

ZALĘŻNOŚĆ MAKSYMALNEJ SIŁY UDERZENIA OD WSPÓŁCZYNNIKA RESTYTUCJI

RYSZARD GRYBÓŚ (GLIWICE)

1. Wstęp

Podczas zderzenia dwóch ciał stałych powstaje siła wzajemnego oddziaływania, zwana siłą uderzenia. Jest ona wypadkową lokalnych naprężeń normalnych, jakie powstają na powierzchni styku ciał. Obszary otaczające te powierzchnie stają się źródłem intensywnej fali naprężeń, która rozprzestrzenia się po całej objętości ciał. Gdy fala ta dotrze do powierzchni granicznych ulega wielokrotnym odbiciom. Procesom tym towarzyszy dysypacja energii i «rozmywanie» czoła fali naprężeń.

Dlatego w teoretycznym ujęciu procesu zderzenia wyodrębniamy odkształcenia lokalne, które powstają w obszarze bliskim miejsca styku, oraz odkształcenia ogólne, które są związane z drganiami własnymi ciał sprężystych.

W klasycznej teorii uderzenia nie operuje się zasadniczo pojęciem siły uderzenia, a jedynie jej impulsem. Wykorzystując zasady zmienności oraz zachowania pędu, uzupełnione dodatkowo hipotezą odnośnie restytucji impulsu w fazie odciążania, możemy tą drogą określić jedynie prędkości ciał po zderzeniu oraz wartość impulsu uderzenia.

Jednakże klasyczna teoria uderzenia nie daje żadnej informacji odnośnie siły uderzenia. Tymczasem ta właśnie wielkość z oczywistych powodów stanowi punkt wyjścia we wszelkich obliczeniach wytrzymałościowych elementów, które poddane są obciążeniom udarowym.

Wprowadzony przez Newtona do teorii uderzenia współczynnik restytucji R ($0 \leq R \leq 1$) charakteryzuje stopień sprężystości zderzenia; gdy $R = 0$ mówimy, że uderzenie jest plastyczne, dla $R = 1$ — sprężyste, zaś przy wartościach pośrednich występuje uderzenie sprężysto-plastyczne lub niesprężyste. Należy jednak stwierdzić, iż są to określenia tylko umowne.

Aby wyjaśnić tę kwestię zauważymy, że zgodnie z twierdzeniem Carnota, współczynnik restytucji jest miarą straty energii kinetycznej (ΔT) ciał biorących udział w zderzeniu. Mianowicie, jeżeli dwa ciała o masach m_1 , m_2 zderzają się z prędkością względną $v_r = v_1 - v_2$, to wówczas

$$(1.1) \quad \Delta T = T - T' = \frac{1}{2}(1 - R^2)m_r v_r^2,$$

gdzie

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

T , T' — energia kinetyczna ciał przed i po zderzeniu.

Ale energia ΔT zostaje zamieniona w sposób nieodwracalny zarówno na pracę lokalnych odkształceń plastycznych (L_p), jak i w energię drgań sprężystych (E_d), czyli energię odkształceń ogólnych.

W zależności od ukształtowania powierzchni ciał w miejscu zderzenia, jak i w zależności od ogólnej konfiguracji ciał (pręt, belka, płyta, ciało kuliste itd.), wielkości L_p i E_d mogą mieć rozmaity udział w ubytku energii ΔT . Wiadomo np., że przy zderzeniu ciał o budowie zwartej znikomo mała część energii zderzenia zostaje związana w postaci energii drgań. W tym przypadku wartość $R \approx 0$ będzie świadczyć o tym, że prawie cała energia ΔT została zamieniona na pracę odkształceń plastycznych, a więc określenie «uderzenie plastyczne» odzwierciedla tu faktyczny stan rzeczy.

Nieco odmienna sytuacja występuje przy kolinearnym zderzeniu dwóch prętów prostych. W tym przypadku stosunek energii $E_d/\Delta T$ może przyjmować dowolne wartości z przedziału $(0; 1)$ i to samo można powiedzieć o współczynniku restytucji. W szczególności oznacza to, iż może być $R \ll 1$ mimo iż żaden pręt nie doznał w ogóle odkształceń plastycznych.

Współczynnik restytucji, jako wielkość wyznaczona doświadczalnie, ujmuje łącznie obie wspomniane straty. Wyznaczanie tego współczynnika nie nastęca na ogół trudności pomiarowych, dzięki czemu dysponujemy dziś w tym zakresie dość bogatym materiałem doświadczalnym. Jednakże wspomniany brak klasycznej teorii uderzenia, polegający na niemożności obliczenia siły uderzenia sprawia, iż znajomość współczynnika restytucji nie zaspokaja jeszcze w pełni potrzeb projektanta w przedmiocie danych wyjściowych, niezbędnych do obliczeń wytrzymałościowych. Bezpośredni zaś pomiar siły uderzenia jest wprawdzie możliwy, jednakże wiąże się z koniecznością użycia specjalnych czujników i skomplikowanej aparatury elektronicznej, a poza tym możliwy jest do przeprowadzenia na już istniejącym obiekcie lub modelu.

Z tych względów niewątpliwie celowa wydaje się próba powiązania współczynnika restytucji z maksymalną siłą uderzenia P_m . Ustalenie takiego związku dałoby projektantom wygodne narzędzie do obliczenia tak ważnej wielkości wyjściowej, jaką jest siła P_m .

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów umożliwiających obliczenie maksymalnej siły uderzenia, gdy znany jest współczynnik restytucji oraz niektóre inne wielkości dające się łatwo zmierzyć, jak prędkości odbicia i trwałe odkształcenie lokalne.

Wyprowadzimy także wzór na długość uderzenia sprężysto-plastycznego. Cel ten osiągniemy na drodze elementarnych rozważań matematycznych w oparciu o niektóre wyniki lokalnej teorii uderzenia sprężysto-plastycznego [1, 2].

W toku dalszych rozważań będziemy posługiwać się m.in. modelem tzw. ciała *quasi-sztynnego*. Jest to ciało, które pod działaniem zewnętrznych sił skupionych doznaje wyłącznie odkształceń lokalnych. Poza tym określenie to nie precyzuje charakteru tych odkształceń, które mogą być wyłącznie sprężyste lub sprężysto-plastyczne. Modelem ciała quasi-sztynnego posługiwał się Hertz proponując teorię zderzenia, w której wykorzystał wyniki swej statycznej teorii zagadnień stykowych. Wiadomo bowiem, że w quasi-statycznej, lokalnej teorii uderzenia (zwanej dalej krótko teorią Hertza) nie bierze się pod uwagę odkształceń ogólnych ciał biorących udział w zderzeniu, a jedynie ich odkształcenia lokalne. Takie podejście pozwala jednak określić zarówno maksymalną siłę (P_m),

jak i długość (τ) uderzenia sprężystego. Rzecz w tym, iż uderzenie sprężyste jest tylko wyidealizowanym przypadkiem, zaś każde zderzenie ciał rzeczywistych jest niesprężyste, w sensie nierówności $R < 1$.

2. Charakterystyka metody postępowania

Przyjmujemy następujący schemat rozumowania, które doprowadzi do ustawienia zależności $P_m = f(R)$.

