

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO DO WYZNACZANIA NOŚNOŚCI
GRANICZNEJ KONSTRUKCJI

(Przegląd prac)

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

1. Wstęp

W pracy omówiono dotychczasowe wyniki zastosowania programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej układów prętowych, płyt i powłok; zadanie dualne i jego interpretację; problem dostosowania oraz automatycznego obliczania konstrukcji ramowych.

Intensywność obciążenia granicznego można wyznaczyć albo metodą statyczną (np. KOOPMAN, LANCE [12], SVOBODA [19], GOCHFELD, CZERNIAWSKI [27], ČYRAS [38], MIRZABEKJAN, REITMAN [29], FRAINT [33], CERADINI, GAVARINI [3], WOLFENSBERGER [22]) albo kinematyczną (np. TANAKA [20], BRUSENCOW, RŻANICYN [25], ČYRAS [38], RŻANICYN [31], TERECHINA [32]).

W pierwszym przypadku — przy odpowiednim sformułowaniu zagadnienia — poszukujemy maximum mnożnika statycznie dopuszczalnego, w drugim natomiast — minimum mnożnika kinematycznie dopuszczalnego, przy czym takie sformułowanie ważne jest dla obciążeń proporcjonalnych, czyli prostych. Metoda statyczna wynika z twierdzenia o dolnej granicy obciążenia [21]: «Największy spośród statycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia μ_s odpowiada rzeczywistej intensywności obciążenia granicznego μ_G , tzn. $\sup \mu_s = \mu_G$ » Z twierdzenia o górnej granicy obciążenia [21]: «Najmniejszy spośród kinematycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia μ_k odpowiada rzeczywistej intensywności obciążenia granicznego, czyli $\inf \mu_k = \mu_G$ » otrzymujemy metodę kinematyczną (w obliczeniach praktycznych supremum przechodzi w maximum, zaś infimum w minimum).

W przypadku obciążeń zmiennych, celem sformułowania interesującego nas problemu nośności granicznej, będziemy korzystać z odpowiednich twierdzeń energetycznych o minimum energii dysypowanej (metoda kinematyczna) oraz maximum mocy obciążeń zewnętrznych (metoda statyczna) [38]. Należy podkreślić, iż pojęcie nośności granicznej dla obciążeń nieproporcjonalnych ma również sens, gdyż zarówno własności sprężyste, jak i historia obciążenia nie wpływają na wielkość nośności. W przypadku obciążeń nieproporcjonalnych może mieć miejsce nowy jakościowo efekt — niedostosowanie. Jak

wiadomo, zagadnienie dostosowywania ujmują twierdzenia Melana i Koitera (por. np. KACZANOW [28], KÖNIG [11]).

Okazuje się, że zadania nośności granicznej w ujęciu statycznym i kinematycznym stanowią parę zadań dualnych programowania liniowego i to zarówno dla obciążeń prostych, jak i zmiennych (BORKAUSKAS, ČYRAS [2], CERADINI, GAVARINI [4], CHARNES, LEMKE, ZIENKIEWICZ [6], ČYRAS [38], MAIER [14]).

Ścisłe rzecz biorąc, wyznaczanie współczynnika obciążenia granicznego, przy pomocy programowania liniowego, można uważać za automatyczne obliczenie, które ogólnie sprowadza się do podania algorytmu rozwiązującego. Takim algorytmem dla programowania liniowego jest np. metoda sympleksowa. Nieco inny algorytm dla automatycznego obliczania ram zaproponował LIVESLEY [13]. W następnym punkcie sformułujemy wygodną dla naszych celów problematykę programowania liniowego.

2. Programowanie liniowe

Ogólnie rzecz traktując, problematykę programowania można sformułować następująco [8]:

znaleźć minimum (maximum) funkcji

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} a_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Jeśli zarówno funkcja f , nosząca nazwę *funkcji celu*, jak i funkcje g_i , $i = 1, \dots, m$ są liniowe, to wówczas mówimy o zadaniu programowania liniowego.

Stosowanie programowania (liniowego lub nieliniowego) do rozważanych problemów wymaga dyskretnego opisu konstrukcji. Opis taki jest naturalny w odniesieniu do konstrukcji prętowych, natomiast przed zastosowaniem programowania do płyt i powłok należy dokonać dyskretyzacji opisu. Jedną z nowszych metod opisu dyskretnego, tzw. metodę elementów skończonych, przedstawimy w rozdziale 6.

W dalszym ciągu interesować nas będzie tylko standardowe, kanoniczne oraz parametryczne programowanie liniowe, które w sposób monograficzny ujęte jest w pracach GASSA [7]; CZERNIKOWA [34] i JUDINA, GOLSZTEJNA [39].

Zadanie standardowe programowania liniowego formułuje się następująco [34]:
znaleźć minimum (maximum) funkcji liniowej n zmiennych

$$(2.1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

przy warunkach ograniczających nałożonych na zmienne x_1, \dots, x_n postaci

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq a_i; \quad x_j \geq 0; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Zadanie poszukiwania minimum (maximum) funkcji (2.1) poddanej ograniczeniom postaci

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_i; \quad x_j \geq 0; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

nazywamy kanonicznym zadaniem programowania liniowego. Zadanie kanoniczne łatwo rozwiązać przy zastosowaniu algorytmu noszącego nazwę metody sympleksowej; stąd konieczność przeprowadzenia zadania standardowego do kanonicznego. W tym celu wystarczy w zadaniu standardowym zamienić każdą nierówność $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq a_i$ dwiema zależnościami:

$$(2.3') \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z_i - a_i = 0, \quad z_i \geq 0.$$

Dla danego zadania programowania liniowego można ułożyć tzw. zadanie dualne, które dla zadania kanonicznego, polegającego na znalezieniu maximum formy (2.1) przy ograniczeniach (2.3), formułuje się następująco [39]:

zminimalizować formę m zmiennych

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^m a_i y_i$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Jak stąd wynika zmienne y_i nie muszą być nieujemne.

Rozpatrzmy teraz zadanie standardowe, w którym należy znaleźć maximum formy (2.1) przy ograniczeniach (2.2). Zadanie dualne do niego ma postać następującą:

zminimalizować formę

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^m a_i y_i$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Najogólniejsze zadanie, w którym ograniczenia są mieszane, tzn. mają postać równości lub nierówności, a występujące zmienne niekoniecznie są nieujemne formułuje się następująco [39]:

znaleźć maximum formy

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq a_i, & i = 1, \dots, m_1 \leq m, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= a_i, & i = m_1+1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, n_1 \leq n. \end{aligned}$$

Zadanie dualne do powyższego polega na minimalizacji formy liniowej

$$\sum_{i=1}^m a_i y_i,$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &\geq b_j, & j = 1, \dots, n_1 \leq n, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &= b_j, & j = n_1+1, \dots, n, \\ y_i &\geq 0, & i = 1, \dots, m_1 \leq m. \end{aligned}$$

Przedstawione zadania programowania liniowego można rozwiązać na maszynach matematycznych, stosując algorytmy standardowe, jak metodę sympleksową, dualną metodę sympleksową. W tym kryje się główna przewaga, z praktycznego punktu widzenia, tego programowania nad programowaniem nieliniowym, które na ogół wymaga stosowania specjalnych algorytmów rozwiązujących (porównaj np. BIRON, HODGE [1]).

Czasami w zastosowaniach spotykamy się z zadaniami, w których albo współczynniki funkcji (2.1), albo elementy macierzy $A = \|a_{ij}\|$ $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, lub też wyrazy wolne a_1, \dots, a_n zmieniają się w pewnym przedziale na osi rzeczywistej. Taką postać problemu nazywamy programowaniem parametrycznym [7].

3. Układy prętowe

Zastosowanie programowania liniowego do układów prętowych było przedmiotem rozważań TANAKI [20], SVOBODY [19], NICHOLLSA [15], RĂUTU, CHIROIU [16] i [17], CERADINIEGO, GAVARINIEGO [3], CHARNESA, LEMKEGO, ZIENKIEWICZA [6], ČYRASA [35], [36], [38], GYLYSA, ZAKAREVICIUSA, ČYRASA [26].

3.1. W pracy SVOBODY [19] problem rozwiązano metodą statyczną dla obciążeń prostych.

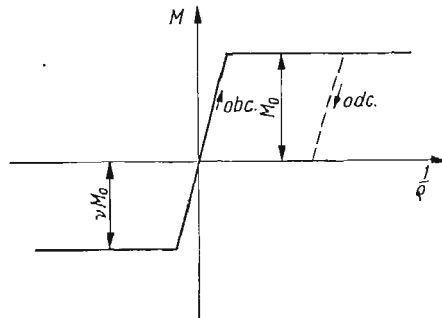
Autor czyni następujące założenia:

a) w każdym przekroju funkcja $M = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ jest zbudowana przy przyjęciu obrazu geometrycznego takiego, jak na rys. 1, gdzie przez $\bar{\varrho}$ i M oznaczono, odpowiednio, krzywiznę osi pręta oraz moment zginający w rozpatrywanym przekroju pręta. Z rys. 1 widać, iż

zależność moment–krzywizna dla ciała sprężysto-idealnie-plastycznego nie jest jedno-jednoznaczna. Trajektorie obciążania i odciążania mogą być różne, co zilustrowano odpowiednimi strzałkami;

- b) wpływ sił normalnych i poprzecznych na uplastycznienie można pominąć;
- c) liczba przegubów plastycznych jest dostateczna, tzn. może wytworzyć się zupełny lub częściowy mechanizm zniszczenia;
- d) odkształcenia są małe, co pozwala stosować takie same równania równowagi, jak dla stanu nieodkształconego;
- e) elementy mają idealne przekroje — można traktować przeguby plastyczne jako punkty;
- f) problem wybożenia można pominąć.

Przeguby plastyczne powstają: w punktach obciążenia skupionego, w miejscach, gdzie siła poprzeczna zmienia znak (ekstremum momentu zginającego w tym punkcie) oraz w punktach utwierdzenia. W przypadku obciążeń ciągłych należy również zlokalizować położenie przegubu plastycznego wytworzonego przez to obciążenie, np. metodą kolejnych przybliżeń. Na ogół wygodniej jest zastąpić obciążenie ciągłe pewną liczbą możliwie gęsto rozmieszczonych obciążeń skupionych.



Rys. 1

Ponieważ z sił wewnętrznych uwzględniono tylko moment zginający, więc warunek dopuszczalności pola momentów ma postać

$$(3.1) \quad \nu M_{0,i} \leq M_i \leq M_{0,i},$$

gdzie symbolami $M_{0,i}$, $\nu M_{0,i}$ oznaczono momenty zginające graniczne w i -tym przekroju.

Równanie (3.1) łatwo sprowadzić do postaci

$$(3.2) \quad 0 \leq Y_i \leq D_i,$$

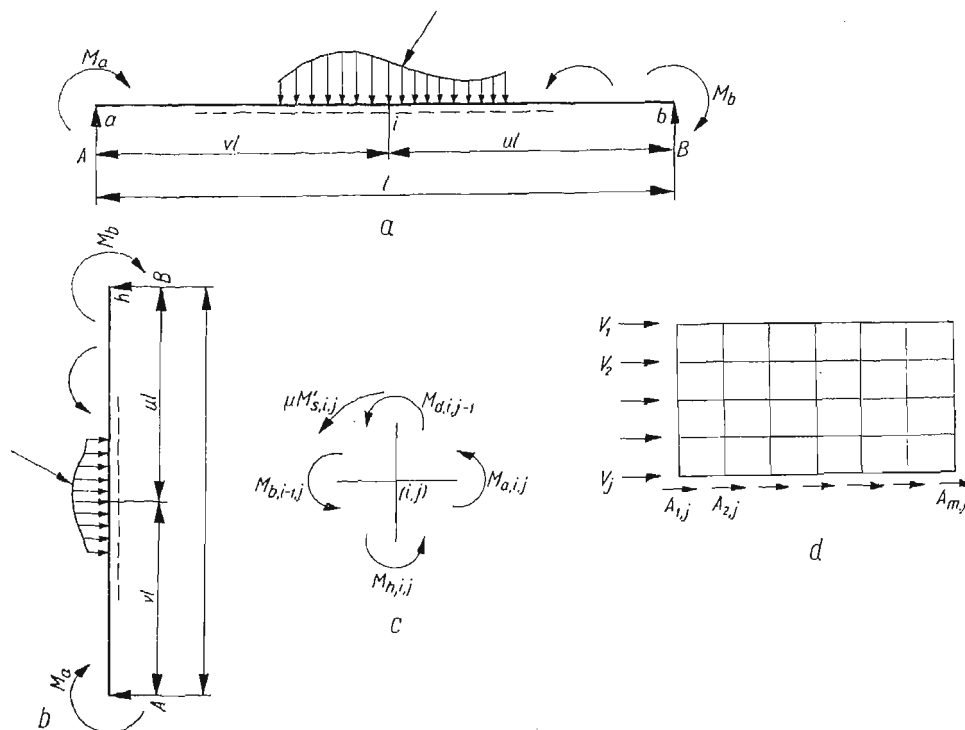
w której symbole Y_i oraz D_i oznaczają

$$(3.3) \quad Y_i = M_i - \nu M_{0,i}, \quad D_i = M_{0,i} - \nu M_{0,i}.$$

Warunek (3.2) wskazuje na nieujemność wielkości Y_i . Wystarczy więc rozważyć układ

$$(3.4) \quad Y_i \leq D_i.$$

Dla pełnego sformułowania problemu, oprócz nierówności typu (3.4) należy dołączyć jeszcze odpowiednie, niezależne równania równowagi wydzielonej części układu. Warunki te uzyskujemy korzystając z rys. 2.



Rys. 2

Dla pręta (poziomego lub pionowego, rys. 2a, b), otrzymujemy równanie

$$(3.5) \quad M_i = uM_a - vM_b + M'_i \mu,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

M'_i — wpływ od obciążenia międzyprzęstowego,

M_a, M_b — wpływy od obciążeń węzłowych,

μ — współczynnik intensywności obciążenia międzyprzęstowego. Po uwzględnieniu równości (3.3) i równania (3.5) uzyskamy

$$(3.6) \quad Y_i - uY_a + vY_b - M'_i \mu = -vM_{0,i} + uvM_{0,a} - vM_{0,b}.$$

Z rys. 2c wynikają równania równowagi węzła

$$(3.7) \quad M_{b,i-1,j} + M_{a,i,j} + M_{d,i,j-1} + M_{h,i,j} + M'_{s,i,j} \mu = 0.$$

W równaniu (3.7) $\mu M'_{s,i,j}$ jest danym obciążeniem momentowym węzła.

Z równań (3.3) (3.6) i (3.7) otrzymujemy

$$(3.8) \quad Y_{b,i-1,j} + Y_{a,i,j} + Y_{d,i,j-1} + Y_{h,i,j} + \mu M'_{s,i,j} = \\ = -vM_{0,b,i-1,j} - vM_{0,a,i,j} - vM_{0,d,i,j-1} - vM_{0,h,i,j}.$$

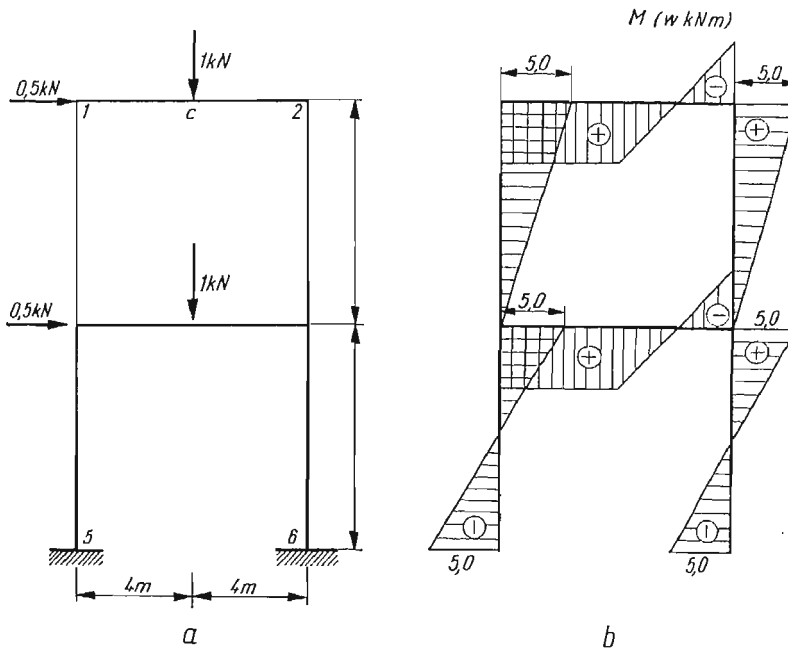
Równanie pięter uzyskamy z rys. 2d,

$$(3.9) \quad A_{1,j} + A_{2,j} + \dots + A_{m,j} + (V_1 + \dots + V_j)\mu = 0.$$

W przypadku, gdy wszystkie słupy j -tych pięter mają jednakową wysokość h , wtedy równanie (3.9) — po pomnożeniu go przez h i uwzględnieniu zależności (3.3) — przyjmie następującą postać:

$$(3.10) \quad Y_{d,1,j} + Y_{d,2,j} + \dots + Y_{d,m,j} + Y_{h,1,j} + \dots + Y_{h,m,j} + h(V_1 + \dots + V_j)\mu = \\ = -\nu M_{0,d,1,j} - \dots - \nu M_{0,d,m,j} - \nu M_{0,h,1,j} - \dots - \nu M_{0,h,m,j}.$$

Obecnie można już jednoznacznie sformułować problem w terminach programowania liniowego, korzystając z twierdzenia o dolnej granicy obciążenia. Należy znaleźć maximum



Rys. 3

funkcji $z = \mu$, przy jednoczesnym spełnieniu warunków (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) lub (3.10). Przejdźmy teraz do omówienia wyników uzyskanych w pracy [19], a odnoszących się do ramy przedstawionej na rys. 3a. Układ ten został rozwiązany przy następujących danych: $M_0 = 5 \text{ kNm}$, $\nu M_0 = -5 \text{ kNm}$.

