznaczenia wprowadzone w [7].

1. Duże skręcanie walca z dyslokacją Volterry

Prosty walec kołowy o długości $\mathring{h}$ i promieniu $\mathring{a}$, wykonany z nieściśliwego materiału sprężystego, poddany jest następującym odkształceniom:

a) usunięciu lub dodaniu klina o dowolnym kącie rozwarcia φ, przez przecinanie walca półpłaszczyzną przechodzącą przez oś (por. [5]),

b) dużemu rozciąganiu lub ściskaniu,

c) skręcaniu o kąt ψz, przy czym z oznacza odległość od końca walca.

Ciało po takiej wstępnej deformacji oznaczamy przez B, a jego rozmiary przez h i a. Zagadnienie zawiera oprócz parametru ψ, następujące parametry deformacji, zdefiniowane przez:

$$\mu = a/\mathring{a}, \quad \varkappa = 2\pi/(2\pi-\varphi), \quad \lambda = h/\mathring{h}, \tag{1.1}$$

które ze względu na nieściśliwość materiału związane są zależnością

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda}}. \tag{1.2}$$

Za pomocą tej zależności rugować będziemy parametr μ. Dalsze związki będą zawierały tylko trzy niezależne parametry $\varkappa$, ψ, λ.

Wprowadzamy w ciele B walcowy układ współrzędnych $\{\vartheta^i\} = \{r, \vartheta, z\}$, który uważać będziemy za układ konwencyjny. Kartezjańskie współrzędne typowego punktu po odkształceniu i przed odkształceniem są

$$\begin{gathered} x_1 = r\cos\vartheta, \quad x_2 = r\sin\vartheta, \quad x_3 = z, \\ \mathring{x}_1 = \frac{r}{\mu}\cos\left(\frac{\vartheta}{\varkappa}-\psi z\right), \quad \mathring{x}_2 = \frac{r}{\mu}\sin\left(\frac{\vartheta}{\varkappa}-\psi z\right), \quad \mathring{x}_3 = \frac{z}{\lambda}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Wyznaczamy tensory metryczne g_{ij} ciała odkształconego oraz g_{ij} i $\mathring{g}^{ij}$ ciała nieodkształconego, stosując (1.2)

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad g=\det(g_{ij})=r^2, \tag{1.4}$$

$$\mathring{g}_{ij}=\begin{bmatrix}\varkappa\lambda&0&0\\0&r^2\dfrac{\lambda}{\varkappa}&-r^2\psi\lambda\\0&-r^2\psi\lambda&r^2\psi^2\lambda+\dfrac{1}{\lambda^2}\end{bmatrix},\quad \mathring{g}^{ij}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\varkappa\lambda}&0&0\\0&\psi^2\varkappa\lambda^2+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\varkappa}{\lambda}&\psi\varkappa\lambda^2\\0&\psi\varkappa\lambda^2&\lambda^2\end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

$$\mathring{g}=\det(\mathring{g}_{ij})=r^2.$$

Tensory metryczne (1.4) i (1.5) określają stan odkształcenia i pozwalają, w oparciu o wzory z [7], obliczyć niezmienniki stanu odkształcenia I_K, a także tensor naprężenia

$$\begin{aligned}I_1&=\mathring{g}^{ij}g_{ij}=\frac{1}{\lambda}\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)+\lambda^2(r^2\psi^2\varkappa^2+1),\\ I_2&=\mathring{g}_{rs}g^{rs}I_3=\lambda\left(\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)+\frac{1}{\lambda^2}(r^2\psi^2\varkappa\lambda^3+1),\\ I_3&=g|\mathring{g}=1.\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\tau^{ij}&=\Phi_1\mathring{g}^{ij}+\Phi_2 b^{ij}+pg^{ij};\\ \tau^{11}&=\Phi_1\frac{1}{\varkappa\lambda}+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\lambda}{\varkappa}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)+p,\\ r^2\tau^{22}&=\Phi_1\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\varkappa\lambda+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)+p,\\ \tau^{33}&=\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\left(\frac{\lambda}{\varkappa}+\varkappa\lambda\right)+p,\\ \tau^{23}&=\Phi_1\psi\varkappa\lambda^2+\Phi_2\psi\lambda,\\ \tau^{12}&=\tau^{13}=0,\end{aligned} \tag{1.7}$$

gdzie

$$\Phi_1=2\frac{\partial W}{\partial I_1},\qquad \Phi_2=2\frac{\partial W}{\partial I_2}.$$

