

ODPOWIEDNIOŚĆ MODELWA DLA CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW O BISYMETRYCZNYM
OTWARTYM PRZEKROJU POPRZECZNYM

MIECZYSLAW JOKIEL (WROCLAW)

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy są warunki odpowiedniości modelowej dla cienkościennego, prostego pręta przyrzątecznego o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym. Rozważany pręt jest obciążony statycznie dowolnym układem uogólnionych sił zewnętrznych wywołujących w nim określony stan napięcia i odkształcenia, charakteryzujący się występowaniem samozrównoważonego układu naprężeń normalnych, zwanego bimomentem i deplanacją płaskiego przed odkształceniem przekroju pręta. Odnośnie do samego pręta zakłada się, że spełnia on warunki układu Clapeyrona. Zakłada się ponadto, że jego przemieszczenia są bardzo małe, a odkształcenia ściśle odpowiadają hipotezom przyjętym w teorii prętów cienkościennych WŁASOWA [6].

W pracy sformułowano warunki odpowiedniości modelowej dla dowolnego, przyrzątecznego i prostego, pręta cienkościennego oraz wykazano możliwość ich spełnienia w małym modelu w przypadku pręta o bisymetrycznym otwartym przekroju poprzecznym. Rozważania przeprowadzono przy założeniu, że nie występuje pełne geometryczne i mechaniczne podobieństwo obiektu rzeczywistego i modelu.

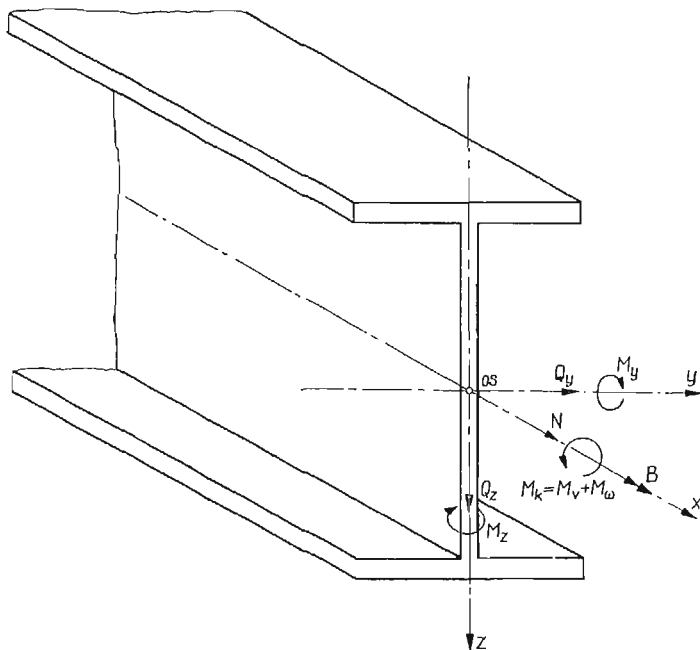
2. Kryterium podobieństwa modelowego

Wielkość energii odkształcenia sprężystego dla pręta cienkościennego będącego obiektem rozważań i nazywanego dalej krótko obiektem określa znany ze statyki wzór [5]

$$(2.1) \quad U_0 = U_N + U_{Q_{y0}} + U_{Q_{z0}} + U_{M_{y0}} + U_{M_{z0}} + U_{M_{v0}} + U_{B_0} = \\ = \frac{1}{2} \int \left(\frac{N_0^2}{E_0 A_0} + k_{z0} \frac{Q_{y0}^2}{G_0 A_0} + k_{y0} \frac{Q_{z0}^2}{G_0 A_0} + \frac{M_{y0}^2}{E_0 I_{y0}} + \frac{M_{z0}^2}{E_0 I_{z0}} + \frac{M_{v0}^2}{G_0 I_{v0}} + \frac{B_0^2}{E_0 I_{\omega 0}} \right) ds_0.$$

Przyjęte oznaczenia sił wewnętrznych wyjaśnia rys. 1, na którym zaznaczono ponadto środek O masy przekroju, środek ścinania S oraz przyjęty układ współrzędnych xyz ($ds = dx$). Indeks «0» stosuje się do wielkości przynależnych do obiektu. Dwa ostatnie

wyrazy wzoru wyrażają wielkość energii związanej z nieswobodnym skręcaniem cienkościennego pręta, zależnej od momentu swobodnego skręcania M_v i bimomentu B , którego wektor zaznaczono na rys. 1 podwójną strzałką. We wzorze nie uwidacznia się wpływ momentu giętno-skrętnego M_ω . Konsekwencją bowiem przyjętej hipotezy braku odkształceń postaciowych w powierzchni środkowej pręta cienkościennego jest to, że równomiernie rozłożone na grubości elementów przekroju naprężenia styczne, wywołane giętno-skrętnym momentem M_ω , nie powodują przyrostu energii potencjalnej odkształcenia.