Odpowiednio z równań (3.6), (3.8) i (3.10) otrzymujemy:

$$Y_c - 0,5Y_{12} + 0,5Y_{21} - 2\mu = -(-5) + 0,5(-5) - 0,5(-5), \\ Y_d - 0,5Y_{34} + 0,5Y_{43} - 2\mu = 5, \\ Y_{12} + Y_{13} = -(-5) - (-5), \\ Y_{21} + Y_{24} = 10,$$

$$\begin{aligned}
 Y_{31} + Y_{34} + Y_{35} &= 15, \\
 Y_{42} + Y_{46} + Y_{43} &= 15, \\
 Y_{13} + Y_{24} + Y_{31} + Y_{42} + 8 \cdot 0,5 \mu &= 20, \\
 Y_{35} + Y_{46} + Y_{53} + Y_{64} + 8(0,5 + 0,5) \mu &= 10.
 \end{aligned}$$

Dla każdego rozważanego przegubu plastycznego, zgodnie z (3.4), mamy:

$$Y_i \leq 5 - (-5) = 10, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Tak sformułowany problem rozwiązano metodą sympleksową na maszynie matematycznej MIŃSK 1. Otrzymany współczynnik nośności granicznej wynosi $\mu_G = 2,5$.

Rysunek 3b przedstawia wykresy momentów zginających dla ramy obciążonej zgodnie ze schematem podanym na rys. 3a, lecz dla obciążenia granicznego; obciążenie to otrzymujemy zwiększając 2,5-krotnie wartości sił przedstawionych na rys. 3a.

3.2. Sposób sformułowania zagadnienia w ujęciu metody kinematycznej podano w pracy TANAKI [20] dla obciążeń prostych i nieproporcjonalnych. Przypadek, gdy układ poddany jest obciążeniom nieproporcjonalnym (zagadnienie dostosowania) omówimy w punkcie 3.4.

Założmy, że na ramę działa obciążenie skupione. Niech ponadto spełnione będą postulaty a-f omówione w punkcie 3.1. Postulat małych odkształceń pozwala zamiast zasady mocy przygotowanych stosować zasadę prac przygotowanych. Z definicji kinematycznie dopuszczalnego mnożnika obciążenia μ_k [21] mamy:

$$(3.11) \quad \mu_k = \frac{\sum_i M_{oi} |\theta_i|}{\sum_k P_k \delta_k} \quad \text{dla} \quad \sum_k P_k \delta_k > 0,$$

gdzie:

$M_{oi}(\theta_i)$ — moment graniczny (kąt obrotu przygotowany) w i ,

$P_k(\delta_k)$ — obciążenie zewnętrzne (przemieszczenie przygotowane) w k ; przez i — oznaczono przekroje, w których mogą powstać przeguby plastyczne, a przez k punkty przyłożenia obciążenia zewnętrznego.

Niech dalej

$$(3.11.1) \quad m = \frac{1}{M_0} \sum_k P_k \delta_k,$$

gdzie w (3.11.1) M_0 zdefiniowano następująco:

$$(3.11.2) \quad M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i M_{oi} |\theta_i|.$$

Oznaczmy przez M_i dowolny moment zginający w przekroju i , przy czym otrzymane w ten sposób pole momentów równoważy obciążenie zewnętrzne. Zgodnie z zasadą prac przygotowanych mamy dla pola kinematycznie dopuszczalnego:

$$(3.11.3) \quad \sum_k P_k \delta_k = \sum_i M_i \theta_i.$$

Z (3.11.1) i (3.11.3) otrzymujemy:

$$(3.12) \quad m = \frac{1}{M_0} \sum_i M_i \theta_i = \frac{1}{\mu_k}.$$

Dla ramy n -krotnie statycznie niewyznaczalnej uzyskujemy n niezależnych rozkładów momentów resztkowych; istnieje więc n zależności między kątami obrotu θ_i . Oznaczając przez R_i^α α -ty moment resztkowy w i , na mocy zasady prac przygotowanych otrzymujemy:

$$(3.13) \quad \sum_i R_i^\alpha \theta_i = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Z równań (3.11.2), (3.12) i (3.13) mamy:

$$(3.14) \quad \sum_i |\vartheta_i| = 1, \quad \sum_i r_i^\alpha \vartheta_i = 0$$

oraz

$$(3.15) \quad m = \sum_i n_i \vartheta_i.$$

W równaniach (3.14) i (3.15) wprowadzono następujące nowe wielkości

$$(3.15.1) \quad \vartheta_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_{0i}}{M_0} \theta_i, \quad r_i^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_i^\alpha}{M_{0i}}, \quad n_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_i}{M_{0i}}.$$

W celu spełnienia warunku nieujemności (por. (2.3), rozdz. 2) wystarczy przyjąć $\vartheta_i = \vartheta_i^+ - \vartheta_i^-$, gdzie $\vartheta_i^+ \geq 0$, $\vartheta_i^- \geq 0$. Tym samym problem sprowadzony został do znalezienia maximum formy (3.15) przy ograniczeniach (3.14). Z równania bowiem (3.12) wynika, że $\max m = \frac{1}{\min \mu_k}$, skąd $\mu_G = \frac{1}{\max m}$, co jest zgodne z odpowiednimi twierdzeniami, por. [21], [28], teorii stanów granicznych. Maximum formy m można obliczyć przy pomocy dualnej metody sympleksowej.

Jako prosty przykład rozważmy ramę, przedstawioną na rys. 4a, dwukrotnie statycznie niewyznaczalną, o 4 krytycznych przekrojach; istnieją więc dwa zbiory rozkładów momentów resztkowych.

Dowolny rozkład momentów będących w równowadze z danym obciążeniem zewnętrznym oraz dwa zbiory momentów resztkowych można otrzymać zamieniając daną ramę na układ statycznie wyznaczalny. Możemy to uzyskać przez wstawienie dwu przegubów (rys. 4b-d). Rysunek 4b obrazuje rozkład momentów od danego obciążenia.

$$(3.16) \quad M_1 = -M_0, \quad M_2 = M_0, \quad M_3 = M_4 = 0.$$

Rozkłady momentów zginających pochodzących od momentów działających w przegubach α i β przedstawiają odpowiednio, rys. 4c i 4d. Stąd resztkowe momenty R_i^α oraz R_i^β , $i = 1, 2, 3, 4$ wynoszą:

$$(3.16.1) \quad R_1^\alpha = 3M_0, \quad R_2^\alpha = -\frac{5}{2}M_0, \quad R_3^\alpha = 2M_0, \quad R_4^\alpha = -M_0,$$

$$(3.16.2) \quad R_1^\beta = -3M_0, \quad R_2^\beta = 2M_0, \quad R_3^\beta = -M_0, \quad R_4^\beta = 2M_0.$$

Z rys. 4a widać, że momenty plastyczne w interesujących nas przekrojach krytycznych wynoszą:

$$(3.16.3) \quad M_{01} = M_{02} = 2M_0, \quad M_{03} = M_{04} = M_0.$$

Z równań (3.15.1), (3.16), (3.16.1), (3.16.2) i (3.16.3) otrzymujemy:

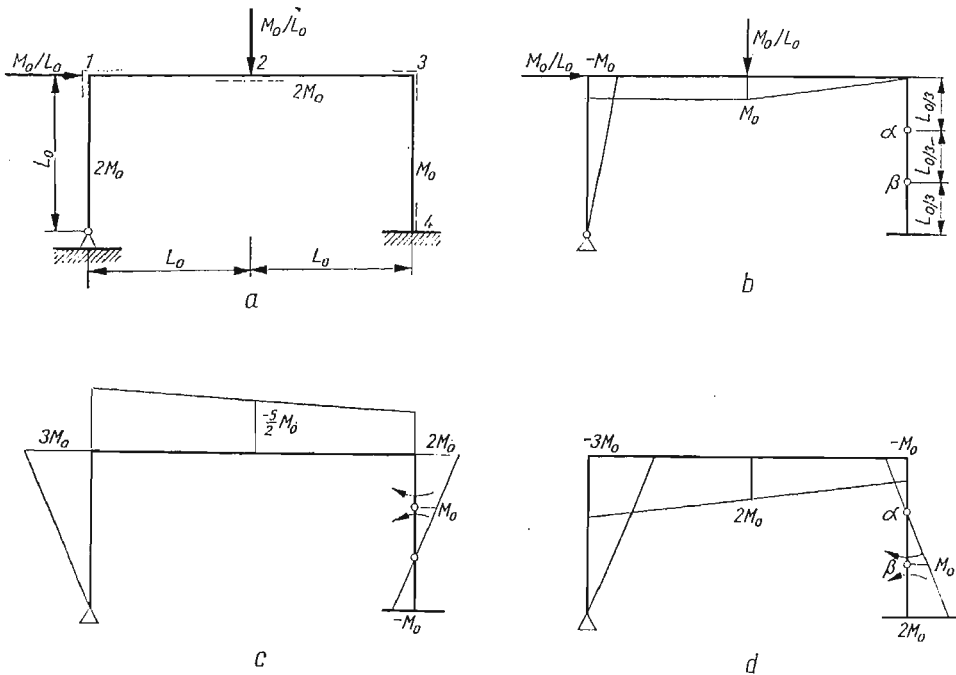
$$r_1^\alpha = \frac{3}{2}, \quad r_2^\alpha = -\frac{5}{2}, \quad r_3^\alpha = 2, \quad r_4^\alpha = -1,$$

$$r_1^\beta = -\frac{3}{2}, \quad r_2^\beta = 1, \quad r_3^\beta = -1, \quad r_4^\beta = 2,$$

$$n_1 = -\frac{1}{2}, \quad n_2 = \frac{1}{2}, \quad n_3 = n_4 = 0.$$

Dla tych wartości, stosując dualną metodę sympleksową, otrzymano $\max m = \frac{2}{7}$, czyli

$$\mu_G = \frac{7}{2}.$$



Rys. 4

3.3. CHARNES, LEMKE, ZIENKIEWICZ [6] po raz pierwszy udowodnili, iż sformułowania statyczne i kinematyczne dla układów prętowych stanowią parę zadań dualnych programowania liniowego.

Rozpatrzmy układ obciążony siłami skupionymi, które będziemy charakteryzować wektorem $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_p)^T$.

Z zasady prac przygotowanych mamy:

$$(3.17) \quad \mathbf{M}^T \boldsymbol{\theta} = \mu \mathbf{P}^T \boldsymbol{\delta},$$

gdzie lewa strona przedstawia pracę dysypowaną w przegubach plastycznych na kątach obrotu $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, zaś prawa — pracę sił zewnętrznych na przemieszczeniach $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_p)^T$; $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)^T$ jest wektorem charakteryzującym momenty w układzie, μ jest mnożnikiem obciążenia, zaś symbol T oznacza transponowanie macierzy. Wzór (3.17) podany jest w zapisie macierzowym. Korzystając z reguły mnożenia macie-

rzowego otrzymujemy zależność: $\sum_{i=1}^n M_i \theta_i = \mu \sum_{k=1}^p P_k \delta_k$. Warunki zgodności można zapisać w postaci

$$(3.18) \quad \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} = 0,$$

gdzie \mathbf{C} przedstawia macierz zgodności.

Z warunków geometrycznych wynika, że

$$(3.19) \quad \mathbf{P}^T \boldsymbol{\delta} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}.$$

Z (3.19) i (3.17) otrzymujemy

$$(3.20) \quad (\mathbf{M}^T - \mu \mathbf{a}^T) \boldsymbol{\theta} = 0$$

[o ile zachodzi (3.18)].

Korzystając z lematu Farkasa (por. [34]) wnioskujemy, że istnieje wektor \mathbf{u} taki, iż

$$(3.21) \quad \mathbf{M}^T - \mu \mathbf{a}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{C}.$$

Otrzymaliśmy więc najogólniejszą, parametryczną postać równań wyrażających statyczną równowagę układu (parametrem jest wektor \mathbf{u}). Jeśli obroty odpowiadają możliwemu (tzn. spełniającemu warunki kinematycznej zgodności) mechanizmowi zniszczenia, to:

$$\sum_j M_{0j} |\theta_j| = \mu \mathbf{P}^T \boldsymbol{\delta} = \mu \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta},$$

gdzie M_{0j} oznacza moment graniczny w j -tym przegubie. Uwzględniając definicję kinematycznie dopuszczalnego mnożnika obciążenia otrzymujemy zadanie programowania nieliniowego:

znaleźć

$$\min \frac{\sum_j M_{0j} |\theta_j|}{\mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}},$$

przy ograniczeniach

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\theta} = 0.$$

Powyższe zadanie można sformułować jako zadanie programowania liniowego następująco:

znaleźć

$$(3.22) \quad \min \mathbf{M}_0^T (\boldsymbol{\theta}^+ + \boldsymbol{\theta}^-),$$

przy ograniczeniach

$$(3.22.1) \quad \mathbf{a}^T (\boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}^-) = 1,$$

$$(3.22.2) \quad \mathbf{C} (\boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}^-) = 0,$$

$$(3.22.3) \quad \boldsymbol{\theta}^+ \geq 0, \quad \boldsymbol{\theta}^- \geq 0.$$

Zadanie dualne ma postać:
znaleźć

$$(3.23) \quad \max \mu$$

przy ograniczeniach

$$(3.23.1) \quad \mu \mathbf{a}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{C} \leq \mathbf{M}_0^T,$$

$$(3.23.2) \quad -\mu \mathbf{a}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{C} \leq \mathbf{M}_0^T.$$

Jeśli uwzględnimy (3.21), to zależności (3.23)–(3.23.2) przybiorą postać:
znaleźć

$$(3.24) \quad \max \mu$$

przy ograniczeniach

$$(3.24.1) \quad -\mathbf{M}^T + \mu \mathbf{a}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{C} = 0,$$

$$(3.24.2) \quad \mathbf{M}^T \leq \mathbf{M}_0^T,$$

$$(3.24.3) \quad -\mathbf{M}^T \leq \mathbf{M}_0^T.$$

Związki (3.24)–(3.24.3) są niczym innym, jak wypowiedzią, w terminach liniowego programowania, twierdzenia o dolnej granicy obciążenia.

ČYRAS w pracy [37] omówia również problem dualności, przy czym wychodzi on z dwi-istości twierdzeń o maksimum mocy obciążenia zewnętrznego przy odpowiednich ograniczeniach na momenty resztkowe i minimum prędkości dysypacji energii przy ograniczeniach na prędkości przemieszczeń. Zagadnienie to jest również przedstawione przez tegoż autora w [38].

3.4. Problem dostosowywania dla ram rozpatrzył TANAKA [20]. Twierdzenie o dostosowywaniu dla ram sformułujemy następująco: jeśli istnieją momenty resztkowe R_i spełniające nierówności

$$(3.25) \quad \begin{aligned} R_i + \mu M_{ispr}^+ &\leq M_{0i}, \\ -R_i - \mu M_{ispr}^- &\leq M_{0i}, \end{aligned}$$

to nastąpi dostosowanie ramy; R_i oznacza moment resztkowy w przekroju i , μ oznacza mnożnik obciążenia, natomiast M_{ispr}^+ i M_{ispr}^- oznaczają, odpowiednio, maksymalny i minimalny moment sprężysty w przekroju i dla każdej kombinacji danych obciążeń (stosujemy tutaj oznaczenia jak przy omawianiu metody kinematycznej w ujęciu TANAKI).

Twierdzenie powyższe jest oczywiście wnioskiem z uogólnionego twierdzenia Melana (por. [11]). Oznaczmy przez s taki mnożnik obciążenia, że dla $\mu \leq s$ układ dostosowuje się, natomiast dla $\mu > s$ nie. Autor podaje prosty sposób wyznaczania mnożnika s , który wynika z twierdzenia, będącego zarazem wygodnym sformułowaniem zadania programowania liniowego dla problemu dostosowywania:

jeśli należy znaleźć $\max m$, gdzie

$$(3.26) \quad m = \frac{1}{M_0} \left(\sum_i M_{ispr}^+ \theta_i^+ - \sum_i M_{ispr}^- \theta_i^- \right), \quad M_0 = \sum_i M_{0i} \theta_i^+ + \sum_i M_{0i} \theta_i^-,$$

przy ograniczeniach

$$(3.26.1) \quad \sum_i R_i^+ \theta_i^+ - \sum_i R_i^- \theta_i^- = 0, \quad \theta_i^+ \geq 0, \quad \theta_i^- \geq 0,$$

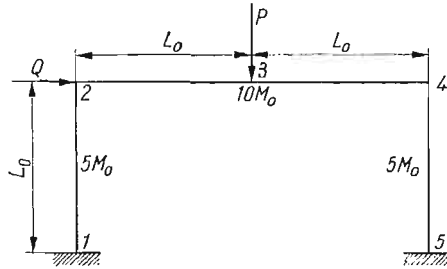
to

$$(3.26.2) \quad \max m = \frac{1}{s}.$$

Stąd otrzymujemy, że $s = \frac{1}{\max m}$.