Funkcja $W(I_1, I_2)$ jest potencjałem sprężystości określonym na jednostkę objętości ciała nieodkształconego. Z (1.6) wynika, że Φ_k podobnie jak I_k są funkcjami zmiennej r. Funkcję skalarową p wyznaczamy z warunku brzegowego

$$\tau^{11}=0,\quad \text{dla}\quad r=a \tag{1.8}$$

i równań równowagi

$$\nabla_i\tau^{ij}=0. \tag{1.9}$$

Symbol ∇_i oznacza kowariantne różniczkowanie w układzie $\{\vartheta^i\}$. Z (1.9) dla $j=2$ i $j=3$

wynika, że p jest funkcją tylko zmiennej r. Z równania dla $j = 1$ wyznaczamy

$$p = -\left[\Phi_1 \frac{1}{\varkappa\lambda} + \Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\varkappa} + \psi^2\varkappa\lambda r^2\right)\right] + \\ -\left(\frac{1}{\varkappa\lambda} + \frac{\varkappa}{\lambda}\right)\int_a^r (\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2)\frac{dr}{r} + \psi^2\varkappa^2\lambda^2\int_a^r \Phi_1 r dr \tag{1.10}$$

i ostatecznie

$$\tau_{11} = \psi^2\varkappa^2\lambda^2\int_a^r \Phi_1 r dr - \left(\frac{1}{\varkappa\lambda} - \frac{\varkappa}{\lambda}\right)\int_a^r (\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2)\frac{dr}{r},$$

$$\begin{aligned} r^2\tau^{22} &= \tau^{11} + \left(\frac{\varkappa}{\lambda} - \frac{1}{\varkappa\lambda}\right)(\Phi_1 + \lambda^2\Phi_2) + \Phi_1\psi^2\varkappa^2\lambda^2 r^2, \\ \tau^{33} &= \tau^{11} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\varkappa\lambda}\right)\left(\Phi_1 + \frac{\varkappa}{\lambda}\Phi_2\right) - \Phi_2\psi^2\varkappa\lambda r^2, \\ \tau^{23} &= \psi\lambda(\Phi\varkappa\lambda + \Phi_2). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Oznaczamy przez P^i siłę na jednostkę powierzchni na brzegu $z = h$ z normalną $n_i(0, 0, 1)$

$$P = \tau^{ij} n_i g_j,$$

gdzie g_j jest wektorem bazy, oraz wyznaczamy całkowitą siłę osiową N oraz moment M przenoszone prze walec

$$N = 2\pi\int_0^a P^3 r dr = 2\pi\int_0^a r dr\left\{\tau^{11} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\varkappa\lambda}\right)\left(\Phi_1 + \frac{\varkappa}{\lambda}\Phi_2\right) - \psi^2\varkappa\lambda r^2\Phi_2\right\}, \tag{1.12}$$

$$M = 2\pi\int_0^a P^2 r^3 dr = 2\pi\psi\lambda\int_0^a r^3(\Phi_1\varkappa\lambda + \Phi_2)dr. \tag{I.13}$$