Rys. 1.

We wzorze (2.1) oznaczają ponadto: E, G — stałe sprężystości materiału; $A, I_y, I_z, I_v, I_\omega$ — geometryczne i wycinkowe charakterystyki przekroju; k_y, k_z — współczynniki liczbowe zależne tylko od kształtu przekroju pręta.

Analogiczną wartość energii odkształcenia sprężystego pręta, będącego modelem pręta rozważanego (indeks m), określa wzór

$$(2.2) \quad U_m = U_{N_m} + U_{Q_{y,m}} + U_{Q_{z,m}} + U_{M_{y,m}} + U_{M_{z,m}} + U_{M_{v,m}} + U_{B_m} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{N_m^2}{E_m A_m} + k_{zm} \frac{Q_{ym}^2}{G_m A_m} + k_{ym} \frac{Q_{zm}^2}{G_m A_m} + \frac{M_{ym}^2}{E_m I_{ym}} + \frac{M_{zm}^2}{E_m I_{zm}} + \frac{M_{v,m}^2}{E_m I_{vm}} + \frac{B_m^2}{E_m I_{\omega m}} \right) ds_m.$$

Kryterium odpowiedniości modelowej obiektu rzeczywistego i modelu, konieczne i wystarczające dla podobieństwa energii odkształcenia sprężystego, można sformułować w oparciu o wzory (2.1) i (2.2) w następujący sposób: podobieństwo energii odkształcenia

sprężystego obiektu i modelu jest spełnione, jeżeli stosunek odpowiedniej części energii sprężystej pochodzącej w modelu i obiekcie od przyczyny tego samego rodzaju, jest taki sam dla każdej przyczyny. Winno być zatem

$$(2.3) \quad \frac{U_0}{U_m} = \frac{U_{N0}}{U_{Nm}} = \frac{U_{Q_y0}}{U_{Q_y m}} = \frac{U_{Q_z0}}{U_{Q_z m}} = \frac{U_{M_y0}}{U_{M_y m}} = \frac{U_{M_\varphi0}}{U_{M_\varphi m}} = \frac{U_{B0}}{U_{Bm}}.$$

Podane kryterium odpowiedniości modelowej energii sprężystej obiektu i modelu zawiera warunki podobieństwa przesunięć, kątów obrotu i deplanacji [3].

3. Związki wyrażające przyjęte kryterium podobieństwa modelu i obiektu

W celu szczegółowego przedstawienia związków wyrażających warunki podobieństwa wprowadzono następujące oznaczenia skal wielkości występujących w modelu i obiekcie:

$$\begin{aligned} \frac{s_0}{s_m} &= n && \text{podziałka długości prętów,} \\ \frac{P_0}{P_m} &= f && \text{podziałka sił,} \\ \frac{M_0}{M_m} &= \frac{P_0 s_0}{P_m s_m} = fn && \text{podziałka momentów,} \\ \frac{B_0}{B_m} &= \frac{P_0 s_0^2}{P_m s_m^2} = fn^2 && \text{podziałka bimomentów,} \\ \frac{E_0}{E_m} &= e; \quad \frac{G_0}{G_m} = g && \text{podziałki stałej sprężystości podłużnej i postaciowej,} \\ \frac{A_0}{A_m} &= a && \text{podziałka pól,} \\ \frac{I_{y0}}{I_{ym}} &= i_y; \quad \frac{I_{z0}}{I_{zm}} = i_z && \text{podziałki momentów bezwładności względem osi} \\ &&& \text{y i z,} \\ \frac{I_{\varphi0}}{I_{\varphi m}} &= i_\varphi && \text{podziałka momentu bezwładności czystego skrę-} \\ &&& \text{cania,} \\ \frac{I_{\omega0}}{I_{\omega m}} &= i_\omega && \text{podziałka wycinkowego momentu bezwładności} \\ &&& \text{względem środka ścinania przekroju,} \\ \frac{p_0}{p_m} &= \frac{u_0}{u_m} = \frac{v_0}{v_m} = \frac{w_0}{w_m} && \text{podziałka przesunięć,} \\ \frac{\varphi_0}{\varphi_m} &= \frac{j}{n}; \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_m} = \frac{j}{n^2} && \text{podziałki kątów obrotu i deplanacji,} \\ \frac{U_0}{U_m} &= \frac{P_0 p_0}{P_m p_m} = fj = u && \text{podziałka energii sprężystej i pracy.} \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu przyjętych podziałek kryterium (2.3) przyjmuje postać

$$(3.1) \quad fj = \frac{f^2 n}{ea} = \frac{f^2 n^3}{ei_y} = \frac{f^2 n^3}{ei_z} = \frac{k_{z0}}{k_{zm}} \frac{f^2 n}{ga} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} \frac{f^2 n}{ga} = \frac{f^2 n^3}{gi_v} = \frac{f^2 n^5}{ei_\omega},$$

a po skróceniu stronami przez $f^2 n$

$$(3.2) \quad \frac{1}{ea} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{k_{z0}}{k_{zm}} \frac{1}{ga} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} \frac{1}{ga} = \frac{n^2}{gi_v} = \frac{n^4}{ei_\omega}.$$