Całkowita strata energii kinetycznej przy zderzeniu dwóch ciał rzeczywistych o dowolnej konfiguracji związana jest z pojawieniem się odkształceń plastycznych oraz ze wzbudzeniem drgań sprężystych. Zatem

$$(2.1) \quad \Delta T = L_p + E_d.$$

Weźmy najpierw pod uwagę zderzenie niesprężyste ciał quasi-sztywnych. W tym wyidealizowanym przypadku cała strata energii uderzenia związana jest wyłącznie z pracą lokalnych odkształceń plastycznych. Jeżeli stopień sprężystości takiego zderzenia scharakteryzujemy za pomocą współczynnika restytucji R_p ($0 < R_p < 1$), to zgodnie z twierdzeniem Carnota

$$(2.2) \quad L_p = \frac{1}{2}(1 - R_p^2)m_r v_r^2.$$

Z kolei weźmy pod uwagę drugi przypadek, mianowicie zderzenie ciał Hooke'a. Strata energii kinetycznej związana jest wówczas wyłącznie ze wzbudzeniem drgań sprężystych. Można przeto mówić tutaj o niesprężystym zderzeniu ciał idealnie sprężystych. Charakteryzując stopień sprężystości takiego zderzenia za pomocą współczynnika R_d ($0 < R_d < 1$) napiszemy podobnie, jak poprzednio

$$(2.3) \quad E_d = \frac{1}{2}(1 - R_d^2)m_r v_r^2.$$

Podstawienie wzorów (1.1), (2.2) i (2.3) do równości (2.1) daje

$$1 - R^2 = (1 - R_p^2) + (1 - R_d^2),$$

skąd

$$(2.4) \quad R^2 = R_p^2 + R_d^2 - 1.$$

Jeżeli potrafimy współczynniki restytucji R_p i R_d powiązać z maksymalną siłą uderzenia, to ze wzoru (2.4) znajdziemy poszukiwany związek $P_m = f(R)$. Zagadnienie to rozwiążemy w następnych paragrafach. W tym celu musimy rozpatrzyć oddzielnie oba wspomniane przypadki, tzn. zderzenie ciał quasi-sztywnych, a następnie zderzenie ciał Hooke'a.

Przedtem jednak celowe będzie przypomnieć niektóre wyniki teorii Hertza.

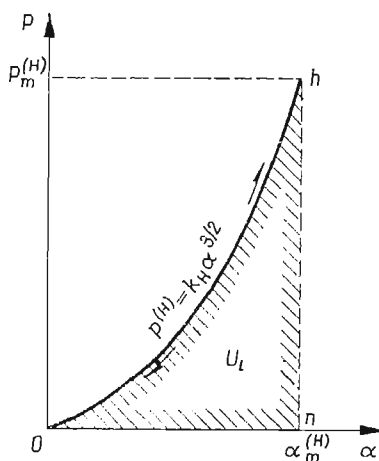
3. Sprężyste zderzenie ciał quasi-sztywnych

U podstaw teorii Hertza leży założenie, iż przy zderzeniu ciał quasi-sztywnych rozkład (lecz nie wartość!) naprężeń stykowych jest identyczny, jak przy statycznym nacisku wza-

jemnym ciał. Konsekwencją tego założenia jest przyjęcie zależności pomiędzy siłą stykową $P^{(H)}$ i zbliżeniem α w postaci znanego wzoru

$$(3.1) \quad P^{(H)} = k_H \alpha^{3/2},$$

który wyprowadza się w oparciu o założenia statycznej teorii zagadnień stykowych. Stała k_H zależy od geometrii powierzchni w otoczeniu punktu (linii) styku i od stałych sprężystości materiału.



Rys. 1

Wykresem funkcji (3.1) jest krzywa Oh na rys. 1. Pole Ohn pod tą krzywą obrazuje energię sprężystości U_t odkształceń lokalnych, która równa się energii kinetycznej straconej w pierwszej fazie uderzenia.

Wykorzystując ten fakt oblicza się maksymalną siłę zderzenia

$$(3.2) \quad P_m^{(H)} = k_H^{2/5} \left(\frac{5}{4} m_r v_r^2 \right)^{3/5}$$

oraz maksymalne zbliżenie

$$(3.3) \quad \alpha_m^{(H)} = \left(\frac{5}{4} \frac{m_r v_r^2}{k_H} \right)^{2/5}$$

W drugiej fazie uderzenia następuje sprężyste odciążenie, a więc obowiązuje nadal zależność (3.1), zaś krzywa hO jest zarazem krzywą odciążenia. Jak z tego wynika teoria Hertza opisuje zderzenie sprężyste ($R = 1$) ciał quasi-szttywnych, jako że odkształcenia ogólne są tu pomijane.

4. Niesprężyste zderzenie ciał quasi-szttywnych

W tym przypadku strata energii uderzenia związana jest wyłącznie z wystąpieniem trwałych odkształceń lokalnych, czyli

$$(4.1) \quad L_p = \frac{1}{2} (1 - R_p^2) m_r v_r^2.$$

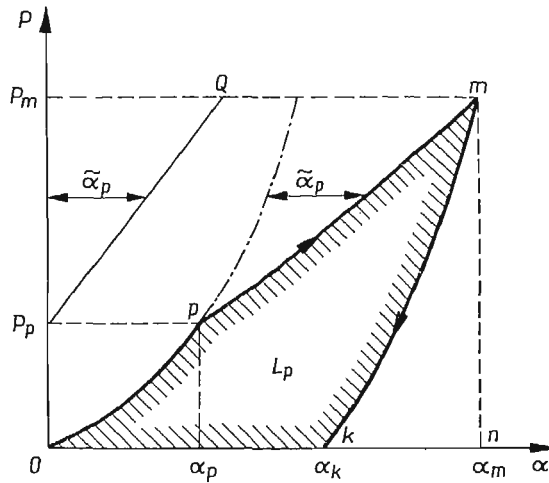
Proces uderzenia ma następujący przebieg. Początkowo odkształcenia są wyłącznie sprężyste, a więc związek pomiędzy siłą stykową i zbliżeniem ma postać (3.1). W miarę jak siła ta zwiększa się, wzrasta wyężenie materiału, aż przy wartości $P = P_p$ osiąga ono wartość graniczną. Gdy $P > P_p$, zaczynają się rozwijać lokalne odkształcenia plastyczne.

Doświadczenia polegające na dynamicznym wgniataniu kulki w próbkę stalową, a także teoretyczne rozwiązanie pewnego pokrewnego zagadnienia statycznego wykazują, że istnieje liniowa zależność pomiędzy siłą stykową a lokalnym odkształceniem plastycznym. Wobec tego w zakresie posprężystym będzie

$$(4.2) \quad \alpha = \left(\frac{P}{k_H} \right)^{2/3} + \frac{P - P_p}{k_p} \quad \text{dla } P \geq P_p,$$

k_p — stała. Obrazem tej zależności na rys. 2 jest odcinek krzywoliniowy pm , który otrzymuje się przez dodanie do krzywej Hertza odciętych wykresu P_pQ . Wykres ten obrazuje zależność między siłą stykową i plastyczną składową zbliżenia ciał.

Po osiągnięciu przez siłę stykową wartości maksymalnej ($P = P_m$) następuje faza sprężystego odciążania, podczas której siła maleje do zera. Jednakże dzięki odkształceniom plastycznym rozwiniętym w fazie obciążania pozostaje trwałe zbliżenie $\alpha = \alpha_k$.



Rys. 2

Na skutek tych odkształceń zmienia się także w sposób istotny geometria powierzchni styku, którą charakteryzuje się za pomocą *stopnia szczelności przylegania* powierzchni (por. [1] p. 19). W związku z tym proces zaniku lokalnych odkształceń sprężystych w fazie odciążania przebiega odmiennie, niż ich wzrost w fazie obciążania. Uwzględnimy to pisząc

$$(4.3) \quad P_{II} = k_{II}(\alpha - \alpha_k)^q \quad \text{dla} \quad \alpha_k \leq \alpha \leq \alpha_m,$$

gdzie k_{II} , q — stałe dodatnie różne odpowiednio od k_H i $3/2$; P_{II} — siła stykowa w fazie odciążania.