2. Dodatkowe małe odkształcenia. Warunki utraty stateczności

Nałożymy na ciało B pole małych przemieszczeń $\varepsilon \underline{w}$. Przechodzi ono w stan $\overset{*}{B}$. Liniowe części przyrostów naprężenia i odkształcenia oznaczone primami wyznaczamy na podstawie wzorów z [6] i [7]. Przytoczymy tutaj ostateczne rezultaty. Oznaczając kowariantne współrzędne wektora małych przemieszczeń przez $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$, a ich cząstkowe pochodne przez $w_{1,1} = u_r$, $w_{1,2} = u_\vartheta$, ... itd, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} I_1' &= 2\left[\frac{1}{\varkappa\lambda}u_r + \left(\frac{\varkappa}{\lambda}r^2 + \psi^2\varkappa^2\lambda^2\right)(v_\vartheta + ru) + \lambda^2 w_z + \psi\varkappa\lambda^2(v_z + w_\vartheta)\right], \\ I_2' &= -2\left[\varkappa\lambda u_r + \frac{1}{r^2}\frac{\lambda}{\varkappa}(v_\vartheta + ru) + \left(r^2\psi^2\varkappa\lambda + \frac{1}{\lambda^2}\right)w_z - \psi\lambda(v_z + w_\vartheta)\right], \\ I_3' &= 2\left(u_r + \frac{1}{r^2}v_\vartheta + \frac{1}{r}u + w_z\right) = 0; \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\tau'^{11}=2u_r\left[A\frac{1}{\varkappa^2\lambda^2}-B\left(\lambda^2+\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)+F\left(\frac{1}{\varkappa\lambda^3}+\frac{1}{\varkappa^2}-1+\psi^2r^2\right)-p\right]+$$
$$+2\frac{1}{r^2}(v_\vartheta+ru)\left[A\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)-B\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}+\psi^2\lambda^2r^2\right)+\right.$$
$$\left.+F\left(\frac{\varkappa}{\lambda^3}+1-\frac{1}{\varkappa^2}+2\psi^2\varkappa^2r^2+\psi^4\varkappa^3\lambda^3r^4+\psi^2\varkappa\lambda^3r^2\right)+\Phi_2\left(\psi^2\varkappa\lambda r^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]+$$
$$+w_z\left\{A\frac{\lambda}{\varkappa}-B\left[\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)^2+\psi^2\lambda^2r^2+\frac{1}{\varkappa\lambda}\right]+\right.$$
$$\left.+F\left(\psi^2\varkappa\lambda^3r^2+1+\frac{\lambda^3}{\varkappa}-\psi^2r^2-\frac{1}{\varkappa\lambda^3}\right)+\Phi_2\frac{\lambda}{\varkappa}\right\}+$$
$$+2\psi(v_z+w_\vartheta)\left[A\lambda+B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda^2}{\varkappa}+\psi^2\lambda^2\varkappa r^2\right)+\right.$$
$$\left.+F\left(\varkappa+\lambda^3+\frac{1}{\varkappa}+\psi^2\varkappa^2\lambda^3r^2\right)+\Phi_2\lambda\right]+p';$$

(2.2)

$$r^2\tau'^{22}=2u_r\left\{A\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)-B\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\varkappa^2\lambda^2+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)+\right.$$
$$\left.+F\left[\frac{1}{\varkappa\lambda^3}+1-\varkappa^3+r^2\psi^2(1-\varkappa^2\lambda^3)\right]+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)\right\}+$$
$$+2\frac{1}{r^2}(v_\vartheta+ru)\left\{A\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)^2-B\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\lambda^2+\psi^2\lambda^2r^2\right)+\right.$$
$$\left.+F\left[\frac{\varkappa}{\lambda^3}+\varkappa^2-1+r^2\psi^2\varkappa^2\left(2+\varkappa\lambda-\frac{\lambda}{\varkappa}+r^2\psi^2\varkappa\lambda\right)\right]-p\right\}+$$
$$+2w_z\left\{A(\varkappa\lambda+\psi^2\varkappa^2\lambda^4r^2)-B\left[\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)^2+\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right]+\right.$$
$$\left.+F\left[1+\varkappa\lambda^3-\varkappa\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)^2+\psi^2\varkappa\lambda^3r^2\right]+\Phi_2\varkappa\lambda\right\}+$$
$$+2\psi(v_z+w_\vartheta)\left[A(\varkappa^2\lambda+\psi^2\varkappa^3\lambda^4r^2)+B\left(\frac{1}{\lambda}+\varkappa\lambda^3+\psi^2\varkappa\lambda^2r^2\right)+\right.$$
$$\left.+F(2\varkappa+\varkappa^2\lambda^3+2\psi^2\varkappa^2\lambda^3r^2)\right]+p',$$