Stosownie do podanych wyżej wniosków równości (3.2) przedstawiają komplet warunków, koniecznych i wystarczających, odpowiedniości modelowej obiektu rzeczywistego i modelu dla prostego, pryzmatycznego pręta cienkościennego o dowolnym przekroju otwartym w przypadku, gdy pomiarom na modelu podlegają przemieszczenia wywołane statycznie działającym układem uogólnionych sił zewnętrznych.

Gdy obiekt rzeczywisty i model spełniają równości (3.2), przemieszczenia obiektu mogą być wyznaczone za pomocą uprzednio zmierzonych przemieszczeń modelu z relacji

$$(3.3) \quad \begin{array}{ll} \text{przesunięcia} & p_0 = j p_m, \\ \text{kąty obrotu} & \varphi_0 = \frac{j}{n} \varphi_m, \\ \text{deplanacje} & \alpha_0 = \frac{j}{n^2} \alpha_m, \end{array}$$

w których podziałka j podlega wyznaczeniu z równości (3.1), zaś n jest skalą długości prętów.

4. Sposób zastępczych przekrojów modelu

4.1. Uwagi wstępne. Analizując warunki (3.2) nietrudno zauważyć, że są one tożsamiściowo spełnione w przypadku, gdy występujące w nich skale geometrycznych i wycinkowych charakterystyk przekrojów obiektu i modelu zależą od skali długości prętów, czyli gdy

$$(4.1) \quad a = n^2; \quad i_y = i_z = i_v = n^4; \quad i_\omega = n^6; \quad \frac{k_{z0}}{k_{zm}} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} = 1$$

oraz gdy

$$(4.2) \quad e = g,$$

a zatem, gdy zachodzi geometryczne i mechaniczne podobieństwo modelu i obiektu.

Przy rozwiązywaniu na małych modelach praktycznych problemów technicznych rzadko występuje możliwość zapewnienia pełnego podobieństwa geometrycznego i spełnienia przez to równości (4.1). Nawet najczęściej występujące w budownictwie profile walcowane, dwuteowniki, ceowniki, kątowniki posiadają wyokrąglenia i zbieżności trudne do zrealizowania w małym modelu. Podobne cechy posiadają cienkościennie profile gięte, kształtowane na zimno. Niekiedy zaś spotyka się bardzo skomplikowane przekroje, np.

złożone z kilku profili walcowanych. Wykonanie małych modeli takich prętów jest zwykle w warunkach laboratoryjnych niemożliwe, dokładność wykonawstwa musi ponadto budzić wątpliwości.

Tym bardziej rzadko wystąpi możliwość zapewnienia równoczesnego podobieństwa geometrycznego i mechanicznego, wymagających spełnienia oprócz warunków (4.1) także warunku (4.2) w postaci

$$\frac{e}{g} = 1 = \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_m}, \quad \text{czyli} \quad \nu_0 = \nu_m.$$

Ostatni warunek jest wręcz niemożliwy do spełnienia w modelach małych przy obecnie stosowanych materiałach konstrukcyjnych.

Przedstawione trudności skłaniają przy wymiarowaniu małych modeli do rezygnacji z pełnego podobieństwa geometrycznego i mechanicznego modelu i obiektu oraz powodują konieczność ujęcia zagadnienia odpowiedniości modelowej w oparciu o inne zasady.

4.2. Idea przekroju zastępczego. Możliwe jest ukształtowanie przekroju modelu z pominięciem pełnego podobieństwa geometrycznego i mechanicznego [1], [2], [3], [4]. W przedstawionej pracy zakłada się, że badany cienkościenny układ prętowy składa się z jednowymiarowych elementów, będących osiami ścinania prętów. Kształt i wymiary przekroju prętów reprezentują jego geometryczne i wycinkowe charakterystyki: A , k_z , k_y , I_y , I_z , I_ρ , I_ω . Warunki podobieństwa geometrycznego obejmują zatem tylko osiowy zarys konstrukcji. Podobieństwo wymienionych charakterystyk przekroju winny zapewnić warunki podobieństwa kinematycznego i dynamicznego, a więc podobieństwa przesunięć, kątów obrotu, deplanacji, sił, momentów sił pracy i energii. Dla cienkościennego układu prętowego obciążonego statycznie, w którym pomiarom podlegają wyłącznie przemieszczenia i to układu już odkształconego pod ciężarem własnym, konieczne i wystarczające warunki podobieństwa modelu i obiektu przedstawia układ równań (3.2). Dalsze rozważania dotyczą bisymetrycznego przekroju otwartego, w którym środek masy przekroju pokrywa się ze środkiem ścinania.