Mnożnik s nosi nazwę mnożnika bezpiecznego (por. [14]). Celem ilustracji rozważań ogólnych TANAKA przedstawił rozwiązanie dla prostej ramy przedstawionej na rys. 5, w dwu przypadkach:

- 1) $0 \leq P \leq 12M_0/L_0, \quad 0 \leq Q \leq 7M_0/L_0,$
- 2) $0 \leq P \leq 12M_0/L_0, \quad -7M_0/L_0 \leq Q \leq 7M_0/L_0.$



Rys. 5

Otrzymano $s = 2$ dla obydwu przypadków. W pracy [20] sformułowano również problem projektowania ram o minimalnym ciężarze, przy czym projektowanie dotyczy nośności granicznej.

3.5. ČYRAS w swojej ciekawej książce [38], będącej niejako podsumowaniem dotychczasowych wyników w dziedzinie zastosowania programowania liniowego do obliczeń sprężysto-idealnie plastycznych, płaskich konstrukcji prętowych omówił również interesujące nas zagadnienie nośności granicznej. Wydaje się celowe przedstawienie w zwartej formie tego sformułowania, gdyż obejmuje ono — jako przypadki szczególne — nasze poprzednie rozważania.

3.5.1. Niech rozpatrywany układ ramowy będzie obciążony siłami skupionymi, które charakteryzować będziemy wektorem obciążenia $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_p)^T$, przy czym dla obciążeń zmiennych przyjmujemy następujące oznaczenia: $P_k \in [P_k^-, P_k^+]$ (przedział zmienności k -tej siły). Dla określoności autor zakłada, że $P_k^- \leq 0$, zaś $P_k^+ \geq 0$, $k = 1, \dots, p$. Oczywiście nie zawsze P_k^+ i P_k^- muszą być różnych znaków. Oznaczmy przez i , $i = 1, \dots, n$, numer przekroju, w którym może powstać przegub plastyczny. Wówczas momenty zginające w układzie charakteryzuje wektor $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n)^T$.

Niech wektor $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ charakteryzuje momenty resztkowe. Momenty graniczne wygodnie jest przedstawić w postaci wektora $\mathbf{M}_0 = (M_{01}, \dots, M_{0n})^T$, a pole prędkości odkształceń plastycznych wektorem $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$; θ_i oznaczać będzie prędkość zmian kąta obrotu w i -tym przegubie plastycznym. Prędkość przemieszczeń scharakteryzujemy wektorem $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-l})^T$, gdzie l oznacza stopień statycznej

niewyznaczalności układu. Ponadto zakładamy, że spełnione są postulaty a-f przedstawione w punkcie 3.1.

Wiadomo, że warunki statycznej zgodności sił wewnętrznych i obciążeń zewnętrznych można zapisać w następującej, macierzowej postaci:

$$(3.27) \quad \mathbf{C}^T \mathbf{M} = \mathbf{P},$$

natomiast warunki zgodności kinematycznej prędkości przemieszczeń i prędkości odkształceń zależnością

$$(3.28) \quad \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\theta},$$

gdzie $\mathbf{C} = ||c_{ij}||$ oznacza macierz współczynników zgodności, \mathbf{C}^T jest macierzą transponowaną macierzy \mathbf{C} .

Pole momentów resztkowych będziemy nazywać:

a) dopuszczalnym, jeśli w sumie z maksymalnymi momentami sprężystymi nie przekracza momentów granicznych,

b) statycznie możliwym, jeśli spełnia warunki równowagi,

c) statycznie dopuszczalnym, jeśli spełnia warunki a) i b).

Korzystając z twierdzenia, które oznaczymy symbolem I: *Spośród statycznie dopuszczalnych pól momentów resztkowych w układzie, w stanie granicznym rzeczywistym jest to, przy którym moc cyklu obciążeń zewnętrznych jest maksymalna* (por. KACZANOW [28]), można sformułować następujące zadanie programowania liniowego:

znaleźć

$$(3.29) \quad \max \left(\sum_k P_k^+ \delta_k^+ - \sum_k P_k^- \delta_k^- \right),$$

przy ograniczeniach

$$(3.30) \quad \sum_k b_{ik}^+ P_k^+ + \sum_k b_{ik}^- P_k^- + R_i \leq M_{oi},$$

$$(3.30.1) \quad - \sum_k b_{ik}^- P_k^+ - \sum_k P_k^- b_{ik}^+ - R_i \leq M_{oi},$$

$$(3.30.2) \quad - \sum_i c_{ij} R_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-l,$$

$$(3.30.3) \quad P_k^+ \geq 0, \quad -P_k^- \geq 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

gdzie δ_k^+ (δ_k^-) oznacza prędkość przemieszczeń w kierunku siły P_k^+ (P_k^-), natomiast b_{ik} są elementami macierzy wpływu. Przyjmujemy, że $\delta_k^+ \geq 0$, $\delta_k^- \geq 0$.

Wyrażenie $\sum_k P_k^+ \delta_k^+ - \sum_k P_k^- \delta_k^-$ oznacza moc sił zewnętrznych, warunek (3.30.2) wyraża zgodność statyczną. Trzeba jeszcze zinterpretować związki (3.30) i (3.30.1). Moment w przekroju i , w zakresie sprężystym, można wyrazić jako $M_{i\text{spr}} = \sum_k b_{ik} P_k$ (b_{ik} są elementami macierzy wpływu).

Jeśli oznaczymy przez

$$(3.31) \quad b_{ik}^+ = \begin{cases} b_{ik} & \text{dla } b_{ik} > 0, \\ 0 & \text{dla } b_{ik} \leq 0, \end{cases}$$

$$(3.31.1) \quad b_{ik}^- = \begin{cases} 0 & \text{dla } b_{ik} \geq 0, \\ b_{ik} & \text{dla } b_{ik} < 0, \end{cases}$$

to ekstremalne wartości momentów (zakładając pracę sprężystą układu) przyjmą postać

$$(3.32) \quad M_{ispr}^+ = \sum_k b_{ik}^+ P_k^+ + \sum_k b_{ik}^- P_k^-,$$

$$(3.32.1) \quad M_{ispr}^- = \sum_k b_{ik}^+ P_k^- + \sum_k b_{ik}^- P_k^+.$$

Dla dopuszczalnego pola momentów resztkowych powinny być spełnione zależności

$$(3.33) \quad -M_{0i} - M_{ispr}^- \leq R_i \leq M_{0i} - M_{ispr}^+, \quad i = 1, \dots, n.$$

Uwzględniając w (3.33) związki (3.32) i (3.32.1) otrzymujemy statyczne (w sensie twierdzenia I) sformułowanie problemu nośności granicznej w terminach programowania liniowego (3.29)–(3.30.3). Oczywiście poszukujemy przedziału zmienności każdej z sił P_k .

3.5.2. Dla przypadku obciążeń proporcjonalnych, tzn. gdy $P_k^+ = -P_k^- = \mu P_k^0$ (μ — mnożnik obciążenia, P_k^0 — stała wartość dla każdego k), przyjmując ponadto $\sum_k P_k^0 (\delta_k^+ - \delta_k^-) = 1$ [można tak przyjąć, gdyż δ_k^+ , δ_k^- nie wchodzą do związków (3.30)–(3.30.3)], otrzymujemy z (3.29) — (3.30.3) po prostych przekształceniach zadanie:

znaleźć

$$\max \mu,$$

przy ograniczeniach

$$M_i \leq M_{0i},$$

$$-M_i \leq M_{0i},$$

$$\mu d_j - \sum_i c_{ij} M_i = 0, \quad \mu \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-l,$$

gdzie przyjęto $d_j = \sum_i c_{ij} \sum_k P_k^0 b_{ik}$, $M_i = R_i + \mu \sum_k P_k^0 b_{ik}$. Sformułowanie to jest oczywiście wypowiedzią twierdzenia o dolnej granicy obciążenia.

3.5.3. Udowodnimy, iż ze związków (3.29)–(3.30.3) można wyprowadzić omówione już twierdzenie o dostosowaniu ram [por. (3.25)]. Interesować nas będzie tylko pole dopuszczalne, więc warunku (3.30.2) nie będziemy brać pod uwagę.

Położmy $P_k^+ = \mu P_k^{0+}$, $P_k^- = \mu P_k^{0-}$, gdzie μ jest mnożnikiem obciążenia, zaś $P_k^{0+} \geq 0$, $P_k^{0-} \leq 0$ są ustalone. Wówczas kładąc $\sum_k P_k^{0+} \delta_k^+ - \sum_k P_k^{0-} \delta_k^- = 1$, z (3.29), (3.30), (3.30.1),

(3.30.3), otrzymujemy zadanie:

znaleźć

$$\max \mu$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} R_i + \mu M_{ispr}^+ &\leq M_{oi}, \\ -R_i - \mu M_{ispr}^- &\leq M_{oi}, \\ \mu &\geq 0, \end{aligned}$$

co właśnie jest twierdzeniem o dostosowaniu.

Wydaje się, iż ostatni wniosek nie został do tej pory nigdzie przedstawiony.

3.5.4. Przejdźmy obecnie do sformułowania kinematycznego (w sensie poniższego twierdzenia II) problemu nośności granicznej (ČYRAS [38]).

Pole prędkości przemieszczeń będziemy nazywać:

a) dopuszczalnym, jeśli składowe tego pola są ograniczone (indywidualnie lub w pewnych kombinacjach),

b) kinematycznie możliwym, jeśli spełnia warunki zgodności kinematycznej,

c) kinematycznie dopuszczalnym, jeśli spełnia a) i b).

Zadanie programowania liniowego zbudujemy, wykorzystując twierdzenie II: *Spośród kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń rzeczywistym jest pole, któremu odpowiada minimalna moc dysypowana.*

W sformułowaniu kinematycznym, niewiadomymi są prędkości odkształceń i przemieszczeń, związane warunkami zgodności kinematycznej. Zamiast macierzy zgodności można rozpatrywać macierz wpływu, gdyż wówczas również będą spełnione warunki zgodności. Tak więc prędkość przemieszczenia ϑ_k w kierunku działania k -tej siły można zapisać następująco:

$$(3.34.1) \quad \vartheta_k^+ = \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^+ - \sum_i b_{ik}^- \theta_i^-,$$

$$(3.34.2) \quad \vartheta_k^- = \sum_i b_{ik}^- \theta_i^+ - \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^-, \quad k = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-$, $\theta_i^+ \geq 0$, $\theta_i^- \geq 0$.

Zgodnie z określeniem dopuszczalnego pola prędkości przemieszczeń istnieją ograniczenia, które oznaczymy przez $\delta_k^+ \geq 0$, $\delta_k^- \geq 0$, czyli pole to będzie spełniać warunki

$$(3.35.1) \quad \vartheta_k^+ \geq \delta_k^+,$$

$$(3.35.2) \quad -\vartheta_k^- \geq \delta_k^-, \quad k = 1, \dots, p.$$

Tak więc na podstawie ostatniego twierdzenia, zależności (3.34.1)–(3.35.2) i określenia pola kinematycznie dopuszczalnego, otrzymujemy zadanie:

znaleźć

$$(3.36) \quad \min \left[\sum_i M_{oi} (\theta_i^+ + \theta_i^-) \right],$$

przy ograniczeniach

$$(3.37) \quad \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^+ - \sum_i b_{ik}^- \theta_i^- \geq \delta_k^+,$$

$$(3.37.1) \quad - \sum_i b_{ik}^- \theta_i^+ + \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^- \geq \delta_k^-,$$

$$(3.37.2) \quad \theta_i^+ - \theta_i^- - \sum_j c_{ij} \vartheta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n-l,$$

$$(3.37.3) \quad \theta_i^+ \geq 0, \quad \theta_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $\sum_i M_{oi}(\theta_i^+ + \theta_i^-)$ oznacza moc dysypowaną, zaś związki (3.37.2) wyrażają warunki kinematycznej zgodności.

Modele (3.36)–(3.37.3) oraz (3.29)–(3.30.3) stanowią parę zadań dualnych.

W pracy [36] ČYRAS rozpatrywał związki między modelami projektowania optymalnego a modelami, w których poszukujemy obciążenia granicznego [te ostatnie, to zadania (3.29)–(3.30.3), (3.36)–(3.37.3)]. Okazuje się, iż tylko dla obciążeń proporcjonalnych modele te są równoważne, tzn. z modelu projektowania optymalnego otrzymujemy obciążenie graniczne i na odwrót (por. również [38]).

W książce [38] omówiono również zagadnienie optymalnego projektowania na minimum ciężaru i wyznaczania ciężaru oraz określania przemieszczeń poprzedzających zniszczenie.

3.6. Wykorzystanie danych eksperymentalnych dla sformułowania zadania nośności granicznej rozpatrzyli GYLYS, ZAKAREVIČIUS, ČYRAS [26].

W pracy przedstawiono modyfikację zadania programowania liniowego, w oparciu o znajomość rzeczywistego mechanizmu zniszczenia, dla przypadku obciążeń prostych. Zbadanie modelu danego układu prętowego daje nam informację co do przekrojów, w których tworzą się przeguby plastyczne; innymi słowy poznajemy rzeczywisty mechanizm zniszczenia. Znajomość tego mechanizmu pozwala zmodyfikować zarówno metodę statyczną, jak i kinematyczną. Modyfikacja polega na sprowadzeniu zadania programowania liniowego do układu równań liniowych, co upraszcza rozwiązanie.

Rozpatrzmy zastosowanie danych eksperymentalnych do metody statycznej, dla której model matematyczny przedstawiono w punkcie 3.5.2. Załóżmy, iż po eksperymencie okazało się, że utworzył się całkowity mechanizm zniszczenia, tzn. powstało $l+1$ przegubów plastycznych (l — stopień statycznej niewyznaczalności). Oznacza to, że $l+1$ nierówności przedstawiających warunki plastyczności — są to nierówności typu $M_{oi} \geq M_i$, $-M_i \leq M_{oi}$ — przechodzi w równości. Ponieważ mamy $n-l$ równań opisujących zgodność statyczną, więc w sumie otrzymujemy $l+1+n-l = n+1$ liniowo niezależnych równań. Liczba niewiadomych również wynosi $n+1$ (mnożnik obciążenia oraz n wartości momentów M_i , $i = 1, \dots, n$). Ale ponieważ mechanizm zniszczenia jest całkowity więc znamy $l+1$ momentów M_i . Są one oczywiście równe momentom granicznemu M_{oi} . Łatwo udowodnić, że pozostałych $n-l$ niewiadomych wyznaczyć można z następującego układu równań:

$$(3.37.4) \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{M}}_0,$$

gdzie $\tilde{\mathbf{D}} = \|\mathbf{D}, -\tilde{\mathbf{C}}\|$ jest macierzą stopnia $n-l$, $\mathbf{D} = (d_1, \dots, d_{n-l})^T$, macierz $\tilde{\mathbf{C}}$ otrzymujemy z macierzy \mathbf{C}^T przez wykreślenie kolumn odpowiadających momentom w $l+1$ przegubach plastycznych, macierz $\tilde{\mathbf{C}}_1$ powstaje z macierzy \mathbf{C}^T przez wykreślenie kolumn,

które odpowiadają momentom mniejszym od granicznych. Macierz $\tilde{\mathbf{C}}$ ma $(n-l)$ wierszy i $(n-l-1)$ kolumn, zaś macierz $\tilde{\mathbf{C}}_1$ jest macierzą o $(n-l)$ wierszach i $(l+1)$ kolumnach. Wektor $\tilde{\mathbf{M}}$ o $(n-l-1)$ składowych powstaje z wektora $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)^T$ przez wykreślenie momentów $M_i = M_{0i}$, natomiast wektor $\tilde{\mathbf{M}}_0$ składa się z tych elementów wektora \mathbf{M}_0 , które odpowiadają przegubom plastycznym (czyli wektor $\tilde{\mathbf{M}}_0$ ma $l+1$ składowych). Macierz $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ jest macierzą odwrotną macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$. Jak rozumieć słowo «odpowiadających»? Oto wyjaśnienie: jeśli np. w przekroju oznaczonym numerem 1 powstaje przegub plastyczny ($M_1 = M_{01}$), to w macierzy \mathbf{C}^T wykreślamy (lub pozostawiamy) kolumnę pierwszą itd.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla metody kinematycznej z tym, że układ równań zawiera $n+1$ niewiadomych ($n-l$ prędkości przemieszczeń i $l+1$ prędkości odkształceń).

Przypadek, gdy model ulega zniszczeniu częściowemu (tzn. powstaje mniej niż $l+1$ przegubów plastycznych) formalnie nie różni się od przypadku zniszczenia całkowitego tylko dla metody statycznej. Dla metody kinematycznej otrzymuje się wówczas więcej równań niż niewiadomych. Dla znalezienia tych niewiadomych należy zbudować macierz odwrotną do macierzy odpowiadającej niezerowym niewiadomym, z której wykreślono wiersze odpowiadające równaniom zgodności kinematycznej dla przekrojów znajdujących się w części statycznie nieokreślonej.

W pracy [26] powyższe rozważania zilustrowano na przykładzie ramy przedstawionej na rys. 5, przy czym $Q = P$, $L_0 = 2,5$, zaś momenty graniczne wszystkich elementów są równe i wynoszą $M_0 = 1,0$. Model wykonano z polichlorku winylu. Okazało się, iż w punkcie przyłożenia siły Q (tzn. w przekroju 2) nie powstaje przegub plastyczny. Mechanizm zniszczenia jest oczywiście całkowity, gdyż liczba przegubów plastycznych wynosi 4, zaś $l+1 = 3+1 = 4$. Wartości momentów w przekrojach 1, 3, 4, 5 są więc równe granicznym. Dla znalezienia pozostałych niewiadomych tzw. momentu M_2 , intensywności obciążenia granicznego, prędkości odkształceń i przemieszczeń, rozważono metody statyczną i kinematyczną, korzystając z poczynionych uprzednio uwag.