$$\tau'^{33}=2u_r\left[A\frac{\lambda}{\varkappa}-B(1+\varkappa^2)\lambda^2+F\left(\frac{1}{\varkappa^2}+1-\varkappa\lambda^3\right)+\Phi_2\frac{\lambda}{\varkappa}\right]+$$
$$+2\frac{1}{r^2}(v_\vartheta+ru)\left\{A(\varkappa\lambda+\psi^2\varkappa^2\lambda^4r^2)+B\left(\frac{1}{\varkappa^2}+1\right)\lambda^2+\right.$$
$$\left.+F\left[1-\varkappa^2-\frac{\lambda^3}{\varkappa}+(1+\varkappa^2)\psi^2\varkappa\lambda^3r^2\right]+\Phi_2\varkappa\lambda\right\}+$$
$$+2w_z\left\{A\lambda^4-B\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\varkappa}{\lambda}+(1+\varkappa^2)\psi^2\lambda^2r^2+F\left(\frac{\lambda^3}{\varkappa}-\varkappa\lambda^3-1-\psi^2\varkappa\lambda^3\right)-p\right\}+\right.$$

c.d.(2.2)
$$+2\psi(v_z+w_\vartheta)\left[A\varkappa\lambda^4+B\left(\frac{1}{\varkappa}+\varkappa\right)\lambda^3+F(2+\varkappa^2)\lambda^3\right]+p';$$

$$\tau'^{13}=-\left(p+\frac{\lambda}{\varkappa}\Phi_2\right)(u_z+w_r)-\Phi_2\left(v_r+u_\vartheta-2\frac{1}{r}v\right)\psi\lambda,$$

$$r^2\tau'^{21}=-\left[p+\Phi_2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\psi^2\varkappa\lambda r^2\right)\right]\left(v_r+u_\vartheta-2\frac{1}{r}v\right)+\Phi_2(u_z+w_r)\psi\lambda r^2,$$

$$r^2\tau'^{32}=2u_r\left[A\lambda-B\varkappa\lambda^2+F\left(\frac{1}{\varkappa}-\varkappa^2\lambda^3\right)+\Phi_2\lambda\right]\psi r^2+$$
$$+2(v_\vartheta+ru)\psi\left[A(\varkappa^2\lambda+\psi^2\varkappa^3\lambda^4r^2)-B\frac{\lambda^2}{\varkappa}+F(\varkappa-\lambda^3+\psi^2\varkappa^2\lambda^3r^2)\right]+$$
$$+2w_z\left[A\varkappa\lambda^3-B\left(\frac{1}{\lambda}+\psi^2\varkappa\lambda^2r^2\right)+F(\lambda^3+\varkappa-\psi^2\varkappa^2\lambda^3r^2)\right]\psi r^2+$$
$$+2(v_z+w_\vartheta)\left[2A\psi^2\varkappa^2\lambda^4-2B\psi^2\varkappa\lambda^3+4F\psi^2\varkappa\lambda^3-\frac{1}{r^2}(\varkappa\lambda\Phi_2+p)\right]r^2.$$

Równanie $(2.1)_3$ jest równaniem nieściśliwości, gdyż $I_3=1$ pociąga za sobą warunek, $I_3=0$.

Tensor naprężenia całkowitego $\tau^{ij}+\varepsilon\tau'^{ij}$ spełnia warunki równowagi, gdy są spełnione równania

(2.3) $$\nabla\tau'^{ij}+\Gamma'^{j}_{ir}\tau^{ir}+\Gamma'^{r}_{ir}\tau^{ij}=0,$$

gdzie

$$A=2\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2},\qquad B=2\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2},\qquad F=2\frac{\partial^2 W}{\partial I_1\,\partial I_2}.$$