Pole $Opmk$ reprezentuje stratę energii kinetycznej przy niesprężystym zderzeniu ciał quasi-sztywnych, a zarazem pracę formowania odkształceń plastycznych. Zatem

$$(4.4) \quad L_p = \int_0^{\alpha_p} P^{(H)}(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_p}^{\alpha_m} P(\alpha) d\alpha - \int_{\alpha_k}^{\alpha_m} P_{II}(\alpha) d\alpha.$$

Podstawiamy tu wzory (3.1), (4.2), (4.3) i całkujemy. Po przekształceniach

$$(4.5) \quad L_p = \frac{1}{2k_p} (P_m^2 - P_p^2) + \frac{2}{5k_H^{2/3}} P_m^{5/3} - \frac{1}{(1+q)k_{II}^{1/q}} P_m^{1+q}.$$

Skojarzenie wzorów (4.1) i (4.5) daje poszukiwaną zależność $P_m = f(R_p)$ w postaci uwikłanej

$$(4.6) \quad R_p^2 = 1 - \frac{P_m^2 - P_p^2}{k_p m_r v_r^2} - \frac{2}{m_r v_r^2} \left[\frac{2}{5k_H^{2/3}} P_m^{3/5} - \frac{1}{(1+q)k_{II}^{1/q}} P_m^{1+q} \right].$$

Gdyby odciążanie przebiegało zgodnie z teorią Hertza, to ze wzoru (4.5) dla $q = 3/2$, $k_{II} = k_H$ otrzymalibyśmy

$$L_p = \frac{1}{2k_p} (P_m^2 - P_p^2)$$

i odpowiednio uproszczony wzór (4.6).

Jednakże pojawienie się lokalnych odkształceń plastycznych powoduje wzrost stopnia szczelności przylegania powierzchni, tak że wykładnik potęgowy q ma wartość $< 3/2$ i raczej staje się bliski 1. Zagadnieniem tym zajmiemy się szerzej w p. 9 i 10.

Tymczasem poświęcimy nieco uwagi wielkościom k_p i P_p . Stała k_p , zwana sztywnością przy odkształceniach plastycznych, zależy od konfiguracji powierzchni styku oraz od plastycznych własności materiałów. Jeśli np. ciało mające kuliste zaokrągloną powierzchnię (promień zaokrąglenia wynosi r) styka się z ciałem o powierzchni płaskiej, to wówczas przyjmuje się

$$k_p = 2\pi r \kappa_p.$$

Współczynnik κ_p zależy tylko od twardości Brinella (HB), przy czym zależność tę wyznacza się doświadczalnie. Jeśli materiałem obu stykających się ciał jest stal, to można korzystać ze wzoru

$$\kappa_p = 2 \cdot 10^4 + 0,45(HB)^2 \quad \text{dla} \quad 80 \leq HB \leq 300.$$

Siła P_p na granicy plastyczności zależy zarówno od konfiguracji powierzchni styku, jak i od mechanicznych własności materiału. Gdy powierzchnie styku są regularnie zakrzywione (kula, walec), można tę siłę obliczyć przy pomocy wzorów Hertza (por. przykład I w p. 10).

Jednakże w przypadku dowolnie, nieregularnie uformowanych powierzchni styku, lub przy podwyższonej temperaturze ciał (np. podczas kucia) określenie stałych k_p i P_p napotyka trudności wynikające bądź to z braku dokładnych, teoretycznie uzasadnionych wzorów, bądź też z braku odpowiednich danych pomiarowych. W równej mierze uwagi

te dotyczą stałych k_I i q . Stąd wynikają ograniczone możliwości efektywnego korzystania ze wzoru (4.6).

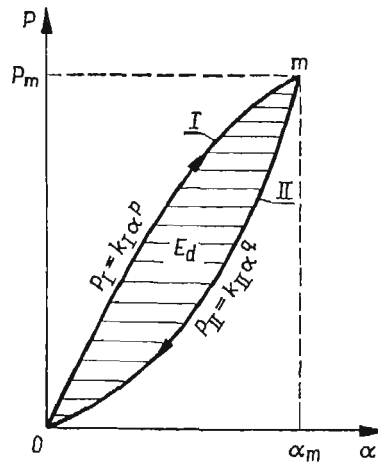
W dalszej części pracy (p. 7 i następne) zaproponowano uproszczoną metodę obliczania maksymalnej siły uderzenia, w której to metodzie omija się wspomniane trudności za pomocą pomiaru pewnych łatwo uchwytnych wielkości kinematycznych i geometrycznych.

5. Niesprężyste zderzenie ciał Hooke'a

Niesprężysty charakter zderzenia (w sensie nierówności $R_d < 1$) wynika w tym przypadku z faktu, iż część energii zderzenia zostaje nieodwracalnie zużyta na wzbudzenie drgań sprężystych obu zderzających się ciał. Jeżeli stopień sprężystości takiego zderzenia scharakteryzujemy za pomocą współczynnika R_d ($0 < R_d < 1$), to można napisać

$$(5.1) \quad E_d = (1 - R_d^2) \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

Przebieg procesu uderzenia w układzie współrzędnych P, α przedstawiony jest na rys. 3. Krzywa obciążania OIm opisana jest przez funkcję



Rys. 3

$$(5.2) \quad P_I = k_I \alpha^p,$$

gdzie: k_I, p — stałe dodatnie.

Z pomocą tego wzoru wyrazimy maksymalną siłę uderzenia P_m oraz maksymalne zbliżenie α_m , przez energię kinetyczną $m_r v_r^2 / 2$. W tym celu należy scałkować różniczkowe równanie ruchu środka masy układu z uwzględnieniem warunków początkowych $\alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = v_r$. Pomijając łatwe rachunki (które można znaleźć np. w [1] p. 20 i 22) otrzymujemy

$$(5.3) \quad P_m = k_I^{\frac{1}{1+p}} \left[(1+p) \frac{m_r v_r^2}{2} \right]^{\frac{p}{1+p}},$$

$$(5.4) \quad \alpha_m = \left(\frac{1+p}{k_I} \frac{m_r v_r^2}{2} \right)^{\frac{p}{1+p}}.$$

Oczywiście wzory (3.2) i (3.3) są szczególnym przypadkiem wzorów powyższych dla $p = 3/2$.

Krzywa odciążania $mIIO$ kończy się przy $\alpha = 0$ (wg założenia odkształceń plastycznych nie ma), więc równaniem tej krzywej będzie

$$(5.5) \quad P_{II} = k_{II} \alpha^q,$$

k_{II}, q — stałe dodatnie różne od k_I, p . Z równości

$$(5.6) \quad P_m = k_I \alpha_m^p = k_{II} \alpha_m^q$$

wynika następujący związek między sztywnościami lokalnymi w obu fazach uderzenia

$$(5.7) \quad k_I = k_{II} \alpha_m^{q-p}.$$

Pole $OImIIO$, ograniczone krzywymi obciążania i odciążania, reprezentuje energię drgań wzbudzonych uderzeniem. W takim razie

$$(5.8) \quad E_d = \int_0^{\alpha_m} k_I \alpha^p d\alpha - \int_0^{\alpha_m} k_{II} \alpha^q d\alpha = \frac{k_I}{1+p} \alpha_m^{1+p} - \frac{k_{II}}{1+q} \alpha_m^{1+q}$$

lub po wyeliminowaniu k_{II} z pomocą wzoru (5.7)

$$(5.9) \quad E_d = k_I \alpha_m^{1+p} \frac{q-p}{(1+p)(1+q)}.$$

Oczywiście musi być $E_d > 0$, skąd wynika że $p < q$. Wykorzystując jeszcze (5.4) otrzymujemy następujący wzór na energię drgań

$$(5.10) \quad E_d = \frac{q-p}{1+q} \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

Porównując prawe strony wzorów (5.1) i (5.10) otrzymujemy ważny związek między współczynnikiem restytucji oraz parametrami p i q

$$(5.11) \quad 1 - R_d^2 = \frac{q-p}{1+q} \quad \text{lub} \quad R_d = \sqrt{\frac{1+p}{1+q}}.$$