3.7. CERADINI, GAVARINI [3] rozpatrzyli belkę ciągłą i łuk paraboliczny. RÄUTU, CHIROIU [16], [17] omówili problem nośności granicznej i minimalnego ciężaru, natomiast w pracy NICHOLLSA [15] omówiono zagadnienie minimalnego ciężaru oraz kosztu konstrukcji przy założeniu liniowej zależności między momentem granicznym M_0 a jednostkowym ciężarem.

3.8. Automatyczne obliczanie ram poprzedziło szersze zastosowanie programowania liniowego w rozważanych przez nas zagadnieniach. Problemy automatycznego obliczania ram omówione zostały w pracach HEYMANA [9], HEYMANA, PRAGERA [10], LIVESLEYA [13]. W pracach [9] i [10] rozpatrzono automatyczne obliczanie ram na minimalny ciężar, natomiast LIVESLEY przedstawił problem minimalnego ciężaru i wyznaczenia współczynnika nośności. Omówimy więc pracę LIVESLEYA.

Przyjmujemy następujące założenia:

- 1) na układ o ustalonej geometrii działają tylko obciążenia skupione,
- 2) układ składa się z elementów o stałych przekrojach,
- 3) wpływ sił normalnych i poprzecznych jest pomijalny,

4) moment graniczny M_0 każdego elementu jest proporcjonalny do jego przekroju poprzecznego.

Z założenia 4) wynika, że całkowity ciężar układu jest liniową funkcją momentów granicznych. Problem minimalnego ciężaru sprowadza się do minimalizacji tej funkcji przy pewnych ograniczeniach. Oznaczmy przez M_i , $i = 1, \dots, n$, momenty w przekrojach, w których mogą powstać przeguby plastyczne. Zbiór tych momentów dzielimy na grupy, przy czym każda grupa odpowiada przekrojom, które są równe. Ponieważ geometria układu jest znana, więc z każdą grupą będzie związana pewna długość. Wprowadźmy wielkość pomocniczą M'_i , którą otrzymujemy przez pomnożenie każdego momentu M_i przez długość l_i związaną z grupą, do której ten moment należy.

Niech układ będzie r -krotnie statycznie niewyznaczalny. Równania równowagi zapiszemy następująco:

$$(3.38) \quad M_i = \sum_k a_{ik} m_k + \overset{\circ}{M}_i,$$

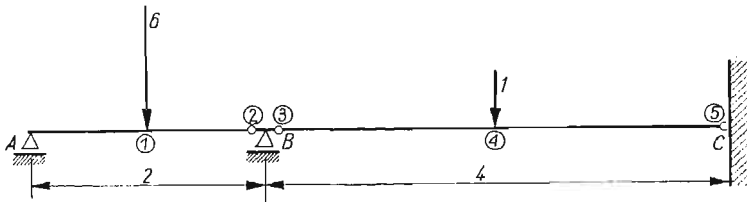
gdzie m_k , $k = 1, \dots, r$, to dowolne momenty.

Pomnóżmy (3.38) przez odpowiednie długości elementów. Wówczas otrzymujemy związek na momenty M'_i

$$(3.39) \quad M'_i = \sum_k A_{ik} m_k + \overset{\circ}{M}'_i.$$

Macierze $||a_{ik}||$, $||A_{ik}||$ zależą tylko od geometrii układu, natomiast wielkości $\overset{\circ}{M}_i$, $\overset{\circ}{M}'_i$ od obciążenia.

Rozważmy dla przykładu belkę przedstawioną na rys. 6,



Rys. 6

dla której przeguby plastyczne mogą powstać w punktach 1, 2, 3, 4, 5. Jeśli jako dowolne przyjmiemy momenty w punktach B i C wówczas z rozważań statycznych otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \\ M'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_B \\ m_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy przez $M_{\bar{i}}$ maximum $|M_i|$, gdzie wskaźnik i przebiega daną grupę (tzn. grupę momentów odpowiadających określonemu przekrojowi). Wówczas $|M_{\bar{i}}| \geq |M'_i|$ (dla danej grupy).

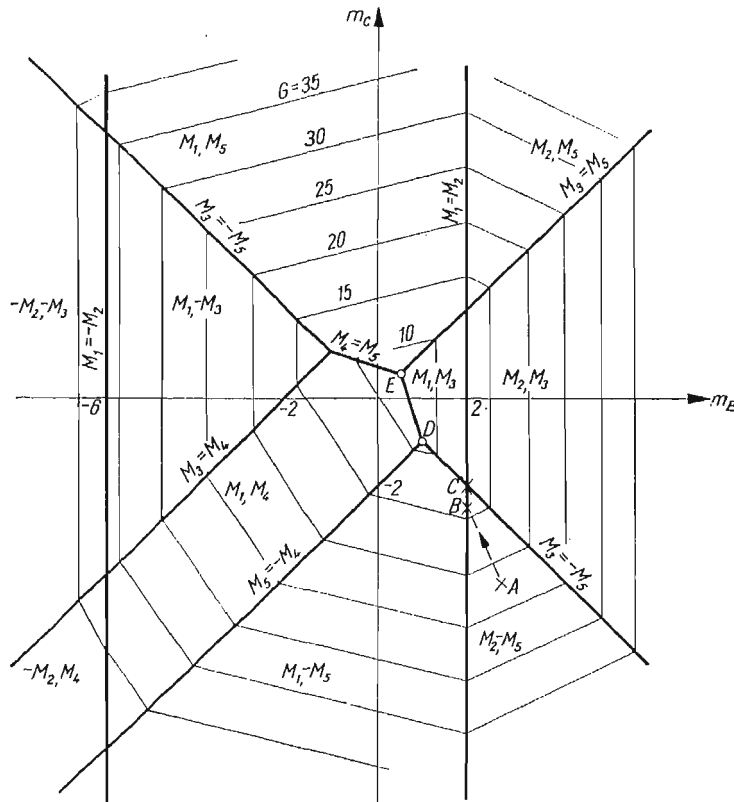
Oczywiście moment graniczny M_0 każdego pręta musi spełniać nierówność $M_0 \geq |M_{\bar{i}}|$. Układ będzie układem o minimalnym ciężarze, gdy $M_0 = |M_{\bar{i}}| (M_0 l_{\bar{i}} = |M_{\bar{i}}|)$. Taki układ będziemy nazywać projektem krytycznym. Będzie on posiadał w każdej grupie przynajmniej jeden przegub plastyczny.

Ciężar G układu — uwzględniając założenie 4) i zależności (3.39) — obliczymy ze wzoru

$$(3.40) \quad G = \sum_{\bar{i}} |M_{\bar{i}}'| = \sum_{\bar{i}} \left| \sum_k A_{\bar{i}k} m_k + \dot{M}_{\bar{i}}' \right| = \sum_{\bar{i}} \left(\sum_k A_{\bar{i}k} m_k + \dot{M}_{\bar{i}}' \right) \operatorname{sgn} M_{\bar{i}}'.$$

Jeśli można znaleźć zbiór momentów m_k , $k = 1, \dots, r$ minimalizujących funkcję $G(m_k)$, wówczas projekt krytyczny będzie układem o najmniejszym ciężarze.

Dla znalezienia minimum funkcji G , LIVESLEY proponuje dwie metody iteracyjne, podobne nieco do metody sympleksowej programowania liniowego. Nie będziemy ich tutaj przytaczać, natomiast omówimy ich sens geometryczny.



Rys. 7

Można założyć, iż momenty m , definiują r -wymiarową przestrzeń euklidesową. Równania (3.38) wiążą z każdym jej punktem układ momentów M_i , a tym samym pewną wartość funkcji G . Podzielmy przestrzeń na obszary, których brzegami są hiperpłaszc-

czyzny. Na każdej takiej hiperpłaszczyźnie albo dwa momenty z grupy mają równe moduły, albo moment o maksymalnym module zmienia znak. Minimum funkcja G osiąga w pewnym punkcie (wierzchołku), w którym przecina się r hiperpłaszczyzn. W celu znalezienia tego minimum wychodzimy z pewnego punktu początkowego, a następnie poruszamy się w sposób dyskretny aż do osiągnięcia minimum.

Powyższe rozważania dla przykładu z rys. 6 przedstawia rys. 7. W tym przypadku momenty m_k , $k = 1, 2$, tworzą przestrzeń dwuwymiarową. Na rys. 7 zaznaczono linie, na których $G = \text{const}$, a ponadto największe (co do modułu) wartości momentów w danym obszarze. Punktem początkowym metody iteracyjnej był punkt A . Minimum osiągnięte jest w punkcie E .

Przejdźmy do zagadnienia wyznaczania współczynnika obciążenia granicznego.

Niech $M_i'' = \frac{d^2 M_i}{M_{0i}}$, $i = 1, \dots, n$ gdzie M_{0i} jest momentem granicznym w i -tym przegubie.

Mamy teraz tylko jedną grupę, do której należą wskaźniki i . Niech \bar{i} oznacza taki wskaźnik spośród liczb $1, \dots, n$, dla którego $|M_i''|$ przyjmuje maximum. Dzieliąc równania (3.38) przez odpowiednie wartości M_{0i} otrzymujemy równanie

$$(3.39.1) \quad M_i'' = \sum_k B_{ik} m_k + \overset{\circ}{M}_i''.$$

Oznaczmy przez F funkcję postaci

$$(3.40.1) \quad F = |M_{\bar{i}}''| = \frac{|M_{\bar{i}}|}{M_{0\bar{i}}}, \quad \text{czyli} \quad \mu = \frac{M_{0\bar{i}}}{|M_{\bar{i}}|} = \frac{1}{F}.$$

Stąd wynika, że maximum μ jest osiągnięte, gdy $F = \text{min}$. Podobnie jak poprzednio, minimum to osiągnięte jest w wierzchołku, gdzie spełnionych jest r równości typu $|M_i''| = |M_{\bar{i}}''|$. W takim punkcie $r+1$ wartości M_i'' będzie mieć jednakowe moduły, odpowiada to $r+1$ przegubom plastycznym, potrzebnym do utworzenia mechanizmu. Gdy μ_{max} osiągnięte jest w większej liczbie punktów, wówczas mechanizm będzie miał mniej niż $r+1$ przegubów (zniszczenie częściowe).

4. Płyty

Problem nośności granicznej dla płyt z zastosowaniem programowania liniowego rozważono w pracach: KOOPMANA, LANCE'A [12], CERADINIEGO, GAVARINIEGO [3], [4], [5], BRUSIENCOWA, RŻANICYNA [25], HOCHFELDA, CZERNIAWSKIEGO [27], TERECHINY [32], BORKAUSKASA, ČYRASA [2], [23], [24], [35], oraz WOLFENSBERGERA [22].

4.1. W pracy KOOPMANA, LANCE'A [12] sformułowano i rozwiązano zagadnienie nośności granicznej dla sztywnoplastycznych płyt kołowych i kwadratowych w przypadku swobodnego ich podparcia lub utwierdzenia.

W stanie osiowo-symetrycznym na element płyty kołowej działają obciążenia i wielkości wewnętrzne takie, jak przedstawiono na rys. 8; wówczas różniczkowe równowagi dla takich stanów ma postać

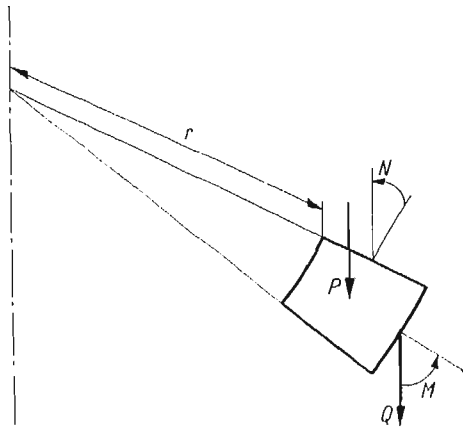
$$(4.1) \quad \frac{d}{dr} (rM) - N = -\frac{1}{2} Pr^2,$$

gdzie w (4.1) M , N — oznaczają, odpowiednio, promieniowy i obwodowy moment zginający; P oznacza równomierne obciążenie ciągłe, r — promień. Na rys. 8 Q oznacza siłę poprzeczną.

Równanie (4.1) można zapisać w formie bezwymiarowej

$$(4.1.1) \quad \frac{d}{dx} (xm) - n = -\frac{1}{2} \mu x^2.$$

W równaniu tym przyjęto oznaczenia: $\mu = \frac{PR^2}{M_0}$, $m = \frac{M}{M_0}$, $n = \frac{N}{N_0}$, $x = \frac{r}{R}$, $x \in [0,1]$; ponadto $M_0 = N_0 = (1/4)\sigma_0 h^2$, σ_0 — granica plastyczności, R jest zewnętrznym promieniem płyty, h jej grubością. W rozdziale drugim wspominaliśmy o tym, że dla zastosowania



Rys. 8

metody programowania konieczne jest opisanie konstrukcji w sposób dyskretny. W tym celu równanie (4.1.1) przedstawiamy w postaci różnicowej

$$(4.1.2) \quad s\delta \frac{m_{s+1} - m_{s-1}}{2\delta} + m_s - n_s = -\frac{1}{2} \mu (s\delta)^2,$$

przy czym $x_s = s\delta$, $m(x_s) = m_s$, $n(x_s) = n_s$, $s = 1, \dots, z$, $\delta = \frac{1}{z}$; tutaj z — oznacza liczbę podprzedziałów, na które podzielono przedział $[0,1]$.

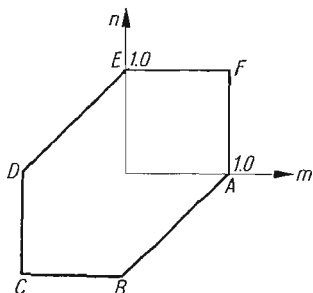
Zakładając, że płyta wykonana jest z materiału spełniającego warunek plastyczności Treski, otrzymujemy następujące wyrażenie analityczne (w terminach zmiennych dyskretnych m_s i n_s)

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} -1 &\leq m_s \leq 1, \\ -1 &\leq n_s \leq 1, \\ -1 &\leq m_s - n_s \leq 1, \quad s = 1, \dots, z. \end{aligned}$$

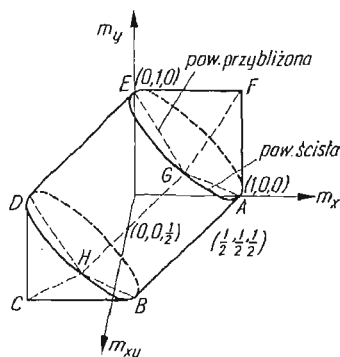
Równania (4.1.2) i nierówności (4.1.3) stanowią układ ograniczający. Przy tych ograniczeniach należy znaleźć maximum funkcji $f = \mu$. Przyjmując, że $z = 10$ ($\delta = 0,1$), a jako

warunek brzegowy $m_0 = n_0$ i dodatkowy warunek dla płyty swobodnie podpartej $m_{10} = 0$ otrzymano: $\mu_G = 5,97$ (wartość dokładna wynosi 6,00).

Dla płyty utwierdzonej uzyskano $\mu_G = 11,28$ (wartość dokładna 11,26). Jak widać z tego porównania, otrzymane przybliżone wartości nośności granicznej są praktycznie wystarczające. Dla płyty utwierdzonej, pola naprężeń odpowiadają punkty leżące na bokach DE , EF ; dla swobodnie podpartej — na boku EF sześcioboku Treski (rys. 9).



Rys. 9



Rys. 10

Rozważmy obecnie zagadnienie zginania płyty kwadratowej. Równanie różniczkowe równowagi elementu płyty ma postać

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial Y^2} + P = 0,$$

gdzie M_{xy} oznacza moment skręcający.

Przekształcając równanie (4.2) do postaci bezwymiarowej mamy

$$(4.2.1) \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 6\mu = 0,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_0}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L},$$

$\mu = \frac{PL^2}{6M_0}$; L — oznacza połowę długości płyty, M_0 — jak dla płyty kołowej (moment graniczny).

Zakładając, że płyta wykonana jest z idealnie plastycznego materiału, spełniającego warunek plastyczności Treski, otrzymujemy:

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} -1 &\leq \frac{m_x + m_y}{2} + \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1, \\ -1 &\leq \frac{m_x + m_y}{2} - \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1, \\ -1 &\leq 2 \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1. \end{aligned}$$

Rysunek 10 przedstawia interpretację geometryczną warunku plastyczności (4.2.2).

Dla sformułowania problemu w terminach programowania liniowego należy:

- 1) zamienić równanie (4.2.1) na równania różnicowe,
- 2) dokonać linearyzacji warunku plastyczności (4.2.2).

Przyjęto następującą zlinearyzowaną formę warunku plastyczności ($m_{xy} \geq 0$):

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} -1 &\leq m_x + m_{xy} \leq 1, \\ -1 &\leq m_y + m_{xy} \leq 1, \\ m_x - m_y + 2m_{xy} &\leq 1, \\ -m_x + m_y + 2m_{xy} &\leq 1. \end{aligned}$$

Ilustrację zlinearyzowanego warunku plastyczności (4.2.3) przedstawiono na rys. 10. Wzdłuż przekątnej płyty: $m_x = m_y$; na osiach $x = 0$, $y = 0$; $m_{xy} = 0$. Warunek brzegowy dla płyty swobodnie podpartej ma postać: $m_{xy} = 0$, dla $x = \pm 1$, $0 \leq y \leq 1$. W rezultacie, po dokonaniu dyskretyzacji, otrzymano $\mu_G = 0,969$ — dla płyty swobodnie podpartej, a $\mu_G = 1,596$ — dla płyty utwierdzonej.