Przyrosty symboli Christoffela Γ'^{s}_{ij} podane zostały w pracy [5]. Równania (2.3) oraz $(2.1)_3$ tworzą układ czterech równań różniczkowych na funkcje u, v, w, p'. Ponieważ A, B, F oraz Φ_K są funkcjami niezmienników, które z kolei są funkcjami zmiennej r, obliczenia dla dowolnego materiału są niezmiernie skomplikowane. W związku z tym dalsze rozważania ograniczamy do z góry zadanego materiału, a mianowicie do tzw. neo-hookeanu, dla którego

(2.4) $$W(I_K)=C(I_1-3),$$

gdzie C jest dodatnią stałą. Wynika stąd

$$\Phi_1=2C,\qquad \Phi_2=A=B=F=0;$$

Uwzględniając (2.4), równania (1.10), (1.11), (2.2) przyjmują postać

(2.5)
$$\begin{aligned}\tau^{11}&=2C\frac{1}{\varkappa\lambda}+p,\\ r^2\tau^{22}&=\tau^{11}+2C\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\frac{1}{\varkappa\lambda}\right)+2C\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2,\\ \tau^{33}&=\tau^{11}+2C\left(\lambda^2-\frac{1}{\varkappa\lambda}\right),\\ \tau^{23}&=2C\psi\varkappa\lambda^3;\end{aligned}$$

$$dp/dr = -2C\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}-\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\frac{1}{r}+2C\psi^2\varkappa^2\lambda^2 r; \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &\tau'^{11} = -2pu_r+p', && \tau'^{31} = -p(u_z+w_r),\\ &r^2\tau'^{22} = -2p\left(\frac{1}{r^2}v_\vartheta+\frac{1}{r}v\right)+p', && r^2\tau'^{21} = -p\left(v_r+u_\vartheta-2\frac{1}{r}v\right),\\ &\tau'^{33} = -2pw_z+p', && \tau'^{32} = -p(v_z+w_\vartheta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podstawiamy teraz (2.5)-(2.7) oraz Γ'^s_{ij} do (2.3) i otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych na funkcje u, v, w oraz p':

$$\begin{aligned} &4C\frac{1}{\varkappa\lambda}u_{rr}+2C\left(3\frac{1}{\varkappa\lambda}-\frac{\varkappa}{\lambda}-\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r}u_r+\\ &\quad -2C\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r^2}u+2C\lambda^2u_{zz}+\\ &+2C\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2\right)\frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta}+2C\frac{1}{\varkappa\lambda}\frac{1}{r^2}v_{r\vartheta}-4C\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r^3}v_\vartheta+\\ &\quad +4C\psi\varkappa\lambda^2\left(u_{\vartheta z}-\frac{1}{r}v_z\right)+2C\frac{1}{\varkappa\lambda}w_{rz}+p'_r=0,\\ &2C\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)u_{r\vartheta}+2C\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+2\frac{\varkappa}{\lambda}+2\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r}u_\vartheta+\\ &\quad +2C\frac{1}{\varkappa\lambda}\left(v_{rr}-\frac{1}{r}v_r\right)+4C\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta}+\\ &\quad +2C\lambda^2v_{zz}+2C\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)w_{\vartheta z}+\\ &\quad +2C\psi\varkappa\lambda^2r^2\left(u_{rz}+3\frac{1}{r^2}v_{\vartheta z}+3\frac{1}{r}u_z+w_{zz}\right)+p'_\vartheta=0,\\ &2C\lambda^2\left(u_{rz}+\frac{1}{r^2}v_{\vartheta z}+2w_{zz}\right)+2C\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\lambda^2-\frac{\varkappa}{\lambda}-\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r}u_z+\\ &\quad +2C\frac{1}{\varkappa\lambda}\left(w_{rr}+\frac{1}{r}w_r\right)+2C\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}+4C\psi\varkappa\lambda^2w_{z\vartheta}+p'_z=0,\\ &u_r+\frac{1}{r}u+\frac{1}{r^2}v_\vartheta+w_z=0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ograniczamy się do przypadku płaskiego odkształcenia, niezależnego od zmiennej z, przyjmując $w=0$, $\frac{\partial}{\partial z}=0$. Układ (2.8) doprowadzamy do jednego równania różniczkowego na funkcję $u(r,\vartheta)$. Równanie $(2.8)_3$ przy powyższych założeniach spełnione jest tożsamościowo. Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varkappa\lambda}\left(r^2\frac{\partial^4u}{\partial r^4}+6r\frac{\partial^3u}{\partial r^3}+5\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}u\right)+\\ &+\frac{\partial^4u}{\partial r^2\partial\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^3u}{\partial r\partial\vartheta^2}\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\varkappa}{\lambda}+3\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)+\\ &+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}\left(\frac{1}{\varkappa\lambda}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4u}{\partial\vartheta^4}\left(\frac{\varkappa}{\lambda}+\psi^2\varkappa^2\lambda^2r^2\right)=0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