W poszukiwaniu dalszych równań, wiążących niewiadome p, q, k_I i k_{II} przeanalizujemy ruch układu podczas odciążania. W tej fazie uderzenia, czyli dla $t \geq \tau_I$ (τ_I — długość pierwszej fazy) obowiązuje następujące równanie ruchu

$$(5.12) \quad m_r \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = k_{II} \alpha^q$$

oraz warunki początkowe

$$(5.13) \quad P_{II} = P_m, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \text{dla} \quad t = \tau_I.$$

Po pierwszym całkowaniu otrzymujemy wzór na prędkość zaniku zbliżenia

$$(5.14) \quad \frac{d\alpha}{dt} = - \left[\frac{2k_{II}^{-1/q}}{(1+q)m_r} \left(P_m^{1+q} - P_{II}^{1+q} \right) \right]^{1/2}.$$

Stąd obliczymy względną prędkość v'_r odbicia ciał. Mianowicie dla $t = \tau$ ($\tau = \tau_I + \tau_{II}$ — długostrwość uderzenia) jest $P_{II} = 0$ oraz $d\alpha/dt = v'_r$. Zatem

$$(5.15) \quad v'_r = - \left[\frac{2k_{II}^{-1/q}}{(1+q)m_r} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1+q}{2q}}.$$

Ponieważ zaś współczynnik restytucji $R_d = |v'_r/v_r|$, przeto

$$(5.16) \quad R_d = \left[\frac{2k_{II}^{-1/q}}{(1+q)m_r v_r^2} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1+q}{q}}.$$

Stąd

$$(5.17) \quad P_m = k_{II}^{\frac{1}{1+q}} \left[(1+q) R_d^2 \frac{m_r v_r^2}{2} \right]^{-\frac{q}{1+q}}.$$

Jeżeli wyliminujemy w tym wzorze R_d z pomocą równości (5.11) i wynik ten porównamy z prawą stroną wzoru (5.3), to otrzymamy następujący związek między niewiadomymi

$$(5.18) \quad \frac{k_I^{1+q}}{k_{II}^{1+p}} = \left[(1+p) \frac{m_r v_r^2}{2} \right]^{q-p}.$$

6. Długostrwość uderzenia i jej związek ze współczynnikiem restytucji

Całkowanie równania typu (5.12), jednakże napisanego dla pierwszej fazy uderzenia, prowadzi do następującego wzoru na długostrwość tej fazy

$$(6.1) \quad \tau_I = \frac{\sqrt{\pi} m_r v_r}{2P_m} \gamma(p),$$

gdzie

$$(6.2) \quad \gamma(p) \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1+p}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+p}{2+2p}\right)},$$

Γ — funkcja gamma. W przedziale $0 < p \leq 2$ funkcja $\gamma(p)$ jest prawie liniowa i można ją aproksymować wzorem

$$(6.3) \quad \gamma(p) \approx 1,150 + 0,622p.$$

Błąd tego przybliżenia nie przekracza +1%.

Chcąc wyznaczyć długostrwość τ_{II} drugiej fazy uderzenia skorzystamy z równania (5.14). Całkując je względem t otrzymujemy całkowity związek między czasem i aktualną wartością siły uderzenia P_{II} w fazie odciążania

$$t - \tau_I = \left(\frac{1+q}{2q^2} \frac{m_r}{k_{II}^{1/q}} \right)^{1/2} \int_{P_{II}}^{P_m} P^{\frac{1-q}{q}} \left(P_m^{\frac{1+q}{q}} - P^{\frac{1+q}{q}} \right)^{-1/2} dP.$$

Jeżeli jako dolną granicę całkowania przyjmiemy $P_{II} = 0$, co ma miejsce w chwili końcowej uderzenia ($t = \tau$), to otrzymamy wzór na τ_{II}

$$(6.4) \quad \tau_{II} = \tau - \tau_I = \left[\frac{\pi m_r}{2(1+q)k_I^{1/q}} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1-q}{2q}} \gamma(q).$$

Wzór ten przekształcamy do postaci

$$\tau_{II} = \left[\frac{2}{(1+q)k_I^{1/q} m_r v_r^2} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1+q}{2q}} \frac{\sqrt{\pi m_r v_n}}{2P_m} \gamma(q),$$

a gdy podstawić tu formuły (5.16) i (6.1) to okazuje się, że

$$(6.5) \quad \tau_{II} = R_d \tau_I \frac{\gamma(q)}{\gamma(p)}.$$

Ten nowy, interesujący związek między długością obu faz uderzenia niesprężystego jest uogólnieniem wcześniej wyprowadzonego wzoru $\tau_{II} = R_d \tau_I$ (por. [1] p. 25), który jest słuszny w przypadku liniowej charakterystyki podatności lokalnej [wówczas $p = q = 1$, czyli $\gamma(p) = \gamma(q)$]. Wzór (6.5) wykorzystamy w toku dalszych rozważań.

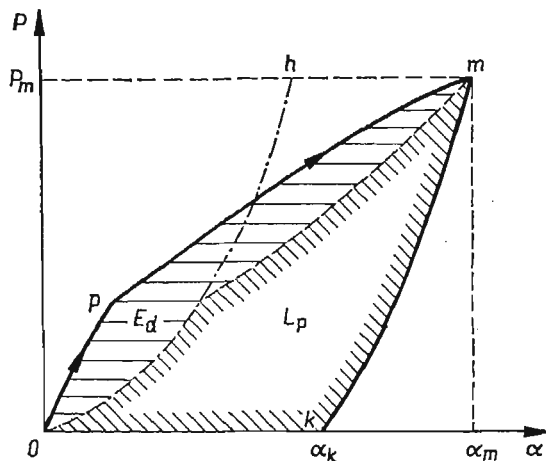
Tymczasem napiszemy jeszcze wzór na długość uderzenia niesprężystego

$$(6.6) \quad \tau = \tau_I + \tau_{II} = \frac{\sqrt{\pi m_r v_r}}{2P_m} [\gamma(p) + R_d \gamma(q)].$$

Występującą tu wielkość P_m obliczamy ze wzoru (5.3).

7. Uproszczona teoria niesprężystego zderzenia ciał elasto-plastycznych

Dotychczas rozpatrywaliśmy jedynie wyidealizowane przypadki zderzenia ciał stałych pomijając bądź to drgania wzbudzone uderzeniem, bądź też odkształcenia plastyczne. Odpowiednio do tego proces uderzenia przedstawiony w płaszczyźnie miał przebieg,



Rys. 4

jak na rys. 2 lub rys. 3. Tymczasem proces niesprężystego zderzenia ciał rzeczywistych, a więc elasto-plastycznych, ma przebieg jak na rys. 4. Jest to niejako «superpozycja» wykresów z rys. 2 i 3.

Pole $Opmk$ reprezentuje stratę energii kinetycznej, na którą składa się zarówno praca odkształceń plastycznych, jak i energia drgań sprężystych. Stopień sprężystości takiego zderzenia charakteryzujemy za pomocą współczynnika restytucji R . Daje się on stosunkowo łatwo wyznaczyć za pomocą pomiaru względnej prędkości odbicia ciał. W literaturze (np. [1] [2]) znajdujemy wiele danych empirycznych dotyczących współczynnika restytucji, zarejestrowanych przy rozmaitych warunkach uderzenia.