Wskutek takiego ujęcia zagadnienia odpowiedniości modelowej nie zachodzi konieczność wiernego modelowania złożonego kształtu poprzecznego przekroju obiektu. Przekroje prętów modelu mogą być ukształtowane dowolnie, zgodnie z praktycznymi możliwościami i poziomem wykonawstwa laboratoryjnego. Dowolność kształtu przekroju zastępczego jest jednak ograniczona w tym sensie, że musi to być przekrój cienkościenny, gdyż związki matematyczne będące podstawą niniejszej pracy opisują zjawiska zachodzące w prętach cienkościennych. Dalszą zaletą proponowanego sposobu jest możliwość wyrównania błędu wynikającego z niespełnienia warunku podobieństwa mechanicznego (4.2).

Podane założenia stanowią podstawę sposobu *przekrojów zastępczych* wymiarowania modeli. Przed przystąpieniem do wymiarowania przyjmuje się podziałkę długości prętów n , kształt przekroju poprzecznego oraz materiał konstrukcyjny, z którego model ma być wykonany. Podziałkę n przyjmuje się w zależności od żądanego gabarytu modelu. Kształt przekroju zastępczego winien spełniać postulat «prostoty», polegający na wprowadzeniu możliwie najmniejszej liczby elementów składowych przekroju zastępczego. Postulat prostoty ułatwia wykonawstwo modelu, umożliwia uzyskanie niezbędnej dokładności

i żądanej tolerancji oraz — w przypadku przeprowadzania badań metodą przemieszczeń wymuszonych [3] — stosowanie uniwersalnych deformatorów.

W dalszym ciągu należy określić funkcje $A_m, k_{zm}, k_{ym}, I_{ym}, I_{zm}, I_{vm}, I_{\omega m}$ zależne od parametrów przyjętego przekroju zastępczego. Przy wyznaczaniu funkcji I_{ym} i I_{zm} dla przekroju cienkościennego jest dopuszczalne pominięcie, jako małych wyższego rzędu — składników $\frac{b\delta^3}{12}$, w których b jest szerokością, a δ grubością elementów składowych. Moment bezwładności I_{vm} dla przekrojów złożonych z wąskich prostokątów należy obliczać z wzoru

$$I_{vm} = \frac{1}{3} \sum b_i \delta_i^3.$$

Z układu równań (3.2) podlegają wyznaczeniu parametry wybranego zastępczego przekroju modelu, których funkcjami są podziałki $a, i_y, i_z, i_v, i_\omega$ oraz wskaźniki przekroju k_{zm} i k_{ym} . W ogólnym przypadku obciążenia pręta i równoczesnym wystąpieniu w dowolnym przekroju wszystkich uogólnionych sił wewnętrznych, podanych na rys. 1, możliwe jest wyznaczenie co najwyżej sześciu parametrów przekroju, które winny spełniać siedem funkcji. Zadanie to może nie mieć rozwiązania lub też uzyskane rozwiązanie może nie mieć praktycznego zastosowania.

Co więcej dwie z nich, związane z wpływem wewnętrznych sił poprzecznych, można sprowadzić do postaci

$$(4.3) \quad \frac{k_{z0}}{k_{zm}} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} = \frac{g}{e} = \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_m}$$

wykluczającej w ogólnym przypadku obciążenia pręta i wprowadzeniu przekroju zastępczego możliwość ścisłego modelowania wpływu sił poprzecznych.

Wpływ sił poprzecznych jest jednak bardzo mały w porównaniu z wpływami pozostałych sił wewnętrznych. W rachunkowej analizie cienkościennych układów prętowych wpływ ten jest z reguły pomijany. Zagadnienie modelowania wpływu sił poprzecznych w układach prętowych o przekroju zwartym rozważał obszernie DĄBROWSKI [1] i KOLENDOWICZ [4]. Wnioski ich prac pozostają słuszne także dla prętów cienkościennych, gdyż i w tym przypadku odkształcenia związane ze zginaniem podlegają prawu płaskich przekrojów. Pominięcie wpływu sił poprzecznych powoduje redukcję liczby warunków podobieństwa modelu i obiektu i umożliwia wymiarowanie przekroju modelu w oparciu o układ równań

$$(4.4) \quad \frac{1}{ea} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{n^2}{gi_v} = \frac{n^4}{ei_\omega}.$$

Ograniczenie liczby parametrów przekroju do czterech zezwala na przyjęcie nieskomplikowanego przekroju zastępczego składającego się z trzech elementów. Fakt ten ma praktyczne znaczenie w technologii budowy modeli.