Dla porównania warto przytoczyć maksymalną wartość statycznego mnożnika obciążenia podaną przez H. E. SHULLA i L. W. HU (1963): dla płyty swobodnie podpartej mnożnik ten równa się 0,826. Wartość minimalna kinematycznego współczynnika obciążenia (dla płyty swobodnie podpartej) wynosi 1. Tak więc błąd uzyskany drogą programowania liniowego jest bardzo mały.

4.2. CERADINI, GAVARINI [3] dla płyty uzbrojonej stosują warunki plastyczności Johansena. Wówczas dodatnie i ujemne momenty graniczne w funkcji kąta α zawartego między kierunkiem uzbrojenia x a danym kierunkiem wyrazimy następująco:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} M_0^+(\alpha) &= M_{0x}^+ \cos^2 \alpha + M_{0y}^+ \sin^2 \alpha, \\ M_0^-(\alpha) &= M_{0x}^- \cos^2 \alpha + M_{0y}^- \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

gdzie M_{0x}^+ , M_{0y}^+ , M_{0x}^- , M_{0y}^- przedstawiają momenty graniczne w dwu prostopadłych kierunkach uzbrojenia. Warunek plastyczności wyrazimy zależnościami:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha &= \begin{cases} M_0^+(\alpha) \\ -M_0^-(\alpha) \end{cases}, \\ \frac{d}{d\alpha} (M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha) &= \begin{cases} \frac{dM_0^+(\alpha)}{d\alpha} \\ -\frac{dM_0^-(\alpha)}{d\alpha} \end{cases}. \end{aligned}$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe:

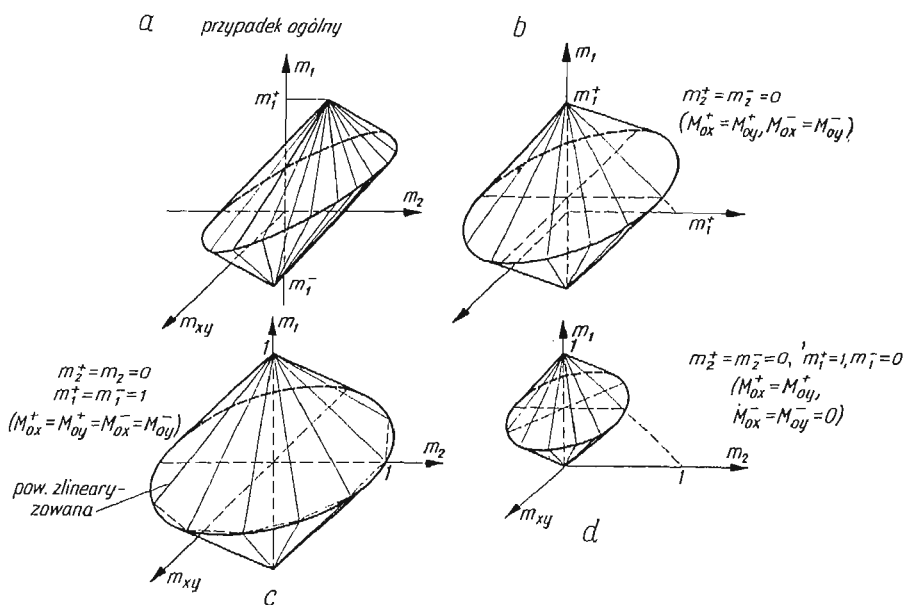
$$m_1 = \frac{M_x + M_y}{2M_p}, \quad m_1^\pm = \frac{M_{0x}^\pm + M_{0y}^\pm}{2M_p}, \quad m_2 = \frac{M_x - M_y}{2M_p}, \quad m_2^\pm = \frac{M_{0x}^\pm - M_{0y}^\pm}{2M_p}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{2M_p}$$

(M_p oznacza moment graniczny), z (4.3.1) — po wyeliminowaniu α — otrzymujemy warunki plastyczności w postaci

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} (m_2 - m_2^+)^2 + m_{xy}^2 &= (m_1 - m_1^+)^2, \\ (m_2 + m_2^-)^2 + m_{xy}^2 &= (m_1 - m_1^-)^2. \end{aligned}$$

Związki (4.3.2) przedstawiają dwa stożki kołowe (rys. 11).

Z rys. 11 widać, w jaki sposób przeprowadzić linearyzację warunku plastyczności (np. przez wpisanie wielościanu o trójkątnych ścianach). W pracach [3] i [5] podano przykłady numeryczne dla płyt kwadratowych.



Rys. 11

4.3. Problem wyznaczenia dolnej granicy obciążenia płyt żelbetowych, dla prostych obciążeń i przy pominięciu wpływu sił normalnych i poprzecznych omówił WOLFENBERGER [22]. Omówił on również zagadnienie optymalnego uzbrojenia (czyli uzbrojenia o minimalnym ciężarze).

4.4. Zagadnienie nośności granicznej, z uwzględnieniem stacjonarnego pola temperatur, dla płyty okrągłej z otworem rozważono w pracy HOCHFELDA, CZERNIAWSKIEGO [27]. Rozpatrzmy taką płytę przedstawioną na rys. 12.

Równanie równowagi, ma postać

$$(4.4) \quad \frac{d}{dr}(rM) - N + \int_a^r p x dx - aT = 0.$$

Zgodnie z warunkiem plastyczności Treski mamy:

$$(4.4.1) \quad |M| \leq M_0, \quad |N| \leq M_0, \quad |M - N| \leq M_0, \quad M_0 = (1/4)\sigma_0 h^2.$$

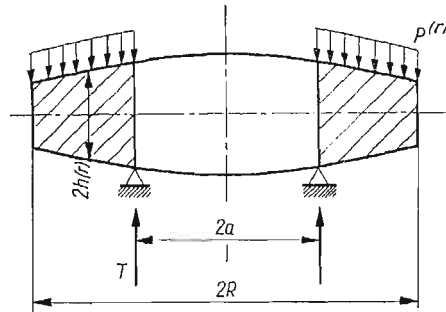
Równanie (4.4) przedstawiamy w postaci różnicowej

$$(4.4.2) \quad r_i M_i - \sum_{j=1}^l N_j d_j + \sum_{j=1}^l d_j \sum_{k=1}^j p_k r_k d_k - r_i a T + c = 0,$$

gdzie w (4.4.2) przyjęto oznaczenia: $d_i = \frac{1}{2}(\Delta r_{j-1} + \Delta r_j)$, $1 \neq j \neq i$, $d_1 = \frac{1}{2} \Delta r_1$, $d_i = \frac{1}{2} \Delta r_i$, c — jest stałą, którą wyznaczyć można z warunku brzegowego.

Przy warunkach (4.4.1) i (4.4.2) należy znaleźć maximum funkcji $z = p$ pamiętając o tym, że w warunku (4.4.1) zmienne M i N należy brać w postaci dyskretnej.

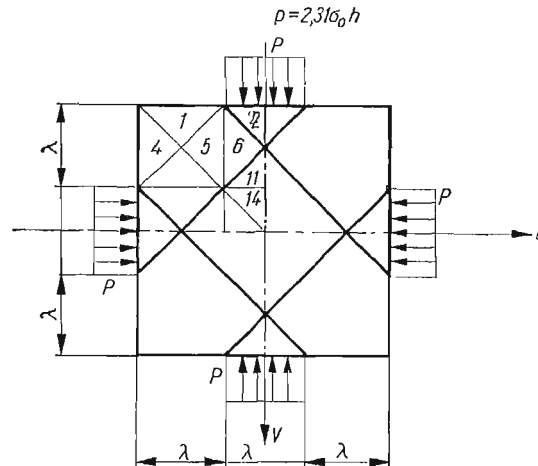
W pracy [27] omówiono również problem dostosowywania płyty kołowej, o utwierdzonym brzegu, poddanej działaniu cyklicznie zmiennego obciążenia i osiowo-symetrycznego



Rys. 12

poła temperatur. Podano wyniki dla przypadku, gdy obciążenie zewnętrzne jest stałe, a temperatura jest liniową funkcją zmiennej odnoszonej wzdłuż elementu normalnego do powierzchni środkowej płyty.

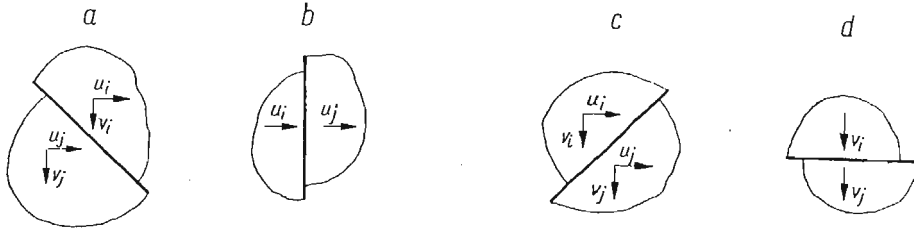
4.5. W pracy BRUSIENCOVA, RZANICYNA [25] przedstawiono możliwość zastosowania liniowego programowania parametrycznego do określenia nośności granicznej tarczy, w przypadku płaskiego stanu naprężenia.



Rys. 13

Niech w stanie równowagi granicznej linie załomu tworzą siatkę kwadratową z przekątnymi (rys. 13). Załóżmy dalej, że w stanie zniszczenia występują tylko skupione od-

kształcenia (wydłużenia lub skrócenia) po linii styku odpowiednich płyt 1, 2, ..., Skupionym wydłużeniem (skróceniem) ε nazywać będziemy wzajemne przemieszczenie punktów znajdujących się na cienkiej odkształcalnej warstwie w kierunku prostopadłym do warstwy. Poza warstwami płyty są sztywne.



Rys. 14

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $u_i(v_i)$ — rzut przemieszczenia i -go płyta na oś poziomą (pionową). Dodatni kierunek dla u przyjmujemy w prawo, dla v — w dół. Wzajemne rozchodzenia się płyt uważamy za dodatnie, zbliżenie — ujemne. Wówczas skupione odkształcenie można zapisać w formie następującej (zgodnie z rys. 14a–d):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= 0,5 \sqrt{2} (u_i - v_i - u_j + v_j), & \varepsilon_{ij} &= (-u_i + u_j), \\ \varepsilon_{ij} &= 0,5 \sqrt{2} (-u_i - v_i + u_j + v_j), & \varepsilon_{ij} &= (-v_i + v_j). \end{aligned}$$

Symetria i brak przesunięć po liniach styku płyt pozwalają wyrazić skupione odkształcenia przez 5 niezależnych przemieszczeń u i v płyt 1, 2, 5, 6, 11 i 14 (rys. 14). Prace sił wewnętrznych dla $\varepsilon_{ij} > 0$, $\varepsilon_{ij} < 0$ wyrażają kolejno zależności:

$$(4.6) \quad T = \sum_{i,j} \sigma'_0 \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij}}{\lambda}, \quad T = - \sum_{i,j} \sigma'_0 \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij}}{\lambda},$$

gdzie $\sigma'_0 = (2/\sqrt{3})h\lambda\sigma_0$, σ_0 — granica plastyczności (jednakowa dla rozciągania i ściskania), h — grubość tarczy, 3λ — szerokość tarczy kwadratowej, l_{ij} — długość linii załomu i -go oraz j -go płyta.

Niech

$$(4.6.1) \quad \varepsilon'_{ij} = \left| \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij}}{\lambda} \right|,$$

wówczas zależności (4.6) można zapisać wzorem: $T = \sum_{i,j} \sigma'_0 \varepsilon'_{ij}$. Praca sił zewnętrznych wynosi $V = 0,5 \lambda p v$. Oznaczmy przez

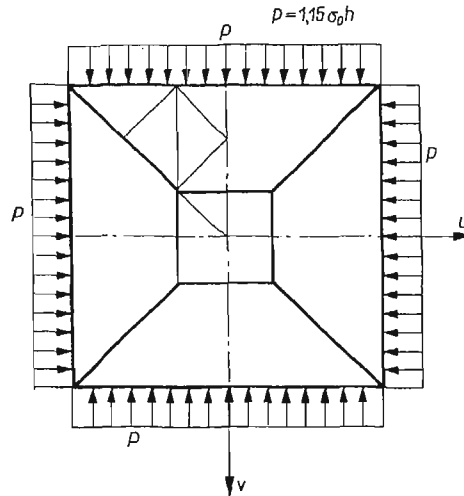
$$(4.6.2) \quad U = V - T$$

całkowitą stratę energii potencjalnej. Z wszystkich możliwych form zniszczenia konstrukcji rzeczywistą jest ta, której odpowiada minimum obciążenia, czyli maximum U . Ponadto w stanie równowagi granicznej $U = 0$. Tym samym otrzymujemy zadanie programowania parametrycznego, polegające na znalezieniu maximum formy U (4.6.2), przy ograniczeniach (4.6.1). Ponadto trzeba znaleźć taką wartość parametru obciążenia, przy którym max

$U = 0$. Dla szczególnego przypadku mechanizm zniszczenia i wartość obciążenia granicznego podano na rys. 13.

Wykorzystując powyższe sformułowanie można też rozwiązać zadanie, dla którego mechanizm zniszczenia oraz wartość p przedstawia rys. 15.

Formułując zagadnienie dla tarczy przedstawionej na rys. 16a jesteśmy w stanie rozwiązać zadania, dla których mechanizmy zniszczenia oraz wartość obciążenia podano na rys. 16b, c.



Rys. 15

4.6. Rozpatrzmy płytę kołową poddaną działaniu dowolnego niesymetrycznego obciążenia (TERECHINA [32]). W płytę kołową wpisujemy wieloboki, których liczba boków zależy będzie od wymaganej dokładności. Sieć możliwych linii załomów przyjmujemy w postaci niejednakowych trójkątów (rys. 17). Jako ograniczenie przyjmujemy następujące nierówności:

$$(4.7) \quad \varphi_i \geq \theta_i l_i, \quad \varphi_i \geq -(M'_0/M_0)\theta_i l_i,$$

gdzie

l_i — długość i -tej linii załomu,

θ_i — kąt obrotu tej linii załomu,

M_0, M'_0 — odpowiednio dodatni i ujemny moment graniczny,

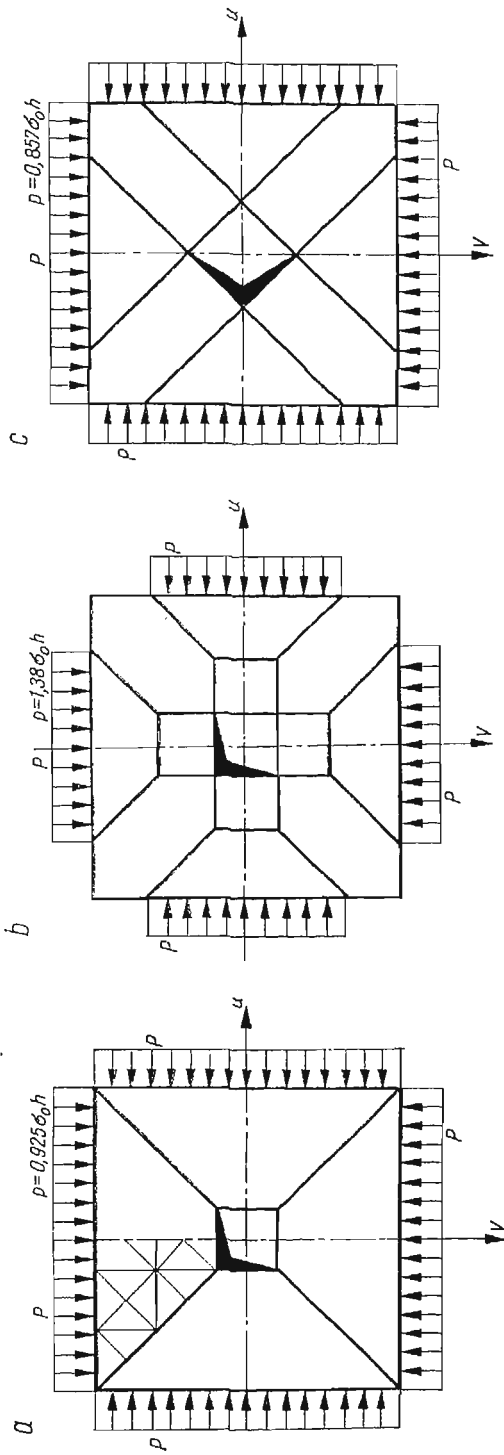
φ_i — pomocnicza wielkość nieujemna.

Strata energii potencjalnej układu wynosi

$$(4.8) \quad U = \sum_i P_i w_i - \sum_i M_0 \varphi_i,$$

gdzie w_i — ugięcie punktu; suma pierwsza oznacza pracę sił zewnętrznych, druga — wewnętrznych.