W oparciu o wzory wyprowadzone w poprzednich paragrafach możemy ustalić związki między współczynnikiem R i siłą P_m . Mianowicie na podstawie wzorów (2.4), (4.6) i (5.11) znajdujemy po przekształceniach

$$(7.1) \quad R^2 = \frac{1+p}{1+q} - \frac{2}{m_r v_r^2} \left[\frac{P_m^2 - p_p^2}{2k_p} + \frac{2}{5k_H^2/3} P_m^{3/5} - \frac{1}{(1+q)k_{II}^{1/q}} P_m^{1+q} \right].$$

Wyraz pierwszy z prawej strony tego wzoru związany jest z energią drgań (E_d) wzbudzonych uderzeniem, pozostałe wyrazy określają wpływ pracy odkształceń plastycznych (L_p) na wartość współczynnika restytucji. Udział tych składników w całkowitej stracie energii kinetycznej (ΔT) układu jest rozmaity w zależności od dwóch czynników, które będziemy dalej zwali krótko warunkami uderzenia. Chodzi tu o geometrię powierzchni zetknięcia, określaną za pomocą stopnia szczelności przylegania oraz energię uderzenia, rozumianą jako energia kinetyczna ciał bezpośrednio przed zderzeniem.

Tak np., gdy ciała o budowie zwartej uderzają się powierzchniami płaskimi, przy czym energia uderzenia jest stosunkowo niewielka, to odkształcenia plastyczne na ogół nie wystąpią ($L_p = 0$), a wtedy $\Delta T = E_d$. Zresztą w tym przypadku energia drgań stanowi w ogóle bardzo małą część energii uderzenia, w związku z czym współczynnik restytucji osiąga wartości bliskie jedności. Do wniosku tego prowadzą zarówno obliczenia teoretyczne [4], jak i bezpośrednie pomiary wykonane przy zderzaniu dwóch kul z umiarkowanymi prędkościami [5].

Natomiast gdy dwa pręty proste zderzają się współosiowo płaskimi powierzchniami czołowymi, przy czym również nie ma odkształceń plastycznych, to jednak energia drgań podłużnych może zaabsorbować dowolnie dużą część energii uderzenia, wskutek czego współczynnik restytucji przyjmie dowolną wartość z przedziału (0; 1).

Odmierna sytuacja występuje przy kuciu metali. Tutaj dominująca część energii uderzenia zostaje zużyta na pracę plastycznego formowania odkuwki ($\Delta T \approx L_p$), choć pewna jej część przekształca się również w energię drgań kowadła, szaboty i fundamentu.

Jak wspomniano poprzednio praktyczne wykorzystanie skądinąd prostego wzoru (7.1) jest utrudnione z uwagi na trudność określenia parametrów k_p , P_p , k_{II} i q . Z tego powodu w dalszym ciągu artykułu podamy pewną uproszczoną metodę opisu zderzenia ciał elasto-plastycznych, które doprowadzi do wykrycia prostych zależności między współczynnikiem restytucji i parametrami charakteryzującymi proces uderzenia, co w konsekwencji umożliwi nam obliczenie maksymalnej siły zderzenia.

Weźmy najpierw pod uwagę pierwszą fazę uderzenia, czyli obciążanie. Zaniedbując szczegóły przejścia od stanu sprężystego do sprężysto-plastycznego przyjmiemy, iż w tej fazie obowiązuje zależność (5.2), czyli

$$(7.2) \quad P_I = k_I \alpha^p \quad \text{dla } 0 \leq \alpha \leq \alpha_m.$$

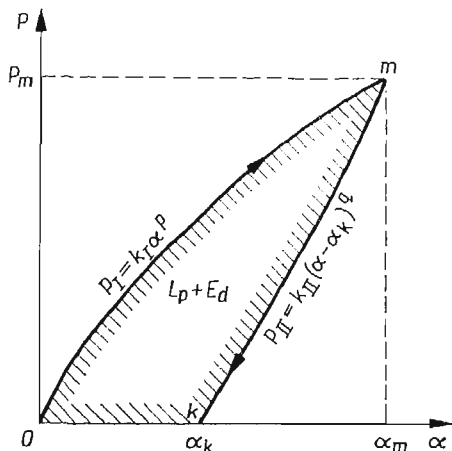
Tym samym wzory (5.3) i (5.4) zachowują ważność.

Co się tyczy fazy drugiej, w której następuje sprężyste odciążenie, to siła stykowa maleje tu wraz ze sprężystą składową zbliżenia od wartości maksymalnej do zera według równania

$$(7.3) \quad P_{II} = k_{II}(\alpha - \alpha_k)^q \quad \text{dla } \alpha_k \leq \alpha \leq \alpha_m,$$

albowiem zbliżenie sprężyste stanowi różnicę zbliżenia całkowitego (α) i plastycznego (α_k).

A zatem w proponowanym tu ujęciu przybliżonym wykres przebiegu uderzenia na



Rys. 5

płaszczyźnie układu P, α aproksymujemy dwoma łukami krzywych, jak na rys. 5. Strata energii uderzenia wynosi

$$(7.4) \quad \Delta T = k_I \int_0^{\alpha_m} \alpha^p d\alpha - k_{II} \int_{\alpha_k}^{\alpha_m} (\alpha - \alpha_k)^q d\alpha = \frac{k_I}{1+p} \alpha_m^{1+p} - \frac{k_{II}}{1+q} (\alpha_m - \alpha_k)^{1+q}.$$

Po wyeliminowaniu k_{II} z pomocą równości

$$(7.5) \quad P_m = k_I \alpha_m^p = k_{II} (\alpha_m - \alpha_k)^q$$

otrzymujemy

$$\Delta T = \frac{k_I \alpha_m^{1+p}}{1+q} \left(\frac{q-p}{1+p} + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right).$$

Podstawienie do tej formuły wzorów (1.1) i (5.4) prowadzi do następującej zależności

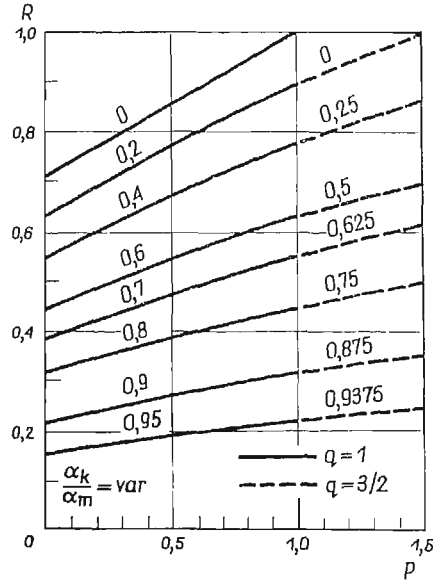
$$1 - R^2 = \frac{1+p}{1+q} \left(\frac{q-p}{1+p} + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right),$$

która jest uogólnieniem wzoru (5.11) na przypadek zderzenia wywołującego odkształcenia plastyczne. Stąd wynika

$$(7.6) \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_m} = 1 - \frac{1+q}{1+p} R^2.$$

Obrazem tej zależności są krzywe na rys. 6, gdzie linie ciągłe odnoszą się do $q = 1$, zaś przerywane do $q = 3/2$ (te ostatnie pokrywają się z liniami ciągłymi w przedziale $[0,1]$). Liczby nad liniami oznaczają wartość stosunku zbliżenia trwałego do maksymalnego (α_k/α_m). Wykres na rys. 6 jest pomocny przy wyznaczaniu niewiadomej p lub q .

W dalszym ciągu ze wzoru (7.6) obliczamy α_m i porównujemy z prawą stroną równości (5.4). Po wykonaniu łatwych przekształceń otrzymujemy wzór na współczynnik



sztywności w fazie obciążania

$$(7.7) \quad k_T = (1+p) \left[\frac{1}{\alpha_k} \left(1 - \frac{1+q}{1+p} R^2 \right) \right]^{1+p} \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

Wreszcie podstawienie (7.7) do wzoru (5.3) daje po przekształceniach

$$(7.8) \quad P_m = \frac{1+p - (1+q)R^2}{\alpha_k} \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

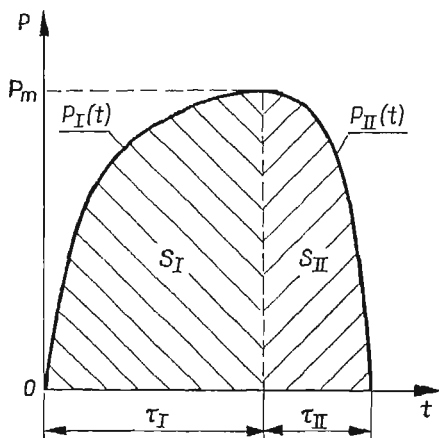
Ta stosunkowo prosta formuła umożliwia obliczenie maksymalnej siły uderzenia sprężysto-plastycznego, gdy znane są: współczynnik restytucji, stałe p i q , trwałe zbliżenie oraz energia uderzenia.