Gdy układ prętowy jest obciążony zewnętrznymi siłami skupionymi lub momentami działającymi mimoosiowo względem osi ścinania pręta, należy warunkiem podobieństwa geometrycznego objąć także współrzędne punktów zaczepienia tych uogólnionych sił

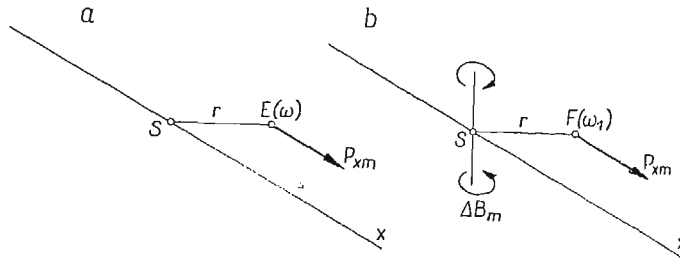
skupionych. Realizacja tego postulatu nie następuje trudności w przypadku obciążenia pręta zewnętrznymi siłami poprzecznymi. Wystarczy gdy ramię r uogólnionej siły zewnętrznej spełni warunek

$$(4.5) \quad r_0 = nr_m.$$

Inaczej jest gdy obiekt jest obciążony zewnętrzną siłą podłużną P_{x_0} działającą w odległości r_0 od osi ścinania pręta — na punkt o współrzędnej wycinkowej $\omega_0 \neq 0$ (rys. 2a). Powoduje ona ściskanie (lub rozciąganie) pręta, zginanie momentem $M_0 = P_{x_0}r_0$ oraz skręcanie bimomentem $B_0 = P_{x_0}\omega_0$ (rys. 2b). W tym przypadku oprócz warunku (4.5) należy także spełnić warunek podobieństwa współrzędnych wycinkowych w postaci

$$(4.6) \quad \omega_0 = n^2\omega_m,$$

czyli w modelu przyłożyć siłę P_{x_m} w punkcie o współrzędnych r_m i ω_m , spełniających wymienione dwa warunki.



Rys. 2.

4.3. Bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy. Postulat «prostoty» spełnia w optymalny sposób bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy przedstawiony na rys. 3. Wskaźniki przekroju zależne od jego parametrów są następujące

$$(4.7) \quad \begin{aligned} A_m &= h\delta + 2b\delta_1, \\ I_{ym} &= \frac{\delta h^3}{12} + \frac{\delta_1 b H^2}{2}, \\ I_{zm} &= \frac{\delta_1 b^3}{6}, \\ I_{\omega m} &= \frac{1}{3}(\delta^3 h + 2\delta_1^3 b), \\ I_{\omega m} &= \frac{\delta_1 b^3 H^2}{24}. \end{aligned}$$

Układ równań (3.2), przy pominięciu wpływu sił poprzecznych (4.4), przyjmuje postać

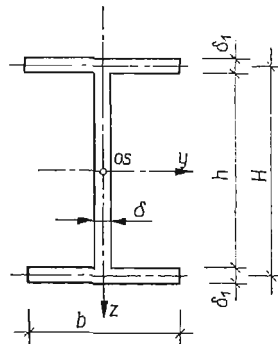
$$(4.8) \quad \frac{1}{A_0} \left(\frac{h}{b} \frac{\delta}{\delta_1} + 2 \right) = \frac{n^2}{12I_{y_0}} H^2 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \frac{h}{b} \frac{h^2}{H^2} + 6 \right) = \\ = \frac{n^2}{6I_{z_0}} b^2 = \frac{n^4}{24I_{\omega_0}} b^2 H^2 = \frac{e}{g} \frac{n^2}{3I_{\nu_0}} \delta_1^2 \left(\frac{\delta^3}{\delta_1^3} \frac{h}{b} + 2 \right),$$

skąd podlegają wyznaczeniu nieznanne parametry przekroju zastępczego. Po wprowadzeniu bezwymiarowych parametrów $m = H/b$, $t = \delta/\delta_1$, $q = \delta_1/b$ i przyjęciu dla przekroju cienkościennego w pierwszym przybliżeniu $H = h$ układ równań (4.8) przyjmuje postać

$$(4.9) \quad \frac{1}{A_0}(tm+2) = \frac{n^2}{12I_{y0}}H^2(tm+6) = \frac{n^2}{6I_{z0}}b^2 = \\ = \frac{n^4}{24I_{\omega 0}}b^2H^2 = \frac{e}{g} \frac{n^2}{3I_{y0}}q^2b^2(t^3m+2),$$

skąd

$$H = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{I_{\omega 0}}{I_{z0}}}, \\ m = \frac{H}{b} = \sqrt{\frac{I_{y0}}{2I_{z0}} - \frac{A_0 I_{\omega 0}}{6I_{z0}^2}}, \\ t = \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{2I_{y0}}{I_{z0}m^3} - \frac{6}{m}, \\ q = \frac{\delta_1}{b} = \sqrt{\frac{g}{e} \frac{I_{y0}}{2I_{z0}} \frac{1}{t^3m+2}}.$$



Rys. 3.