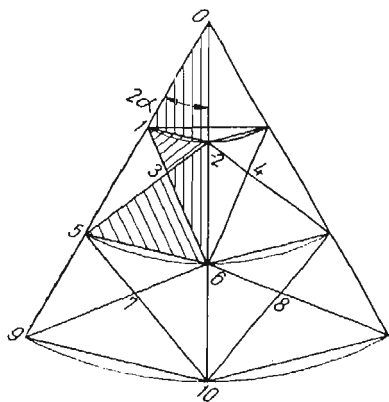
W przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego q , siłę można przyłożyć w środku ciężkości zakresowanego trójkąta (rys. 17). Wówczas $P_i = qF_i$, gdzie F_i — pole trójkąta. Ugięcie środka ciężkości trójkąta można wyznaczyć jako średnią arytmetyczną ugięć



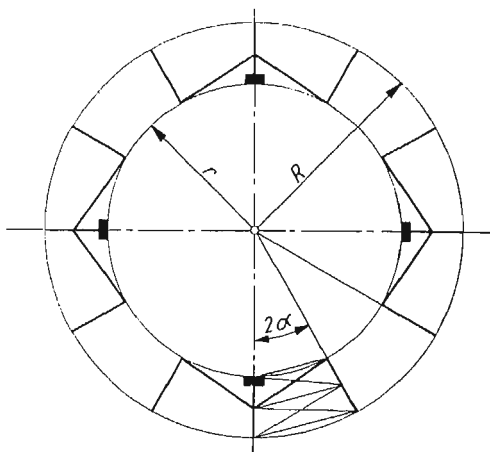
Rys. 16

jego wierzchołków, tj. $w_{si} = \frac{1}{3} \sum w_{ai}$. Oczywiście funkcja U powinna osiągnąć maximum, a w stanie równowagi granicznej winna być równa zero.

Jako przykład w [32] podano wyniki dla płyty żelbetowej pierścieniowej, o stałej grubości, swobodnie podpartej na konturze zewnętrznym i ponadto w 4 punktach na konturze wewnętrznym (rys. 18). Płytę zamieniono na dwunastobok ($R = 10$ m, $r = 1$ m). Zadanie programowania parametrycznego przeprowadzono na maszynie «Ural — IV». Otrzymano: $q/M_0 = 1,11$. Mechanizm zniszczenia przedstawia rys. 18.



Rys. 17



Rys. 18

4.7. BORKAUSKAS, ČYRAS w pracy [23] sformułowali — w języku programowania liniowego — zagadnienie projektowania i wyznaczania obciążenia granicznego dla cienkich płyt, uwzględniając tylko wpływ momentu zginającego. W pracy [24] ci sami autorzy omawiają zagadnienie minimalnego ciężaru, przy założeniu, że płyta składa się z obszarów o stałej grubości. W pracy [2] natomiast przedstawiono istotę problemu dualności dla cienkiej idealnie plastycznej płyty. Korzystając z pracy [2] omówimy zagadnienie dualności.

Chcąc sformułować rozważane zagadnienia w terminach programowania liniowego, musimy dysponować opisem dyskretnym. W tym celu dzielimy płytę na pewną liczbę obszarów (rys. 19), przy czym moment graniczny r -tego obszaru jest stały i wynosi M_{0r} . Rozkład momentów granicznych w całej płycie charakteryzuje wektor $\mathbf{M}_0 = (M_{0r})$, $r = 1, \dots, s$. Zakładamy, że pomiędzy jednym obszarem a drugim istnieje cienka *warstwa przejściowa* przenosząca momenty zginające. Obciążenie zewnętrzne występuje w punktach węzłowych, oznaczymy go przez p_j , a ponadto wzdłuż warstw przejściowych działają momenty zginające o intensywności m_j . W ten sposób wektor obciążenia ma składowe określone następująco:

$$p_j = \begin{cases} p_j, & j = 1, \dots, t_1 \leq t, \\ m_j, & j = t_1 + 1, \dots, t. \end{cases}$$

Zakładając, że rzeczywisty mechanizm zniszczenia należy do klasy mechanizmów utworzonych przez liniowe przeguby plastyczne (są to przeguby utworzone przez linie sieci,

por. rys. 19), wtedy prędkości odkształceń plastycznych opisuje wektor $\theta = (\theta_i)$, $i = 1, \dots, n$, gdzie $\theta_i = \varphi_i l_i$ przy czym φ_i , l_i oznaczają, odpowiednio, kąt obrotu w i -tym przegubie plastycznym, długość i -tego przegubu. Prędkość przemieszczeń charakteryzuje wektor $W = (W_j)$, gdzie

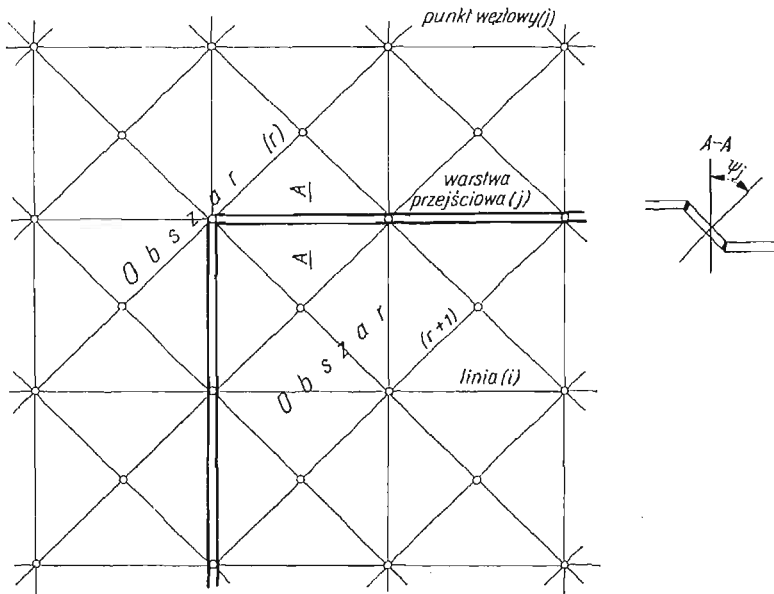
$$W_j = \begin{cases} w_j, & j = 1, \dots, t_1 \leq t, \\ \psi_j l_j, & j = t_1 + 1, \dots, t, \end{cases}$$

przy czym w_j , ψ_j oznaczają, odpowiednio, prędkość przemieszczeń w j -tym punkcie węzłowym, prędkość zmian kąta obrotu j -tej warstwy przejściowej. Tym samym łatwo podać wyrażenie na moc dysypowaną

$$(4.9) \quad U = \sum_{r,l} M_{0r} E_{ri} |\theta_i|,$$

gdzie $E = ||E_{ri}||$ jest macierzą konfiguracji określoną następująco:

$$E_{ri} = \begin{cases} 1, & \text{gdy linia } i \text{ należy do obszaru } r, \\ 0, & \text{gdy linia } i \text{ nie należy do obszaru } r. \end{cases}$$



Rys. 19

Wprowadzając tzw. zredukowaną prędkość odkształceń plastycznych w obszarze r , $\vartheta_r = \sum_i E_{ri} |\theta_i|$ na podstawie (4.9) otrzymujemy: $U = \sum_r M_{0r} \vartheta_r$.

Moc obciążeń zewnętrznych jest dana wzorem

$$(4.9.1) \quad V = \sum P_j W_j.$$

Warunki zgodności kinematycznej prędkości odkształceń i przemieszczeń podają związki

$$(4.9.2) \quad \theta_i = \sum_j c_{ij} W_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zgodnie z twierdzeniem energetycznym o minimum energii dysypacji dla rzeczywistego mechanizmu zniszczenia otrzymujemy następujące zadanie programowania liniowego:
znaleźć minimum formy

$$(4.10) \quad U = \sum_{r,t} M_{or} E_{ri} \theta_i,$$

przy ograniczeniach

$$(4.10.1) \quad W_j \geq \bar{W}_j,$$

$$(4.10.2) \quad \theta_i - \sum_j c_{ij} W_j = 0,$$

$$(4.10.3) \quad \theta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, t, \quad r = 1, \dots, s.$$

Wektor $\bar{\mathbf{W}} = (\bar{W}_j)$ można na ogół wybrać dowolnie.

Można teraz zbudować zadanie dualne:

znaleźć maximum formy

$$(4.11) \quad \sum_j \bar{W}_j Y_j$$

przy ograniczeniach postaci

$$(4.11.1) \quad Z_i \leq \sum_r E_{ri} M_{or},$$

$$(4.11.2) \quad Y_j - \sum_i c_{ij} Z_i = 0,$$

$$(4.11.3) \quad Y_i \geq 0.$$

Położmy $Y_j = P_j$, $Z_i = M_i$, gdzie $\mathbf{M} = (M_i)$ jest wektorem charakteryzującym siły wewnętrzne. Wówczas forma (4.11) określa moc obciążeń zewnętrznych. Z (4.11.1) mamy $M_i \leq \sum_r E_{ri} M_{or}$; jest to po prostu warunek plastyczności. Równości (4.11.2) zapisane w postaci $\sum_i c_{ij} M_i = P_j$ wyrażają równania równowagi. Tym samym zadanie dualne

(4.11)-(4.11.3) wyraża twierdzenie energetyczne o maximum mocy obciążeń zewnętrznych.

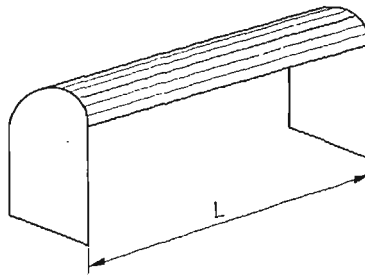
Problem dualności dla płyt i powłok w wielkościach uogólnionych omówiono w pracy CERADINIEGO, GAVARINIEGO [4].

5. Powłoki

Omówione zostały w pracach CERADINIEGO, GAVARINIEGO, [4], [5], MIRZABIEKJANA, REITMANA [29], NAGEVIČIUSA, ČYRASA [30], RŽANICYNA [31], FRAINTA [33], przy czym w pracy [31] omówiono możliwości zastosowania programowania liniowego do zadań

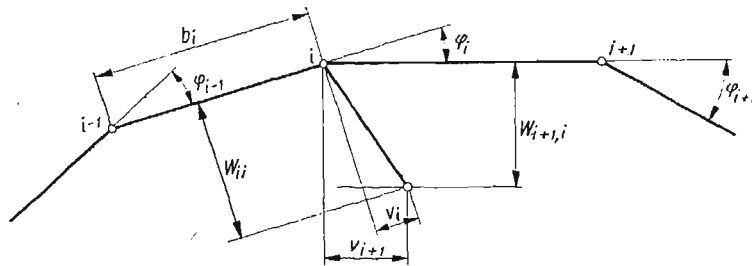
równowagi granicznej powłok przy wykorzystaniu metody kinematycznej, a w pracach [4], [5], [29], [30] i [33] — statycznej.

5.1. Omówimy najpierw pracę RZANICYNA [31]. Weźmy pod uwagę powłokę sklepieniową opartą na dwu czołowych przeponach. Krawędzie podłużne mogą być swobodne lub spoczywać na podporach. Zakładamy, że rozpiętość L powłoki jest znacznie większa niż szerokość jej rzutu na płaszczyznę poziomą. Dajemy klasę form zniszczenia z liniami przegubów plastycznych (na tyle gęsto, że wycinek powłoki między sąsiednimi przegubami można uważać za płaską płytkę — rys. 20) i skupionymi odkształceniami podłużnymi w środkowym przekroju poprzecznym. Obciążenie może być dowolne.



Rys. 20

Ze względu na małą grubość płyt pomijamy wpływ podłużnych momentów zginających i skręcających. Ponadto zakładamy, że powłoka jest nieściśliwa w kierunku poprzecznym — w przegubach plastycznych powstają jedynie kąty obrotu. Część płyty między przegubami plastycznymi a przekrojem poprzecznym odległym o $L/2$ od przepony uważamy za sztywną.



Rys. 21

Niech parametrami formy zniszczenia będą rzuty v_i przemieszczeń każdej płytki w poprzecznym przekroju środkowym na płaszczyznę płytki (rys. 21).

Przy oznaczeniach, jak na rys. 21, obrót płyty w przekroju środkowym wynosi

$$\psi_i = \frac{w_{ii} - w_{i,i-1}}{b_i},$$

przy czym b_i — szerokość płyty; natomiast kąt obrotu w i -tym przegubie

(5.1)

$$\theta_i = \psi_{i+1} - \psi_i.$$

Całkowita praca sił wewnętrznych wynosi

$$(5.2) \quad T = T_1 + T_2.$$

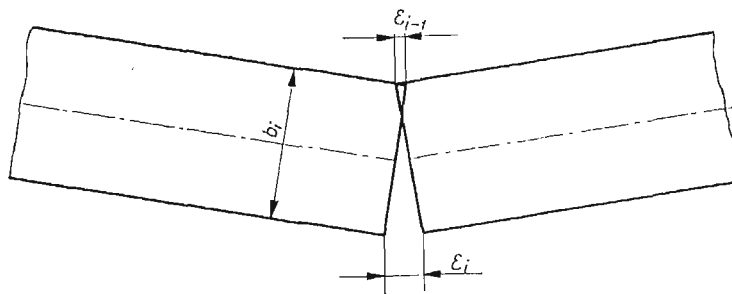
We wzorze tym T_1 oznacza pracę momentu M_0 (moment przypadający na jednostkę długości) na kątach obrotu θ_i . θ_i zmienia się liniowo na odcinku $L/2$; największą wartość przyjmuje w przekroju środkowym, a zero na przeponach. Tak więc

$$(5.2.1) \quad T_1 = \sum_i \Delta T_i = \frac{1}{2} L M_0 \sum_i |\theta_i|.$$

Po scałkowaniu metodą trapezów otrzymujemy następujące wyrażenie na pracę sił podłużnych na skupionych odkształceniach ε_i (rys. 22)

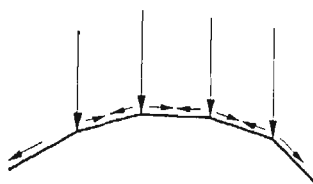
$$(5.2.2) \quad T_2 = h\sigma_0 \sum_+ |\varepsilon_i| \frac{b_{i+1} + b_i}{2} + h\nu\sigma_0 \sum_- |\varepsilon_i| \frac{b_{i+1} + b_i}{2},$$

gdzie przyjęto oznaczenia: h — grubość powłoki, σ_0 ($\nu\sigma_0$) — granica plastyczności na rozciąganie (ściskanie). W pierwszym członie sumujemy po przegubach rozciąganych, w drugim — ściskanych.



Rys. 22

Pracę sił zewnętrznych można obliczyć, po wyznaczeniu składowych obciążenia dla kierunków leżących w płaszczyznach płyt, przyjmując, że jest ono skupione wzdłuż linii załomów (rys. 23).



Rys. 23

Wówczas

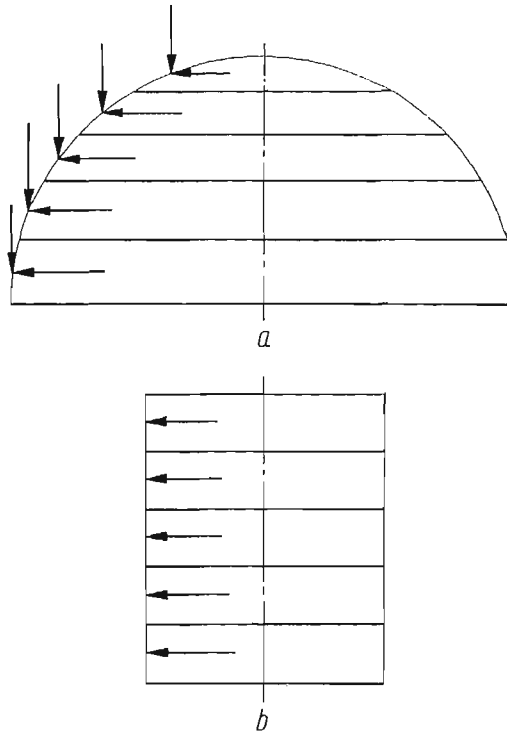
$$(5.2.3) \quad V = 2 \sum_i \int_0^{L/2} Q_i v_i \frac{2x}{L} dx = \sum_i P_i v_i,$$

przy czym $P_i = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} Q_i x dx$, gdzie Q_i oznacza siłę działającą na i -ty przegub plastyczny.

Ze wzorów (5.2.1), (5.2.2), (5.2.3), po prostych przekształceniach, otrzymujemy wyrażenie na stratę energii potencjalnej układu:

$$(5.3) \quad U = V - T = \frac{L}{4} \sum_i \left(\frac{P_i}{b_i} - \frac{P_{i+1}}{b_{i+1}} \right) \varepsilon_i - \frac{L}{2} M_0 \sum_i |\theta_i| - \frac{h\sigma_0}{2} \sum_+ (b_{i+1} + b_i) |\varepsilon_i| - \frac{h\nu\sigma_0}{2} \sum_- (b_{i+1} + b_i) |\varepsilon_i|.$$

W (5.3) \sum_i oznacza sumowanie po wszystkich płytach (przegubach plastycznych).



Rys. 24

Przekształćmy wyrażenie (5.3) do następującej postaci:

$$(5.3.1) \quad U = \frac{L}{4} \sum_i \left(\frac{P_i}{b_i} - \frac{P_{i+1}}{b_{i+1}} \right) \varepsilon_i - \frac{LM_0}{2} \sum_i \theta_i^* - \frac{h\sigma_0}{2} \sum_i (b_{i+1} + b_i) \varepsilon_i^*,$$

gdzie

$$\theta_i^* = \max(\theta_i, -\theta_i),$$

$$\varepsilon_i^* = \max\left(\varepsilon_i, -\frac{\nu\sigma_0 \varepsilon_i}{\sigma_0}\right).$$

W ten sposób — w terminach programowania liniowego — zadanie sformułujemy następująco: znaleźć maximum formy U (5.3.1) przy ograniczeniach postaci

$$(5.4) \quad \begin{aligned} a_i &= \theta_i^* - \theta_i \geq 0, \\ b_i &= \theta_i^* + \theta_i \geq 0, \\ c_i &= \varepsilon_i^* - \varepsilon_i \geq 0, \\ d_i &= \varepsilon_i^* + z\varepsilon_i \geq 0, \quad z = \frac{\nu\sigma_0}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Ponadto w stanie granicznym, $\max U = 0$.