W dalszym ciągu można analizować fazę odciążenia biorąc za punkt wyjścia równanie różniczkowe (5.12), w którym jedynie zamiast α trzeba podstawić $(\alpha - \alpha_k)$. Ale całkowanie tego równania prowadzi do wzorów (5.16) i (5.17), które w takim razie są słuszne również w przypadku zderzenia sprężysto-plastycznego. To samo można powiedzieć o wzorach na długość uderzenia; w szczególności będziemy dalej korzystać ze wzoru (6.5).

Tym niemniej ilość wyprowadzonych dotychczas równań okazuje się jeszcze niewystarczająca do określenia wszystkich niewiadomych, w szczególności wykładników potęgowych p i q .

8. Aproksymacja czasowego przebiegu siły stykowej i równanie zasady pędu

W dążeniu do wyprowadzenia nowych, niezależnych związków pomiędzy p , q , k_I i k_{II} zanalizujemy proces uderzenia w aspekcie czasowego przebiegu siły stykowej $P(t)$. Rozważania ograniczymy do przypadku, kiedy funkcja $P(t)$ posiada jedno maksimum w przedziale $[0, \tau]$ (rys. 7). Pola zakreśkowane pod krzywymi $P_I(t)$ i $P_{II}(t)$ obrazują impulsy odpowiednio pierwszej i drugiej fazy uderzenia.



Rys. 7

Analiza wykresów tego typu, uzyskanych przy zderzeniu ciał z rozmaitych metali i stopów, nasunęła autorom pracy [2] myśl aproksymowania tej zależności za pomocą funkcji

$$P_I(t) = P_m \left(\sin \frac{\pi t}{2\tau_I} \right)^{9/(10-p)} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \tau_I,$$

gdzie p jest tą samą stałą, która występuje we wzorze (7.2). W oparciu o tę zależność możemy określić impuls pierwszej fazy uderzenia

$$S_I = P_m \int_0^{\tau_I} \left(\sin \frac{\pi t}{2\tau_I} \right)^{9/(10-p)} dt.$$

Wprowadzamy nową zmienną całkowania $\pi t/2\tau_I = x$ oraz stałą $b = \frac{p-1}{2(10-p)}$. Wobec tego $\frac{9}{10-p} = 2b+1$ oraz

$$S_I = \frac{2}{\pi} P_m \tau_I \int_0^{\pi/2} \sin^{2b+1} x dx.$$

Ponieważ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2b+1} x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)}{2\Gamma\left(b+\frac{3}{2}\right)} \equiv \bar{\sigma}[b(p)] = \sigma(p),$$

przeto ostatecznie piszemy

$$(8.1) \quad S_I = \frac{2}{\pi} P_m \tau_I \sigma(p).$$

Wiadomo ([1] p. 24), że przy liniowej charakterystyce podatności lokalnej (tzn. dla $p = 1$) występuje sinusoidalny impuls uderzenia, który ma wartość $(2/\pi)P_m\tau_I$. Mnożnik $\sigma(p)$ we wzorze (8.1) stanowi przeto «poprawkę» uwzględniającą nieliniowość zagadnienia; oczywiście $\sigma(1) = 1$.

Funkcja $\sigma(p)$, podobnie jak $\gamma(p)$, jest prawie liniowa, mianowicie

$$(8.2) \quad \sigma(p) \approx 1,03 - 0,03p \quad \text{dla } 0 < p \leq 2.$$

W dalszym ciągu, podobnie jak przy wyprowadzaniu wzoru (8.1), postępujemy w odniesieniu do fazy odciążania. Przyjmując

$$P_{II}(t) = P_m \left(\cos \frac{\pi t}{2\tau_{II}} \right)^{9/(10-q)} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \tau_{II}$$

otrzymujemy wzór na impuls drugiej fazy

$$(8.3) \quad S_{II} = \frac{2}{\pi} P_m \tau_{II} \sigma(q).$$

Dysponując wzorami na S_I i S_{II} możemy obliczyć całkowity impuls uderzenia $S = S_I + S_{II}$, który niezależnie od tego, równa się $m_1(v_1 - v'_1)$ lub $m_2(v'_2 - v_2)$, zgodnie z zasadą zmienności pędu; tutaj v'_1 , v'_2 oznaczają prędkości ciał bezpośrednio po uderzeniu.

Tak więc otrzymujemy równanie

$$(8.4) \quad \frac{2}{\pi} P_m [\tau_I \sigma(p) + \tau_{II} \sigma(q)] = m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

lub po wykorzystaniu (6.1), (6.5) i po przekształceniach

$$(8.5) \quad m_r v_r [\varphi(p) + R\varphi(q)] = m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2),$$

gdzie

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma(x) \sigma(x).$$

Gdy zastosujemy tu aproksymacje (6.3) i (8.2) oraz pominiemy mały wyraz zawierający x^2 , to otrzymamy wyrażenie liniowe

$$(8.6) \quad \varphi(x) \approx 0,668 + 0,332x.$$

Wzór (8.5) jest nowym, niezależnym od (5.11) lub (7.6), związkiem między parametrami p i q . Należy jednak pamiętać o tym, że zakres jego ważności jest ograniczony do klasy funkcji $P(t)$ posiadających jedno maksimum w przedziale $[0, \tau]$.

9. Uwagi końcowe

Zastanówmy się pokrótce nad kwestią rozwiązalności zagadnienia polegającego na wyznaczeniu maksymalnej siły uderzenia. Wyprowadziliśmy bowiem dla tej wielkości cztery wzory, mianowicie (5.3), (5.17), (7.1) i (7.8), wobec czego powstaje pytanie, który z nich zastosować w konkretnym przypadku?

Sposób postępowania zależy w pewnej mierze od warunków uderzenia oraz od tego, jakimi danymi dysponujemy. W każdym przypadku muszą być znane masy i prędkości ciał przed i po zderzeniu (a tym samym i współczynnik restytucji) oraz geometria powierzchni styku. Najogólniejszy spośród wymienionych jest niewątpliwie wzór (7.1), ponieważ można go stosować zarówno wówczas, gdy występują odkształcenia plastyczne, jak i przy ich braku. Jednak wspomniane już trudności w określeniu niektórych parametrów zmniejszają nieco przydatność tego wzoru.

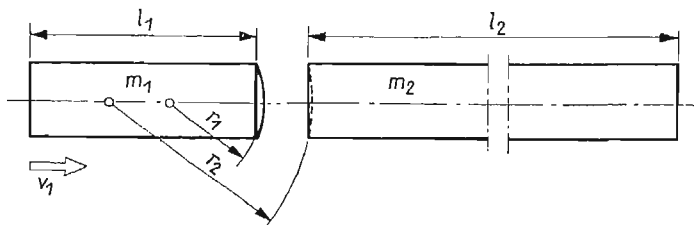
Gdy warunki uderzenia są tego rodzaju, że odkształcenia trwałe nie wystąpią, to obowiązują wzory (5.3) i (5.17), przy czym pierwszy wymaga uprzedniego określenia parametrów k_I i p , drugi — k_{II} i q . W tym względzie mamy do dyspozycji wzory (5.11) i (5.18) i ewentualnie (8.5). Poza tym gdy wykładnik potęgowy q okaże się bliski $3/2$, to współczynnik sztywności k_{II} można w przybliżeniu obliczyć z odpowiedniego wzoru Hertza.