Wynika stąd, że w najbardziej ogólnym przypadku obciążenia obiektu istnieje rozwiązanie rzeczywiste, gdy wskaźniki przekroju obiektu spełniają nierówność

$$(4.10) \quad 1 < \frac{A_0 I_0}{I_{y0} I_{z0}} < 3.$$

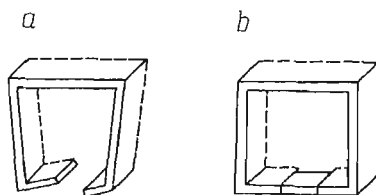
5. Podobieństwo węzłów modelu i obiektu rzeczywistego

Zagadnienie podobieństwa węzłów obiektu i modelu jako oddzielny problem występuje w przypadku modelowania cienkościennych przekrojów pręta w oparciu o warunki (3.2), przy pominięciu warunków podobieństwa cech geometrycznych i sprężystych modelu i obiektu. Zakłócenia stanu naprężenia i stanu odkształcenia spowodowane w węźle

uogólnionymi siłami wewnętrznymi N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , i M_v obejmują w myśl zasady Saint Venanta o lokalności skutków lokalnych przyczyn, wyłącznie węzeł i niewielkie obszary zbiegających się w nim prętów, nie mają natomiast wpływu na pracę prętów i konstrukcji z nich wykonanych. Mogą więc nie być brane pod uwagę przy wymiarowaniu modelu.

Inaczej jest w przypadku działania na węzeł cienkościenny bimomentów, powodujących jego deplanację. Bimoment jest bowiem samorzównoważonym układem naprężeń, którego wielkość w dużym stopniu zależy od cech geometrycznych i sprężystych ciała. W węźle ulega on częściowemu stłumieniu, zasada Saint Venanta przyjmuje dla wpływów bimomentu inny ilościowy i jakościowy charakter. Efekt brzegowy przedstawiony zrównoważonym bimomentem zanika powoli i przenika daleko w głąb pręta. Zagadnienie podobieństwa węzłów ma w takim razie istotny udział w formułowaniu warunków podobieństwa obiektu i modelu.

W praktyce ukształtowanie węzła może być bardzo różnorodne, w zależności od liczby i rodzaju prętów łączonych w danym węźle oraz od ich wzajemnego usytuowania. Często stosuje się różnego rodzaju blachy węzłowe, zebra usztywniające, przewiązki i nakładki w różny sposób w węźle rozmieszczone. Niekiedy także nie są spełnione wymogi statyczne stawiane węzłom w mechanice budowli układów cienkościennych. Osie ścinania prętów



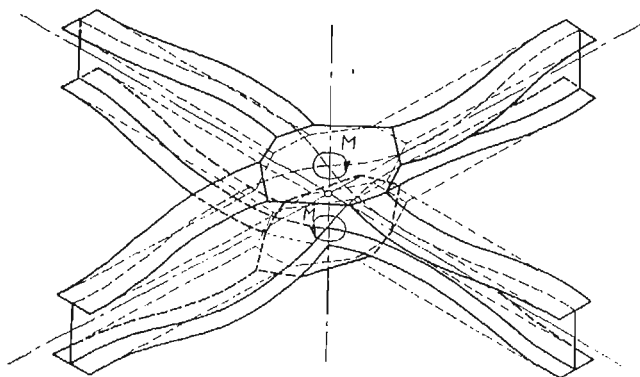
Rys. 4.

zbiegających się w danym węźle na przykład nie przecinają się w jednym punkcie, także osie ciężkości prętów mogą nie przechodzić przez jeden punkt. Przykładem takiej konstrukcji jest stalowy ruszt mostowy, w którym podłużnice i poprzecznice wykonane z profili o różnej wysokości umieszczone są w ten sposób, że górne stopki dźwigarów znajdują się w jednej płaszczyźnie, natomiast osie ścinania i osie ciężkości w płaszczyznach równoległych tak, że nie przecinają się w węzłach.