poprzednio wyrażając funkcje v i p' przez $u(r, \vartheta)$,

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = -r^2 \frac{\partial u}{\partial r} - ru, \tag{2.10}$$

$$\frac{\varkappa\lambda}{2C} \frac{\partial^2 p'}{\partial \vartheta^2} = r^2 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + 4r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u + \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \vartheta^2} (\varkappa^2 + \psi^2 \varkappa^2 \lambda^2 r^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}, \tag{2.11}$$

z jedynym warunkiem brzegowym

$$\tau'^{1s} = 0, \quad \text{dla } r = a, \tag{2.12}$$

$$-2pu_r + p' = 0,$$

$$v_r + u_\vartheta - 2\frac{1}{r} v = 0, \quad \text{dla } r = a, \tag{2.13}$$

$$u_z + w_r = 0,$$

który odpowiada zerowaniu się obciążenia na brzegu (na powierzchni bocznej). Trzeci warunek jest spełniony tożsamościowo.

Równanie (2.9) z warunkami (2.13) tworzą jednorodne zagadnienie brzegowe. Można pokazać, że zagadnienie to jest samosprzężone. Wtedy istnienie nietrywialnych rozwiązań (2.9) przy powyższych warunkach brzegowych będzie równoważne z warunkiem utraty stateczności [8].

Poszukujemy rozwiązania metodą Fouriera [9] w postaci iloczynu dwóch funkcji $\alpha(r)$ i funkcji własnej równania (2.9) $Q(\vartheta)$. Funkcją taką jest $\sin n\vartheta$ lub $\cos n\vartheta$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Podstawiamy więc $u(r\vartheta) = \alpha(r)Q(\vartheta)$ do (2.9) i otrzymujemy, niezależnie od tego czy wzięto funkcję $\sin n\vartheta$ czy $\cos n\vartheta$, równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu

$$r^2 \frac{d^4\alpha}{dr^4} + 6r \frac{d^3\alpha}{dr^3} + \frac{d^2\alpha}{dr^2} \{r^2[5 - n^2(1+\varkappa^2)] - r^4 n^2 H\} + \tag{2.14}$$

$$+ \frac{d\alpha}{dr} \{-r[1 + n^2(1+\varkappa^2)] - 3r^2 n^2 H\} + \alpha\{1 - (1+\varkappa^2)n^2 + n^4\varkappa^2 + r^2 n^2 (n^2 - 1) H\} = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$H = \psi^2 \varkappa^3 \lambda^3. \tag{2.15}$$

Podstawiając najpierw (2.10) i (2.11), a następnie $u(r\vartheta) = \alpha(r)Q(\vartheta)$ do (2.13) otrzymujemy ostateczną postać warunków brzegowych zagadnienia

$$\begin{aligned} & r^2 \frac{d^3\alpha}{dr^3} + 4r \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{d\alpha}{dr} [1 - n^2(\varkappa^2 - 2 + Hr^3)] + \frac{1}{r}(n^2 - 1)\alpha = 0, \quad \text{na } r = a, \\ & \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} + (n^2 - 1) \frac{1}{r^2} \alpha = 0, \quad \text{na } r = a. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Równania (2.14) i (2.16) są prawdziwe dla dowolnych ψ, $\varkappa$, λ. Ich rozwiązanie analityczne można znaleźć w przypadku, gdy kąt dodatkowego rozwarcia dodatkowego (usuniętego) klina φ jest mały. W celu znalezienia takiego rozwiązania ograniczamy dalsze rozważania do wartości $\varkappa$ bliskich jedności. Oznaczamy