Wreszcie gdy warunki uderzenia sprzyjają wystąpieniu odkształceń plastycznych, to zadowalając się teorią przybliżoną można również korzystać ze wzorów (5.11) i (5.18). Natomiast gdy znamy wartość trwałego zbliżenia α_k , to można skorzystać ze wzoru (7.8) i wówczas odpada konieczność obliczania sztywności k_I lub k_{II} . Poza tym wyniki pomiarów przeprowadzonych przy kuciu metali sugerują, że w przypadku silnie rozwiniętych odkształceń plastycznych można przyjmować $q = 1$, lub wartość nieco mniejszą.

10. Przykłady obliczeń

Dla ilustracji toku postępowania i sposobu wykorzystania wyprowadzonych wzorów rozpatrzmy szczegółowo dwa przypadki uderzenia, różniące się między sobą skrajnie warunkami zderzenia. Mianowicie obliczymy najpierw graniczną prędkość kolinearnego zderzenia dwóch prętów prostych, przy której pojawią się pierwsze odkształcenia plastyczne, a w przykładzie drugim wyznaczmy maksymalną wartość siły kucia pewnego elementu stalowego i następnie porównamy ją z danymi pomiarowymi.

Przykład pierwszy. Dwa pręty proste, stalowe o przekroju kołowym i jednakowych średnicach doprowadzamy do zderzenia kolinearnego. Uderzający koniec jednego pręta



kys. 8

zaokrąglony jest półkuliście (promieniem $r_1 = 5$ cm), zaś koniec drugiego ma wydrążenie półkuliste o promieniu $r_2 = 10$ cm (rys. 8). Masa pierwszego pręta $m_1 = 0,3$ kg, zaś drugiego $m_2 = 3 m_1$. Masa zredukowana $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 0,225$ kg. Należy obliczyć graniczną prędkość zderzenia (v_p), po przekroczeniu której w prętach pojawiają się lokalne odkształcenia plastyczne.

Będziemy korzystać ze wzorów p. 5, albowiem przedmiotem rozważań jest zasadniczo zderzenie nie powodujące odkształceń plastycznych ($L_p = 0$).

Przechodząc do wyznaczenia współczynnika restytucji skorzystamy w tym przedmiocie z wyników badań [6], przeprowadzonych w warunkach uderzenia analogicznych do tych, jakie sformułowaliśmy w temacie. Otóż okazało się, że zależność R od stosunku mas $m_2/m_1 \equiv M$ jest w tym przypadku prawie liniowa i niezależna od prędkości zderzenia¹⁾.

Autorzy pracy [6] proponują wzór $R = 0,905 - 0,040M$, który dla $M = 3$ daje $R = 0,78$. Oprócz tego w czasie badań mierzono współczynnik przekazywania energii

$$\xi = \frac{T'_2}{T_1} = M \left(\frac{v'_2}{v_1} \right)^2,$$

który jest stosunkiem energii kinetycznej ciała uderzonego (spoczywającego przed uderzeniem nieruchomo) do energii kinetycznej ciała uderzającego. Dla $M = 3$ zmierzono $\xi = 0,60$, zatem

$$\frac{v'_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\xi}{M}} = \sqrt{\frac{0,60}{3}} = 0,447.$$

Ze wzoru definicyjnego dla współczynnika restytucji

$$R = -\frac{v'_r}{v_r} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1}$$

wynika

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{v'_2}{v_1} - R = 0,447 - 0,780 = -0,333.$$

Z kolei obliczamy stałe p i q .

Przypuśćmy, że przebieg czasowy siły uderzenia upoważnia do stosowania wzoru

$$(8.5) \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) [\varphi(p) + R\varphi(q)] = m_1 (v_1 - v'_1),$$

który dla $v_2 \equiv 0$ oraz po uwzględnieniu (8.6) przyjmuje postać

$$\frac{M}{1+M} [(0,668 + 0,332p) + R(0,668 + 0,332q)] = 1 - \frac{v'_1}{v_1}.$$

Stąd wynika równanie

$$(10.1) \quad p + 0,780q \approx 1,718.$$

Drugie równanie otrzymamy z przekształcenia wzoru (5.11)

$$p - R^{2q} = R^2 - 1$$

lub

$$(10.2) \quad p - 0,608q = -0,392.$$

Rozwiązanie układu równań (10.1) i (10.2) daje

$$p = 0,417, \quad q = 1,330.$$

¹⁾ Ten ostatni wniosek jest tylko potwierdzeniem wyników rozważań teoretycznych (por. np. [1] p. 30).

Jak widać wykładnik potęgowy we wzorze $P_{II} = k_{II} \alpha^q$ ma wartość bliską 3/2, dzięki czemu współczynnik sztywności k_{II} możemy w przybliżeniu obliczyć za pomocą zmodyfikowanej formuły Hertza. W przypadku zetknięcia kuli z wydrążeniem kulistym przy jednakowych stałych sprężystości E , ν oraz dla $q = 3/2$ wspomniany wzór Hertza ma postać

$$k_H = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)^{1/2}.$$

W naszym przypadku dla uzyskania zgodności wymiarów zamiast wykładnika potęgowego $1/2 = 2 - 3/2$ przyjmiemy $2 - q = 0,67$. Zatem

$$k_{II} = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)^{0,67} = 6,86 \cdot 10^6 \quad \text{kG cm}^{-1,33},$$

gdzie przyjęto $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,3$.

W dalszym ciągu korzystamy z niektórych wzorów teorii zagadnień kontaktowych. Teoria ta prowadzi do wniosku, że największe ciśnienie powstające w środku koła styku równa się

$$\sigma_{max} = \beta \left[P_m E^2 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)^2 \right]^{1/3}, \quad (\beta = 0,388).$$

Ale największe wyężenie materiału na powierzchni styku określone jest przez napężenie zredukowane $\sigma_r \approx 0,22 \sigma_{max}$. Wobec tego siłę uderzenia $P_m = P_p$, wywołującą graniczne wyężenie materiału prętów na powierzchni styku obliczymy z warunku $0,22 \sigma_{max} = \sigma_p$ (σ_p — dynamiczna granica plastyczności), czyli

$$P_p = \left(\frac{\sigma_p}{0,22\beta} \right)^3 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{E} \right)^2.$$

Np. dla stali o zawartości 0,24% C, odpuszczonej w temperaturze 900°C przyjmując $\sigma_p = 7,3 \cdot 10^3$ kG/cm² otrzymujemy $P_p = 15\,800$ kG. Ostatecznie z przekształconego wzoru (5.17) znajdujemy graniczną prędkość zderzenia prętów

$$v_p = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{(1+q)m_r} k_{II}^{-1/2q} P_p^{1+q/2q}} = 10,1 \text{ m/s}.$$

Jednakże pierwsze odkształcenia plastyczne pojawiają się nie na powierzchni styku, lecz nieco głębiej (w tzw. punktach Bielajewa) i to już przy prędkości około 12 razy mniejszej.