Zazwyczaj jednak węzły obiektu spełniają pewne wymogi konstrukcyjne, umożliwiające sformułowanie warunków brzegowych [7]. W ramach przestrzennych z prętów cienkościennych o otwartych, symetrycznych profilach dąży się do uniemożliwienia paczenia się węzłów. W tym celu stosuje się odpowiednie usztywnienie przekroju przy użyciu zebra (rys. 4). Warunek ten może być także w modelu z łatwością spełniony.

Dla węzłów płaskich, w których zbiegają się pręty cienkościenne o przekroju zbliżonym do dwuteowego lub ceowego, połączone wzajemnie półkami, przyjmuje się w mechanice cienkościennych układów prętowych założenie jednakowej deplanacji końców wszystkich prętów w tym węźle. Założenie to realizuje się przez umieszczenie w płaszczyznach górnych i dolnych półek s z t y w n y c h nakładek, przekazujących obrót każdej

półki na półki pozostałych prętów (rys. 5). Węzeł stanowią wówczas dwie sztywne nakładki, które przy deplanacji węzła ulegają w swych płaszczyznach obrotom w kierunkach wzajemnie przeciwnych. Środkiem węzła jest punkt przecięcia się osi ścinania prętów. Przypadek ten może być łatwo zrealizowany na modelu przez wbudowanie analogicznych nakładek węzłowych.



Rys. 5.

W węźle sprężystym część bimomentu jest przejmowana przez węzeł. Może on być traktowany jako krótki pręt o długości H (rys. 6a) skręcany momentami $M = B/H$ przyłożonymi do blach węzłowych. Uważając za RUTECKIM [7] ten przypadek za przypadek czystego skręcania kąt skręcenia blach węzłowych może być obliczony z wzoru

$$(5.1) \quad \varphi = \frac{MH}{GI_v},$$

w którym występujący moment bezwładności czystego skręcania może być obliczony z wzorów:

$$(5.2) \quad I_v = \frac{1}{3} \sum s \delta^3$$

— gdy przekrój węzła składa się z wąskich i długich prostokątów (rys. 6b);

$$(5.3) \quad I_v = \frac{\Omega^2 \delta_1}{s_1}$$

— gdy ścianki i przepony prętów schodzących się w węźle przedstawiają kontur zamknięty (rys. 6c);

$$(5.4) \quad I_v = \frac{\Omega^2 \delta_1}{s_1} + \frac{1}{3} \sum s \delta^3$$

— gdy ścianki i przepony schodzących się w węźle prętów przedstawiają zamknięty profil z występami (rys. 6d). W powyższych wzorach oznaczają: s szerokość (w zarysie blach węzłowych), δ i δ_1 grubości oddzielnych przekrojów odpowiednio konturu otwartego i zamkniętego; Ω — podwójne pole konturu zamkniętego; $s_1 = s \delta_1 / \delta$.

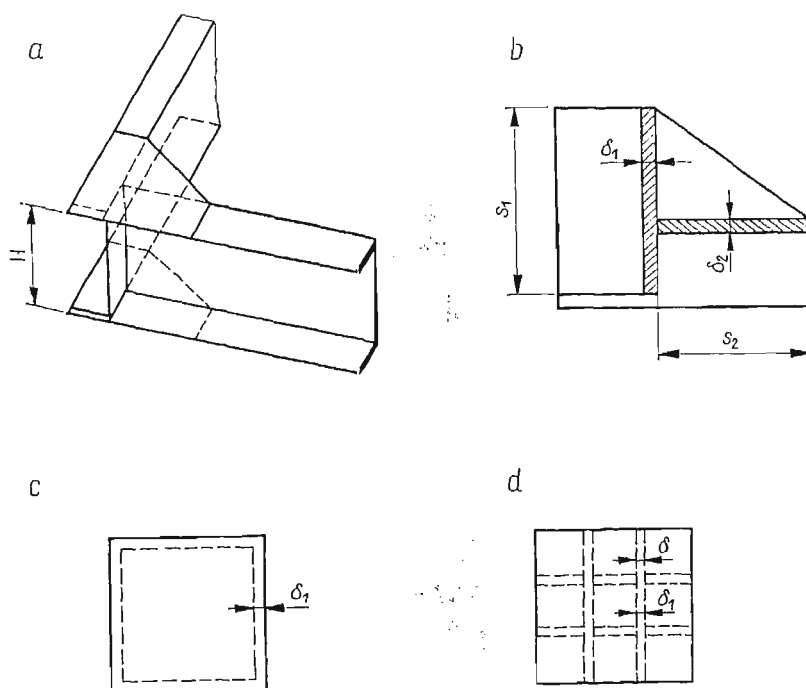
Skalę kątów obrotu przekrojów obiektu i modelu określa zależność (3.1)

$$\frac{j}{n} = \frac{fn^2}{gi_v}$$

Stosunek kątów skręcenia węzła obiektu i modelu zgodnie z (5.1) i przyjętymi oznaczeniami wynosi

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_m} = \frac{M_0}{M_m} \frac{H_0}{H_m} \frac{G_m}{G_0} \frac{I_{vmw}}{I_{vow}} = \frac{fn}{gi_{vw}} \frac{H_0}{H_m}$$

Indeksem w oznaczono momenty bezwładności przekroju węzła.