$$\varkappa = 1 + \xi, \tag{2.17}$$

gdzie ξ jest małym parametrem; ξ^2 można pominąć w porównaniu z ξ. Będziemy tak samo pomijać wielkość ξH. Oznacza to, że ψ^2 jest tego samego rzędu co ξ, więc $\xi\psi^2 \sim 0$. Przy tych założeniach równanie (2.14) da się przedstawić w dwu równoważnych postaciach

$$[r^2D^2-rD-(1-n^2-\xi n^2)][r^2D^2+3rD+(1-n^2-\xi n^2)-n^2Hr^2]\alpha = 0. \tag{2.18}$$

lub

$$r^2[r^2D^2+3rD+(1-n^2-\xi n^2)-n^2Hr^2]\left[D^2+3\frac{1}{r}D+(1-n^2+\xi n^2)\frac{1}{r}\right]\alpha = 0, \tag{2.19}$$

gdzie $D = \dfrac{d}{dr}$.

Ponieważ operatory w drugich nawiasach kwadratowych są liniowo niezależne, liniowo niezależnymi rózwiązaniami równań (2.14) są rozwiązania dwu równań różniczkowych drugiego rzędu

$$\begin{gathered}[r^2D^2+3rD+(1-n^2-\xi n^2)-n^2Hr^2]\alpha = 0,\\ [r^2D^2-rD+(1-n^2-\xi n^2)]\alpha = 0.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Pierwsze z tych równań doprowadzone do postaci równania Bessela ma rozwiązanie

$$\alpha_1 = C_1\frac{1}{r}I_\nu(kr)+C_2\frac{1}{r}K_\nu(kr), \tag{2.21}$$

a drugie jest równaniem Eulera z rozwiązaniem

$$\alpha_2 = C_3r^{\varrho_1}+C_4r^{\varrho_2}. \tag{2.22}$$

Zatem ogólne rozwiązanie równania (2.14) przedstawia się następująco

$$\alpha = C_1\frac{1}{r}I_\nu(kr)+C_2\frac{1}{r}K(kr)+C_3r^{\varrho_1}+C_4r^{\varrho_2}, \tag{2.23}$$

gdzie C_i są stałymi całkowania, I_ν, K_ν są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu ν, dla urojonego argumentu, przy czym

$$\nu = n(1+\xi)^{1/2}, \tag{2.24}$$

$$k = nH^{1/2}, \tag{2.25}$$

a ϱ_i są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$\varrho^2-2\varrho+1-n^2-\xi n^2 = 0. \tag{2.26}$$

Ponieważ dla $r = 0$ $K_\nu \to \infty$ oraz $r^{\varrho_2} \to \infty$, ze względu na fizyczny sens zagadnienia konieczne jest przyjęcie $C_3 = C_4 = 0$. Ostateczna postać rozwiązania (2.23) jest

$$\alpha = A\frac{1}{kr}I_\nu(kr)+Br^{\varrho}. \tag{2.27}$$

Podstawiając (2.27) do warunków brzegowych (2.16) otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych na stałe A i B:

$$A\left\{\frac{I_\nu(ka)}{(ka)^2}[1+\nu(2-n^2-k^2a^2)]-\frac{1}{ka}I_{\nu-1}(ka)[2-n^2-(ka)^2]\right\}+ \tag{2.28}$$

$$-Ba^{\varrho-1}[(1-n^2-k^2a^2)(\varrho+1)+\varrho]=0,$$

$$A\left[\frac{I_\nu(ka)}{ka}\left(2-n^2-\frac{1}{2}\xi n^2+\nu\right)-I_{\nu-1}(ka)\right]-Ba^\varrho\left(\varrho-1-n^2-\frac{1}{2}\xi n^2\right)=0.$$