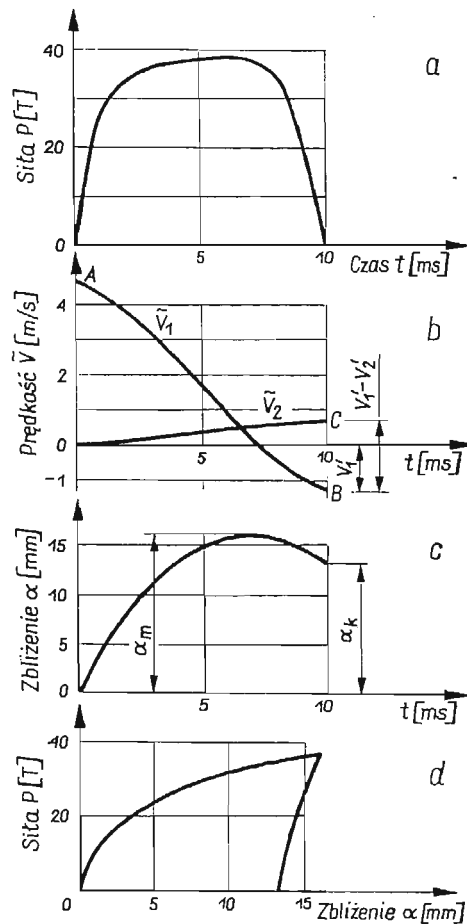
Dla porównania zauważmy jeszcze, że zgodnie z teorią de Saint-Venanta w przypadku zderzenia stalowych prętów idealnie płaskimi i równoległymi powierzchniami czołowymi prędkość graniczna wynosiłaby $\sigma_p / \sqrt{\rho E} = 18,3$ m/s (ρ — gęstość).

Przykład drugi. Obliczymy maksymalną wartość siły kucia elementu stalowego i porównamy wynik z danymi pomiarowymi. Znajomość tej siły jest niezbędna w obliczeniach wytrzymałościowych najbardziej obciążonych elementów młota kuźniczego.

Podczas badań, których wyniki opublikowano w pracy [7], rejestrowane były m.in. przebiegi czasowe siły kucia. Jeden z typowych oscylogramów przedstawiony jest na rys. 9a.

Ponieważ okres drgań własnych uderzających części młota w rozważanym przypadku był wielokrotnie większy od długości uderzenia, przeto krzywa $P(t)$ jest proporcjo-

nalna do krzywej przyspieszeń bijaka («baby»). Wobec tego całkowanie krzywej $P(t)$ daje wykres prędkości $\tilde{v}_1(t)$ bijaka (rys. 9b). Jeśli od rzędnych tej krzywej odejmiemy rzędne wykresu prędkości szaboty $\tilde{v}_2(t)$, to otrzymamy krzywą prędkości odkształcenia odkuwki (linia przerywana). Całkując następnie krzywą $\tilde{v}_1(t) - \tilde{v}_2(t)$ otrzymujemy przebieg czasowy skrócenia $\alpha(t)$ próbki (krzywa c). Na wykresie tym widoczne jest zarówno największe zbliżenie bijaka i szaboty (α_m), jak i trwałe skrócenie (α_k) próbki, czyli przekucie.



Rys. 9

Wreszcie kojarząc wykresy $P(t)$ i $\alpha(t)$ otrzymujemy wykres zależności $P(\alpha)$ (krzywa d). Z wykresu tego widać wyraźnie fazę plastycznego płynięcia podczas obciążania, przy końcu której występuje nieznaczne wzmocnienie, tzn. wzrostowi odkształceń towarzyszy wzrost siły uderzenia. Natomiast w fazie odciążania widać prawie liniowy charakter zależności $P(\alpha)$, co upoważnia do przyjęcia w obliczeniach $q = 1$.

Do badań użyto gorącej próbki ze stali 45, uformowanej w postaci walca o średnicy 50 mm, wysokości 86 mm. Uderzenie następowało w kierunku poosiowym. Ciężar bijaka

$m_1 g = 450$ kG. Przy prędkości uderzenia $v_1 = 4,7$ m/s zmierzono bezpośrednio lub odczytano z wykresów: trwałe skrócenie próbki $\alpha_k = 13$ mm, prędkość odskoku bijaka $v'_1 = -1,2$ m/s, współczynnik restytucji (rys. 9b)

$$R = \frac{|v'_1 - v'_2|}{v_1} = \frac{\overline{BC}}{OA} = \frac{2,1}{4,7} = 0,45.$$

Ponieważ w użytym do badań ciężkim młocie kuźniczym masa szaboty wraz z kowadłem jest wielokrotnie większa od masy bijaka, przeto można przyjąć $m_1/m_2 \approx 0$, czyli $m_r \approx m_1$. Wobec tego energia uderzenia

$$m_r v_r^2/2 \approx m_1 v_1^2/2 = 5,06 \cdot 10^4 \text{ kGcm.}$$

Aby wyznaczyć niewiadomą p posłużymy się równaniem (8.5)²⁾.

Dla $m_r = m_1$, $v_2 = 0$, $q = 1$, $\varphi(q) = 1$, równanie to przyjmuje postać

$$v_1 [\varphi(p) + R] = v_1 - v'_1,$$

skąd

$$\varphi(p) = 1 - R - v'_1/v_1 = 1 - 0,45 + 1,2/4,7 = 0,805.$$

Z drugiej strony na podstawie (8.6) $\varphi(p) = 0,668 + 0,332p$. Zatem

$$p = \frac{0,805 - 0,668}{0,332} = 0,412.$$

Znając p , q , R , α_k oraz energię uderzenia możemy ostatecznie obliczyć maksymalną siłę kucia przy pomocy wzoru (7.8)

$$P_m = \frac{1,412 - 2 \cdot 0,45^2}{1,3} \cdot 5,06 \cdot 10^4 = 3,9 \cdot 10^4 \text{ kG.}$$

Jest to wartość dostatecznie zgodna z zarejestrowaną na oscylogramie (por. rys. 9a).

Literatura cytowana w tekście

1. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
2. Г. С. БАТУЕВ, А. А. ФЕДОСОВ, А. К. ЕФРЕМОВ, *Соударение массивных тел при упруго-пластических деформациях в зоне контакта*, Сб. Расчеты на прочность, **10** (1964), 363-390.
3. W. GOLDSMITH, *Impact. The theory and physical behavior of colliding solids*, E. Arnold. London 1960 (tłum. ros. Moskwa 1965).
4. S. C. HUNTER, *Energy absorbed by elastic waves during impact*, J. Mech. and Phys. Solids, **3**, **5** (1957), 162-171.
5. В. В. БАГРЕЕВ, *Упруго-пластический удар массивных тел*, Сб. Вопросы механики, Тр. Моск. института инж. ж.-д. трансп. **193** (1964), 53-70.

²⁾ Kształt impulsu siły kucia, widoczny na rys. 9a, uzasadnia dopuszczalność tego przyjęcia. Natomiast wzór (5.11) w danym przypadku nie obowiązuje z uwagi na silnie rozwinięte odkształcenia plastyczne

6. П. М. Алабужев, Б. Н. Стихановский, Ю. В. Сидоренко, *К вопросу о передаче энергии ударом*, Тр. Моск. института нефтохим. и газ. пром. **60** (1966), 181–187.
7. Ю. В. Беляев, А. К. Попов, *Экспериментальное исследование нагрузок соударяющихся деталей молотов во время удара*, Кузн. штамп. произв. **1** (1962), 30–34.

Р е з ю м е

ЗАВИСИМОСТЬ МАКСИМАЛЬНОЙ СИЛЫ УДАРА ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Определение максимальной величины контактного усилия при столкновении возможно в общем случае лишь опытным путем; при этом необходимо иметь достаточно сложный датчик и аппаратуру, регистрирующую зависимость измеряемого усилия от времени.

В предлагаемой статье, на основе теоретического анализа процесса упруго-пластического удара, выведены алгебраические зависимости максимальной силы удара от величин, легко поддающихся измерению в ходе процесса, таких как: скорость отскока тел, коэффициент восстановления и остаточное сближение. Способ использования выведенных формул иллюстрируется двумя численными примерами.

S u m m a r y

DEPENDENCE OF THE MAXIMUM IMPACT FORCE ON THE RESTITUTION COEFFICIENT

The determination of the maximum contact force during an inelastic impact can be done only experimentally and a complicated gauge as well as a device registering the variation of the force in time is needed. The theoretical analysis presented in this paper leads to algebraic relations between the impact force and the magnitudes which can easily be measured during the impact, such as the after-impact velocity, the restitution coefficient and the impact duration. The application of the derived formulae is shown on two numerical examples.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1970 r.