W pracy RZANICYNA [31] — wykorzystując sposób zbliżony do powyższego — sformułowano też zagadnienie dla osiowo-symetrycznej powłoki sferycznej i walcowej. Możliwe mechanizmy zniszczenia i sposób obciążenia przedstawiono na rys. 24a i 24b.

5.2. W pracy FRAINTA [33] — korzystając z prac KOOPMANA, LANCE'A [12] i RZANICYNA [31] — podano mnożnik obciążenia granicznego dla walcowej powłoki przy uwzględnieniu osiowo-symetrycznego stanu naprężenia; zagadnienie rozwiązano metodą statyczną. W tym przypadku równanie równowagi ma postać

$$(5.5) \quad \frac{d^2 M}{dz^2} + \frac{N}{R} - X = 0,$$

gdzie M — południkowy moment zginający; N — równoleżnikowa siła normalna, R — promień powierzchni środkowej powłoki, X — ciśnienie rozłożone.

Warunek plastyczności przyjęto w postaci

$$(5.6) \quad |m| \leq 1, \quad 0 \leq n \leq 1,$$

gdzie $m = \frac{M}{M_0}$, $n = \frac{N}{N_0}$; M_0 — moment graniczny, N_0 — wartość graniczna siły N .

Wprowadźmy funkcję $\mu = \frac{X}{xM_0}$, wówczas równanie (5.5) przybierze postać:

$$(5.7) \quad \frac{d^2 m'}{dz^2} - \frac{na}{R} + \mu x = 0,$$

przy czym $a = \frac{N_0}{M_0}$, $m' = 1 - m$, ($0 \leq m' \leq 2$).

Równanie (5.7) — po podzieleniu długości powłoki L na r równych części — zapiszemy w postaci

$$(5.7.1) \quad m'_i - 2m'_{i+1} + m'_{i+2} - (a\delta^2/R)n_{i+1} + \bar{\mu}x_{i+1} = 0,$$

gdzie w (5.7.1) przyjęto $\delta = \frac{L}{r}$, $\bar{\mu} = \delta^2\mu$. Oczywiście równania (5.7.1) przedstawiają dyskretny opis powłoki.

Zadanie programowania liniowego sformułujemy następująco:

znaleźć maximum funkcji $z = \bar{\mu}$ przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} y_i &= -m'_i + 2 \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, r, \\ y_k &= -n_k + 1 \geq 0, \quad k = 1, \dots, r-1, \\ y_j &= n_j a \delta^2 / R = m'_{j-1} - 2m'_j + m'_{j+1} + \bar{\mu}x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r-1. \end{aligned}$$

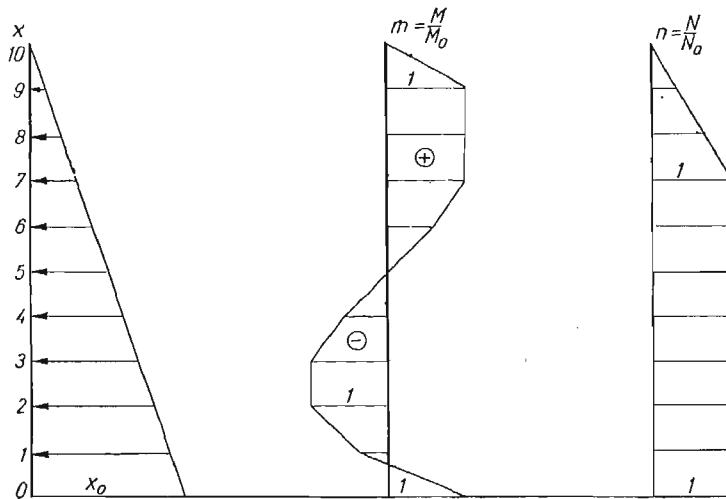
Jako przykład podano w pracy [33] rezultaty uzyskane dla zbiornika walcowego znajdującego się pod ciśnieniem hydrostatycznym. Przyjęto tam: $a\delta^2/R = 1$, $r = 10$, $x_0 = 1$ — parametr obciążenia.

Otrzymano:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} m_0 &= 1, & m_1 &= -0,4, & m_2 &= m_3 = -1, & m_4 &= -0,6, & m_5 &= 0, \\ m_6 &= 0,6, & m_7 &= m_8 = m_9 &= 1, \\ n_1 &= n_2 = \dots = n_7 &= 1, & n_8 &= 0,4, & n_9 &= 0,2, \\ \mu &= \frac{200}{L^2}, & X_0 &= 200 M_0/L^2. \end{aligned}$$

W (5.8) przez X_0 oznaczono wartość graniczną obciążenia. Z (5.8) wynika, że w punktach 0, 2, 3, 7 powstają przeguby plastyczne.

Rysunek 25 przedstawia wykresy momentów zginających południkowych m i sił normalnych równoleżnikowych n .



Rys. 25

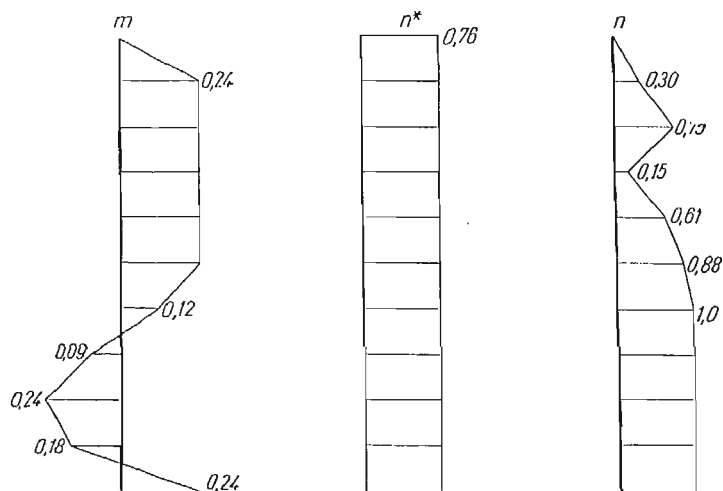
Jeżeli na całym obwodzie zbiornika wzdłuż tworzącej działa ponadto siła ściskająca βX , to wówczas warunek plastyczności można zapisać w następującej przybliżonej formie:

$$0 \leq n \leq 1, \quad \pm \gamma m - n^* \leq \gamma, \quad n^* \leq 0, \quad \left(n^* = \frac{N^*}{N_0^*} \right),$$

gdzie gwiazdka oznacza wielkości odnoszące się do siły normalnej działającej wzdłuż tworzącej. Przy założeniu, że $\gamma = 1$, $\beta = 0,5$ otrzymano $X_0 = 151,51 M_0/L^2$, gdy $\gamma = 1$, $\beta = 1$ wtedy $X_0 = 100 M_0/L^2$.

Rysunek 26 przedstawia wykresy wielkości wewnętrznych m, n, n^* dla $\beta = 0,5$. Mechanizm zniszczenia, który łatwo odtworzyć na podstawie wykresów na rys. 26, jest słuszny

dla $\beta < 1$; przy $\beta \geq 1$ zniszczenie następuje przy wielkości obciążenia pionowego równego obciążeniu granicznemu.



Rys. 26

5.3. Rozpatrzmy zagadnienie nośności granicznej dla sferycznej powłoki dwuwarstwowej, wykorzystując podejście statyczne, przy użyciu metody kolokacji (MIRZABIEKJAN, REITMAN [29]). Powłoka jest utwierdzona na konturze, poddana działaniu równomiernego ciśnienia wewnętrznego q i spełnia warunek plastyczności Treski. Równania równowagi mają postać:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} (n_\varphi \sin \varphi)' - n_\theta \cos \varphi - k[(m_\varphi \sin \varphi)' - m_\theta \cos \varphi] &= 0, \\ (n_\varphi + n_\theta) \sin \varphi + k[(m_\varphi \sin \varphi)'' - (m_\theta \cos \varphi)'] + p \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0}, \quad n_\varphi = \frac{N_\varphi}{N_0}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0}, \quad m_\varphi = \frac{M_\varphi}{M_0}, \quad k = \frac{M_0}{RN_0}, \quad p = \frac{Rq}{N_0},$$

przy czym $N_\varphi, N_\theta, M_\varphi, M_\theta$ oznaczają kolejno południkowe i równoleżnikowe siły normalne oraz analogiczne momenty zginające; natomiast $M_0(N_0)$ oznacza moment graniczny (siłę graniczną), a R — promień powłoki.

Warunek plastyczności natomiast zapiszemy w postaci

$$(5.10) \quad \begin{aligned} n_\theta - m_\theta &\leq 1, & n_\varphi - m_\varphi &\leq 1, & -n_\theta + n_\varphi + m_\theta - m_\varphi &\leq 1, \\ -n_\theta + m_\theta &\leq 1, & -n_\varphi + m_\varphi &\leq 1, & n_\theta - n_\varphi - m_\theta + m_\varphi &\leq 1, \\ n_\theta + m_\theta &\leq 1, & n_\varphi + m_\varphi &\leq 1, & -n_\theta + n_\varphi - m_\theta + m_\varphi &\leq 1, \\ -n_\theta - m_\theta &\leq 1, & -n_\varphi - m_\varphi &\leq 1, & n_\theta - n_\varphi + m_\theta - m_\varphi &\leq 1. \end{aligned}$$

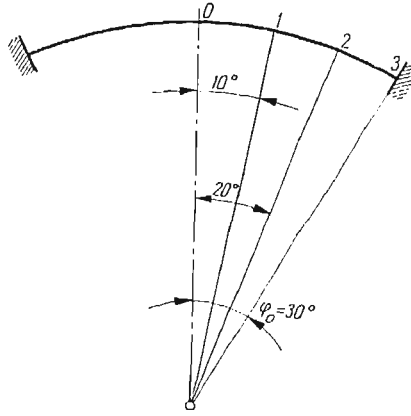
Przyjmijmy następujące pole naprężeń

$$(5.11) \quad \begin{aligned} n_\theta &= C_6 \cos \varphi + C_7 \sin \varphi + C_8 \cos 2\varphi + C_9 \sin 2\varphi + C_{10}, \\ n_\varphi &= C_{11} \cos \varphi + C_{12} \sin \varphi + C_{13} \cos 2\varphi + C_{14} \sin 2\varphi + C_{15}, \\ m_\theta &= C_{16} \cos \varphi + C_{17} \sin \varphi + C_{18} \cos 2\varphi + C_{19} \sin 2\varphi + C_{20}, \\ m_\varphi &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 2\varphi + C_4 \sin 2\varphi + C_5. \end{aligned}$$

Równania (5.11) — przez spełnienie zależności (5.9) — doprowadzamy do postaci

$$(5.12) \quad \begin{aligned} n_0 &= C_1 k \cos \varphi + 2C_3 k \cos 2\varphi + 2C_4 k \sin 2\varphi - 0,5p, \\ n_\varphi &= C_1 k \cos \varphi + C_3 k (\cos 2\varphi + 1) + C_4 k \sin 2\varphi - 0,5p, \\ m_0 &= C_1 \cos \varphi + 2C_2 \sin \varphi + C_3 (2 \cos 2\varphi - 1) + 2C_4 \sin 2\varphi + C_5, \\ m_\varphi &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 2\varphi + C_4 \sin \varphi + C_5. \end{aligned}$$

Jako punkty kolokacji przyjmijmy np. punkty o współrzędnych $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots$. Problem sprowadza się więc do obliczenia maximum funkcji $z = p$ przy ograniczeniach (5.10), do których wstawiono uprzednio zależności (5.12). Jako przykład liczbowy roz-



Rys. 27

wiązano powłokę dla której $\varphi_0 = 30^\circ$ (rys. 27). Przy pomocy maszyny matematycznej MIŃSK-22 otrzymano: $C_1 = 1,41$; $C_2 = -1,47$; $C_3 = 1,21$; $C_4 = 1,83$; $C_5 = -15,18$; $\max z = 3,38$. Dla takiego samego przypadku P. G. HODGE otrzymał wartość współczynnika nośności granicznej równą 2.

5.4. NAGEVIČIUS, ČYRAS [30] zaproponowali prosty sposób dyskretyzacji i linearyzacji warunku plastyczności Hubera–Misesa dla powłoki małowyniołej $\left(\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}, \frac{f}{a} \leq \frac{1}{5}, \frac{a}{l} \leq \frac{1}{2}\right)$. Geometrię takiej powłoki, oznaczenia i wielkości wewnętrzne przedstawiono na rys. 28a÷c.

Zakładamy, że powłoka jest izotropowa, idealnie plastyczna i spełnia warunek plastyczności Hubera–Misesa. W takim przypadku warunek ten ma postać

$$(5.12) \quad n_s^2 - n_s n_x + n_x^2 + 3t^2 + m_s^2 = 1,$$

$$\text{gdzie } n_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{N_x}{h\sigma_0}, \quad n_s = \frac{N_s}{N_0} = \frac{N_s}{h\sigma_0}, \quad t = \frac{T}{h\sigma_0}; \quad m_s = \frac{M_s}{M_0} = \frac{4M_s}{h^2\sigma_0}.$$

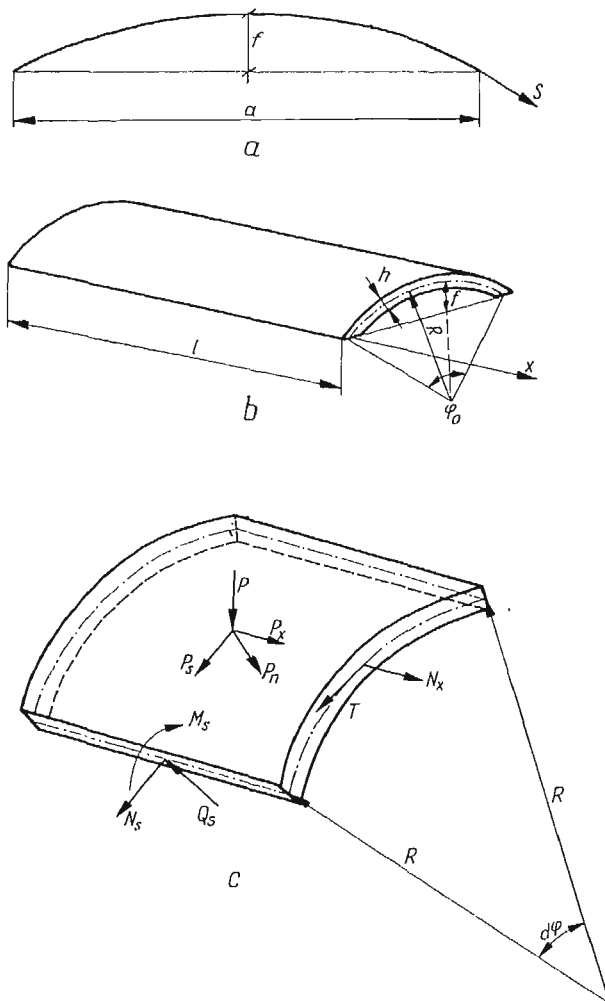
Przyjmując, że $n_s^2 - n_s n_x + n_x^2 \approx \eta^2$, $3t^2 + m_s^2 \approx \alpha^2$, przy czym

$$(5.12.1) \quad \eta = \max\{|n_s|, |n_x|, |n_s - n_x|\}, \quad \alpha = \max\{|\sqrt{3}t|, |m_s|\},$$

wtedy równanie (5.12) przybierze postać równania okręgu

$$(5.12.2) \quad \eta^2 + \alpha^2 = 1.$$

Należy teraz zlinearyzować warunek (5.12.2). Najprościej jest zastąpić okrąg opisanym (lub wpisanym) kwadratem (rys. 29), wówczas $|\alpha| = 1$, $|\eta| = 1$.

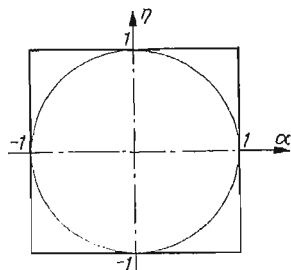


Rys. 28

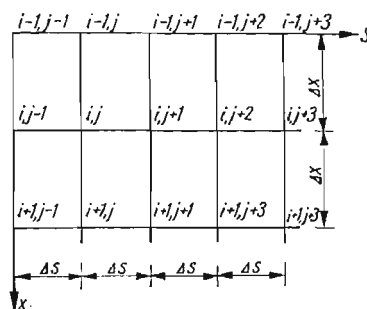
W rezultacie otrzymamy 12 równań na zlinearyzowany warunek plastyczności Hubera-Misesa:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}t + m_s &\leq 1, & n_s &\leq 1, & n_s - n_x &\leq 1, \\ \sqrt{3}t - m_s &\leq 1, & -n_s &\leq 1, & n_s + n_x &\leq 1, \\ -\sqrt{3}t + m_s &\leq 1, & n_x &\leq 1, & -n_s + n_x &\leq 1, \\ -\sqrt{3}t - m_s &\leq 1, & -n_x &\leq 1, & -n_s - n_x &\leq 1. \end{aligned}$$

W celu przedstawienia różniczkowych równań równowagi w postaci różnicowej przyjęto siatkę utworzoną na poziomym rzucie powłoki (rys. 30). Ze względu na małą krzywiznę powłoki można przyjąć, iż siatka ta «przenosi» się na powierzchnię środkową.