Układ ten posiada rozwiązania nietrywialne, gdy jego wyznacznik charakterystyczny równa się zeru. Przekształcając ten wyznacznik, możemy ostatecznie poszukiwany warunek utraty stateczności zapisać w postaci

$$\left[\varrho-\left(1-n^2-\frac{1}{2}\xi n^2\right)\right]\left\{\frac{I_\nu(ka)}{ka}[1+\nu(2-n^2-k^2a^2)]-I_{\nu-1}(ka)[2-n^2-(ka)^2]\right\}+ \tag{2.29}$$

$$-\{\varrho+[1-n^2-(ka)^2](\varrho+1)\}\left[\frac{I_\nu(ka)}{ka}\left(\nu+2-n^2-\frac{1}{2}\xi n^2\right)-I_{\nu-1}(ka)\right]=0.$$

Warunek ten określa dla danego n krytyczną wartość ka. Z reguły w zagadnieniach stateczności krytyczny stan najbliższy stanu naturalnego otrzymuje się przez przyjęcie najmniejszej możliwej liczby falowej odpowiadającej nietrywialnemu polu odkształceń. W rozważanym przypadku $n=0$ odpowiada brakowi odkształceń dodatkowych, a $n=1$ ruchowi sztywnemu. Pierwszą nietrywialną wartością liczby falowej jest więc $n=2$. Dla tej wartości liczby falowej i kilku szczególnych wartości parametru wstępnego sprężenia $\varkappa$ warunek utraty stateczności (2.29) sprowadza się do

$\varkappa$	ξ	ϱ	ν	warunek utraty stateczności
1,2	0,2	3,19	2,19	$kaI_{1,19}(ka)-6{,}35I_{2,19}(ka)=0$
1,0	0,0	3,00	2,00	$kaI_1(ka)-6I_2(ka)=0$
0,8	$-0{,}2$	2,8	1,80	$kaI_{0,8}(ka)-5{,}6I_{1,8}(ka)=0$

Warunek ten jest bardzo prosty i znalezienie krytycznego ka w oparciu o tablice funkcji Bessela rzędów ułamkowych nie nastręcza trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. E. W. WILKES, *On the stability of a circular tube under end thrust*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, **8** (1955), 88–100.
2. A. E. GREEN, A. J. M. SPENCER, *The stability of a circular cylinder under finite extention and torsion*, J. Math. Phys., 4, **37**, (1959). 316–338.
3. Z. WESOŁOWSKI, *The axially symmetric problem od stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., 3, **15** (1963), 383–395.
4. B. DUSZCZYK, *Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym*, Mech. Teor. i Stos., 4 **5** (1967).
5. E. ZŁATANOWA, Z. WESOŁOWSKI, *Stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego*, Rozpr. Inżyn. 2, **18** (1970).
6. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory od small elastic deformations superposed on finite elastic deformation*, Proc. Roy. Soc., A **211** (1952).

7. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
8. GUO ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformation*, Arch Mech Stos., 2, **15** (1963), 309–321.
9. Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*, Москва 1951.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассматривается прямой круговой цилиндр, подверженный конечной деформации путем добавления или вырезания клина с произвольным углом раствора и последующего восстановления связности материала. Полученный таким образом цилиндр подвергается конечному кручению и растяжению. Устойчивость цилиндра исследуется по методу малых виртуальных деформаций, наложенных на конечные деформации, причем добавочные деформации являются плоскими. Дается условие потери устойчивости для малых углов роствора клина.

Summary

STABILITY OF A PRESTRESSED CIRCULAR CYLINDER UNDER TORSION

A simple circular cylinder is subject to finite deformation by cutting out (or inserting) of a segment with an arbitrary vertex angle; the edges of the cut are welded together. Such a prestressed cylinder is then subject to finite torsion and extension. The stability of the cylinder is investigated by means of superposition of a small two-dimensional state of strain upon the finite strains. The stability conditions at small values of the vertex radius of the inclusion are presented.

WYŻSZY INSTYTUT MASZYNOWO-ELEKTRYCZNO-TECHNICZNY
SOFIA, BUŁGARIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1970 r.