Rys. 29



Rys. 30

6. Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest jedną z metod dyskretnego opisu konstrukcji. Rozwinęła się ona specjalnie w związku z zastosowaniem maszyn liczących. Początkowo stosowano tę metodę w teorii sprężystości, w ostatnich latach także w rozważaniach przez nas zagadnieniach z teorii plastyczności.

MAIER [14], korzystając z metody elementów skończonych, dokonał pewnych uogólnień twierdzeń Melana i Koitera o dostosowaniu. Omówimy poruszone w pracy [14] zagadnienia.

Istota metody elementów skończonych polega na zamianie ośrodka ciągłego przez pewną liczbę elementów (tzw. elementów skończonych), oddziaływujących na siebie tylko w punktach węzłowych. Obciążenie zewnętrzne działa tylko w tych punktach. Ponadto MAIER zakłada, że układ może być poddany «dyslokacjom», które określa jako *niesprężyste odkształcenia narzucone na pewne elementy*. Mogą to być odkształcenia wywołane np. polami temperaturowymi. Obciążenia i *dyslokacje* będziemy charakteryzować wektorami, odpowiednio \mathbf{P} , $\mathbf{\Delta}$. Oznaczmy przez \mathbf{q}^i uogólnione odkształcenia i -tego elementu skończonego, określone przez wektor przemieszczeń węzłowych \mathbf{u}^i . Niech wektor \mathbf{Q}^i reprezentuje uogólnione naprężenia¹⁾ (por. [21], str. 251 i dalsze). Przyjmujemy, że ośrodek zastąpiono przez n elementów skończonych, tzn. $i = 1, \dots, n$.

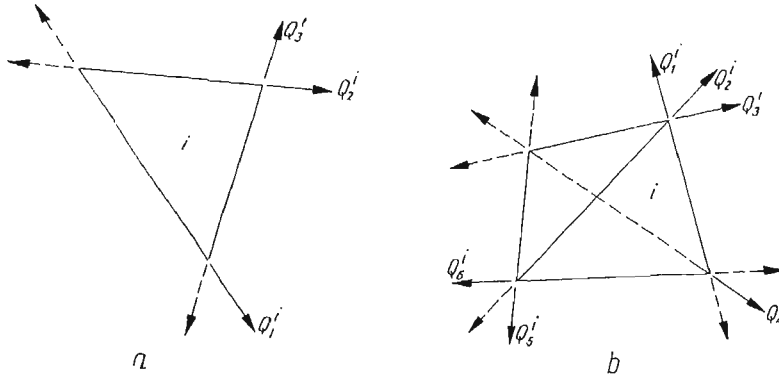
Przykładem zastosowania metody elementów skończonych do zagadnień płaskich może być zamiana ośrodka przez trójkątne elementy skończone, przy czym i -ty element skończony jest scharakteryzowany wektorami \mathbf{q}^i , \mathbf{Q}^i o trzech niezależnych składowych (rys. 31a).

Podobnie ośrodek trójwymiarowy może być zastąpiony przez czworościany scharakteryzowane wektorami \mathbf{q}^i , \mathbf{Q}^i o sześciu niezależnych składowych (rys. 31b).

¹⁾ Autor operuje tylko wielkościami uogólnionymi.

Założmy, że każdy element ma zlinearyzowany warunek plastyczności w przestrzeni sił uogólnionych. Niech będzie dany pewien program obciążenia i dyslokacji $\mathbf{P}(t), \Delta(t)$, co należy rozumieć w ten sposób, że «składowe» $P_h(t), \Delta_h(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, jako funkcje czasu t zmieniają się w pewnych określonych przedziałach w sposób na ogół dowolny. Przykład takiego programu (bez dyslokacji) mieliśmy w punkcie 3.4, gdzie siła Q (czyli jedna ze «składowych») zmieniała się w przedziale $[0, 7 M_0/L_0]$; oczywiście $Q = Q(t)$.

Niech μ będzie wspólnym mnożnikiem obciążenia dla wszystkich przedziałów, które określają dany program obciążenia i dyslokacji. Podobnie jak w punkcie 3.4., zdefiniujemy mnożnik bezpieczny s następująco: dla $\mu \leq s$ układ dostosowuje się, natomiast dla $\mu > s$ nie. Autora głównie interesuje zagadnienie wyznaczenia mnożnika bezpiecznego s . Korzystając z rozszerzonego na przypadek dyslokacji twierdzenia Melana zbudujemy zadanie programowania liniowego, które pozwala wyznaczyć mnożnik s .



Rys. 31

Rozkład naprężeń uogólnionych w układzie scharakteryzujemy wektorem \mathbf{Q} , przy czym wektor ten przedstawiamy w postaci sumy części sprężystej \mathbf{Q}^E i plastycznej \mathbf{Q}^P

$$(6.1) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^E + \mathbf{Q}^P.$$

Całkowite, sprężyste i plastyczne uogólnione odkształcenia scharakteryzujemy wektorami odpowiednio \mathbf{q} , \mathbf{e} , \mathbf{p} czyli

$$(6.1.1) \quad \mathbf{q} = \mathbf{e} + \mathbf{p} + \Delta = \mathbf{e}^E + \mathbf{e}^P + \mathbf{p} + \Delta.$$

Ponadto

$$(6.1.2) \quad \mathbf{Q}^E = \mathbf{S}\mathbf{e}^E, \quad \mathbf{Q}^P = \mathbf{S}\mathbf{e}^P,$$

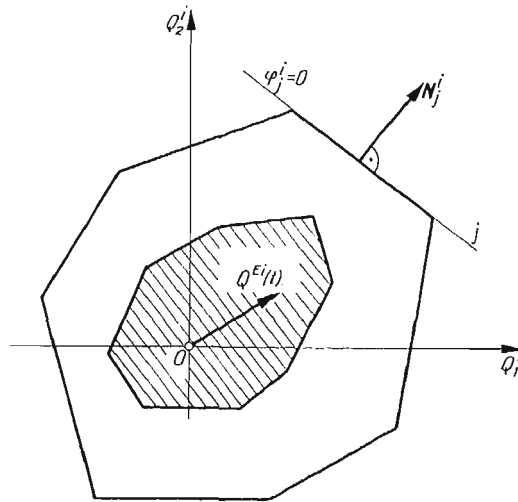
gdzie \mathbf{S} jest macierzą sztywności dla zakresu sprężystego. Zawiera ona na przekątnej głównej macierze sztywności \mathbf{S}^i , $i = 1, \dots, n$, elementów skończonych; co zapiszemy w ten sposób $\mathbf{S} = \text{diag} [\mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^n]$. Zwróćmy uwagę na to, iż elementami każdego z wprowadzonych wektorów są wektory charakteryzujące n -elementów skończonych, na które «podzielono» układ, np. $\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^n)$ (symbol «T» oznacza transponowanie). Naprężenia resztkowe \mathbf{Q}_r^P można przedstawić w postaci

$$(6.2) \quad \mathbf{Q}_r^P = \mathbf{F}\mathbf{p},$$

gdzie ρ jest wektorem wielkości hiperstatycznych, a macierz F zależy tylko od geometrii układu. Możemy teraz wypowiedzieć twierdzenie Melana rozszerzone na przypadek *dyslokacji*. Zostało ono sformułowane i udowodnione przez W. PRAGERA. Przytoczymy je za MAIEREM [14].

a) Jeśli istnieje niezależny od czasu stan naprężeń resztkowych Q_r^p , takich, że ich suma z naprężeniami sprężystymi, wywołanymi przez dany program obciążenia i *dyslokacji* leży wewnątrz powierzchni plastyczności (dla każdego elementu skończonego oraz dla $0 \leq t \leq \infty$), to układ dostosowuje się.

b) Jeśli nie istnieje niezależny od czasu stan naprężeń resztkowych Q_r^p takich, żeby suma jak w a) nie wyprowadzała poza powierzchnię plastyczności dla każdego elementu skończonego, oraz dla $0 \leq t \leq \infty$, to dostosowanie nie nastąpi.



Rys. 32

Korzystając z tego twierdzenia i zależności (6.2) łatwo zbudować następujące zadanie programowania liniowego:

znaleźć

$$(6.3) \quad \max \mu = s$$

przy ograniczeniach

$$(6.3.1) \quad \mu \mathbf{M} + \mathbf{N}^T \mathbf{F} \rho \leq \mathbf{K},$$

$$(6.3.2) \quad \mu \geq 0.$$

Wyjaśnimy użyte w tym zadaniu symbole.

Weźmy pod uwagę zlinearyzowany warunek plastyczności i -go elementu skończonego (rys. 32),

$$(6.4) \quad \varphi_j^i = \mathbf{N}_j^T \mathbf{Q}^i - K_j^i \leq 0, \quad j = 1, \dots, k_i,$$

gdzie skalary $K_j^i > 0$ charakteryzują własności plastyczne materiału, \mathbf{N}_j^i jest wektorem jednostkowym prostopadłym do j -tej ściany zlinearyzowanego warunku plastyczności. Wektor \mathbf{K} ma postać: $\mathbf{K} = [K_1^1, K_2^1, \dots, K_{k_n}^n]$. Oznaczmy przez

$$(6.5) \quad M_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq t \leq \infty} \{ \mathbf{N}_j^i \mathbf{Q}^{Ei}(t) \},$$

(zakreskowany na rys. 32 wielobok, reprezentuje obszar jaki przebiega wektor $\mathbf{Q}^{Ei}(t)$, gdy t zmienia się w przedziale $[0, \infty]$). Występujący we wzorze (6.3.1) wektor \mathbf{M} ma postać $\mathbf{M} = [M_1^1, M_2^1, \dots, M_{k_n}^n]$, gdzie M_j^i jest określone wzorem (6.5). \mathbf{N} jest macierzą, której przekątna główna jest utworzona z macierzy $\mathbf{N}^i = [\mathbf{N}_1^i, \dots, \mathbf{N}_{k_i}^i]$. Zapiszemy więc $\mathbf{N} = \text{diag}[\mathbf{N}^1, \dots, \mathbf{N}^n]$.

Zwróćmy uwagę, na to, że zadanie programowania liniowego (6.3)–(6.3.2) jest operatywną wypowiedzią twierdzenia Melana.

W pracy [14] przedstawiono również, przy wykorzystaniu metody elementów skończonych i zadania dualnego do zadania (6.3)–(6.3.2), twierdzenie Koitera, rozszerzone na przypadek *dyslokacji*. Ponadto sformułowano twierdzenie Melana dla materiałów o niestowarzyszonym prawie płynięcia (por. [18]).

Kilka dalszych pozycji, omawiających zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień nośności granicznej i dostosowania podano w pracy [14].

Literatura cytowana w tekście

1. A. BIRON, P. G. HODGE, *Non linear programming method for limit analysis of rotationally symmetric shells*, Int. J. Non-Linear Mech. 2, 3 (1968), 201–213.
2. A. BORKAUSKAS, A. A. ČYRAS, *On duality in limit analysis and design of plates*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. tech., 6, 16 (1968), 241–248.
3. G. CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare*, Giorn. Genio Civile, 1/2, 103 (1965), 48–64.
4. G. CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare, Continui bi-e tridimensionali (Nota I: Fondamenti teorici)* Giorn. Genio Civile, 2/3, 106 (1968), 125–137.
5. G. CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare bi-e tridimensionali (Nota II: Applicazioni a piastre e volte di rivoluzione)*, Giorn. Genio Civile, 4, 106 (1968), 163–180.
6. A. CHARNES, C. E. LEMKE, O. C. ZIENKIEWICZ, *Virtual work, linear programming and plastic limit analysis*, Proc. Royal Soc., London, 251 A, 1959, 110–116.
7. S. I. GASS, *Linear programming*, New York 1958.
8. G. HADLEY, *Nichtlineare und dynamische Programmierung*, Berlin 1969 (tłum. z jęz. ang.).
9. J. HEYMAN, *Minimum weight of frames under shakedown loading*, Proc. ASCE, J. Engin. Mech. Div., 4, 84 (1958).
10. J. HEYMAN, W. PRAGER, *Automatic minimum weight design of steel frames*, J. Frankl. Inst., 5, 266 (1958).
11. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., 2, 18 (1966), 227–238.
12. D. C. A. KOOPMAN, R. H. LANCE, *On linear programming and plastic limit analysis*, J. Mech. Phys. Sol., 13 (1965), 77–87.
13. R. K. LIVESLEY, *The automatic design of structural frames*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 9, 9 (1956).
14. G. MAIER, *Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws, a finite element, linear programming approach*, Meccanica, 3, 4 (1969), 250–260.
15. J. I. NICHOLLS, *Linear programming and optimal structural design*, Trend Eng. Univ. Wash, 3, 20 (1968), 21–24.
16. S. RĂUTU, V. CHIROIU, *Quelques problèmes du calcul des structures statiquement non-déterminées dans la domaine plastique*, Mec. appl., 1, 14 (1969), 115–129.

17. S. RÄUTU, V. CHIROIU, *Use of computers for the calculation of the statically indeterminate structures in elasto-plastic range*, Mec. appl., 4, 14 (1969).
18. G. SACCHI, M. SAVE, *A note on the limit loads of non-standard materials*, Meccanica, 1, 3 (1968), 43–45.
19. M. SVOBODA, *Řešení mezního stavu ramosých konstrukci jako úlohy lineárního programování*, Sb. Vys. Uč. Techn. v Brně. 3/4, 1967, 485–491.
20. H. TANAKA, *Automatic analysis and design of plastic frames*, Report of the Inst., of Ind. Sc. Tokyo, 3, 12 (1962).
21. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
22. R. WOLFENBERGER, *Traglast und optimale Bemessung von Platten*, Zürich 1964.
23. А. Э. БОРКАУСКАС, А. А. ЧИРАС, *Расчет пластинок в упруго-пластическом состоянии с применением линейного программирования*, Liet. Mech. Rinkinys, 1, (1967), 34–60.
24. А. Э. БОРКАУСКАС, А. А. ЧИРАС, *Расчет упруго-пластических пластинок минимального веса с применением линейного программирования*, Liet. Mech. Rinkinys, 1 (2), (1968), 136–150.
25. Г. Н. БРУСЕНЦОВ, А. Р. РЖАНИЦЫН, *Применение линейного программирования к задаче предельного равновесия при плоском напряженном состоянии*, Стр. Мех. Расч. Соор., 5 (1968), 5–6.
26. Г. К. ГИЛИС, В. А. ЗАКАРЯВИЧЮС, А. А. ЧИРАС, *Использование экспериментальных данных для решения задачи поверочного расчета упруго-пластических систем*, Liet. Mech. Rinkinys, 1 (2), (1968), 122–135.
27. Д. А. ГОХФЕЛЬД, О. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, *Применение методов линейного программирования к некоторым двумерным задачам предельного равновесия и приспособляемости в статической формулировке*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 103–107.
28. Л. М. КЛЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Москва 1969.
29. Б. Ю. МИРЗАБЕКЯН, М. И. РЕЙТМАН, *Определение несущей способности оболочек при помощи линейного программирования*, Мех. Тв. Тела, 1 (1968), 122–124.
30. Ю. А. НАГЯВИЧЮС, А. А. ЧИРАС, *Определение предельной нагрузки для пологих цилиндрических оболочек с применением математического программирования*, Liet. Mech. Rinkinys, 2 (3) (1968), 68–78.
31. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет оболочек методом предельного равновесия при помощи линейного программирования*, Тр. VI Всес. Кон. по Теории Оболочек и Пластинок, Москва 1966.
32. В. И. ТЕРЕКИНА, *Расчет круглых пластин кинематическим методом с применением линейного программирования*, Стр. Мех. Расч. Соор. 1 (1969), 30–32.
33. М. Я. ФРАЙНТ, *Определение несущей способности цилиндрической оболочки методом линейного программирования*, Стр. Мех. Расч. Соор. 1 (1969), 62–63.
34. С. Н. ЧЕРНИКОВ, *Линейные неравенства*, Москва 1968.
35. А. А. ЧИРАС, *Математические методы расчета упруго-пластических изгибаемых систем*, Стр. Мех. и Конст., Докл. 14 научно-тех. конф., Вильнюс 1964.
36. А. А. ЧИРАС, *Взаимосвязь основных математических моделей для прямого проектирования и поверочного расчета упруго-пластических систем*, Liet. Mech. Rinkinys, (12) (1968), 81–89.
37. А. А. ЧИРАС, *Двойственность в задачах строительной механики, теории, упругости и пластичности*, Liet. Mech. Rinkinys, 2 (3) (1968), 34–54.
38. А. А. ЧИРАС, *Методы линейного программирования при расчете упруго-пластических систем*, Ленинград 1969.
39. Д. Б. ЮДИН, Е. Г. ГОЛЬДИТЭЙН, *Линейное программирование*, Москва 1969.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлены ранее полученные результаты применения линейного программирования для определения несущей способности стержневых систем, плит и оболочек, а также двойственные задачи, вопросы приспособляемости и автоматического расчета рам. Рассмотрено также

использование экспериментальных данных для модифицирования задачи линейного программирования для стержневых систем. Кроме традиционных методов дискретного описания конструкций, представлено применение метода конечных элементов.

S u m m a r y

THE APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING TO THE DETERMINATION OF THE LIMIT LOAD CAPACITY OF STRUCTURES (Survey of publications)

The paper presents the results, obtained so far, of the application of linear programming to the determination of the limit load capacity of rod systems, plates and shells. It deals also with the dual problem, the shake-down problem and with the automatic analysis of frames. Moreover, the use of experimental data for the modification of the problem of linear programming for frames is discussed. Besides the traditional methods of discrete description, the paper presents the application of the method of finite elements

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1969 r.; po raz drugi dnia 8 maja 1970 r.