Rys. 6.

Podziałki kątów skręcenia węzłów i prętów winny być identyczne, zatem

$$\frac{fn^2}{gi_v} = \frac{fn}{gi_{vw}} \frac{H_0}{H_m}$$

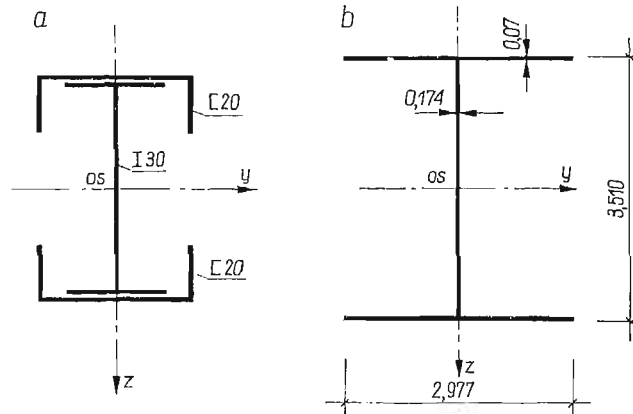
oraz

$$(5.5) \quad i_{vw} = \frac{H_0}{nH_m} i_v$$

Zależność (5.5) określa warunek podobieństwa płaskich węzłów sprężystych.

6. Przykłady

6.1. **Przykład 1.** Przekrój pręta obiektu, złożony z profili walcowanych, podano na rys. 7a. Obiekt jest wykonany ze stali, dla której współczynnik zwięźnienia poprzecznego wynosi 0,3. Przekrój posiada następującą geometryczną i wycinkową charakterystykę: $A_0 = 103,5 \text{ cm}^2$; $I_{z_0} = 4271 \text{ cm}^4$; $I_{y_0} = 22456 \text{ cm}^4$; $I_{v_0} = 86 \text{ cm}^4$; $I_{w_0} = 1318600 \text{ cm}^6$.



Rys. 7.

Model ma być sporządzony w skali 1:10 z celuloиду o współczynniku zwięźnienia poprzecznego $\nu_m = 0,42$. Zatem

$$\frac{g}{e} = \frac{1 + \nu_m}{1 + \nu_0} = \frac{1,42}{1,30} = 1,0923.$$

Dla modelu przyjęto bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy, podany na rys. 3. Ponieważ

$$\frac{A_0 I_{w_0}}{I_{y_0} I_{z_0}} = \frac{103,5 \cdot 1318600}{22456 \cdot 4271} = 1,495 > 1,$$

to przyjęcie wybranego przekroju zastępczego jest możliwe. Jego wymiary obliczono z wzorów (4.9)

$$H = \frac{2}{10} \sqrt{\frac{1318600}{4271}} = 3,51 \text{ cm},$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{22456}{2} - \frac{103,5 \cdot 1318600}{6 \cdot 4271} \right) \frac{1}{4271}} = 1,179,$$

$$b = \frac{3,51}{1,179} = 2,977 \text{ cm},$$

$$t = \frac{2 \cdot 22456}{4271 \cdot 1,179^3} - \frac{6}{1,179} = 2,44,$$

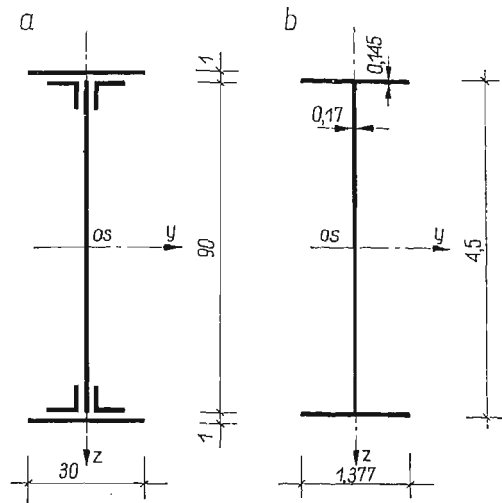
$$q = \sqrt{\frac{86}{2 \cdot 4271} \cdot 1,0923 \cdot \frac{1}{2,44^3 \cdot 1,179 + 2}} = 0,02395,$$

$$\delta_1 = 0,02395 \cdot 2,977 = 0,0713 \text{ cm},$$

$$\delta = 2,44 \cdot 0,0713 = 0,174 \text{ cm}.$$

Zaprojektowany przekrój zastępczy modelu podano na rys. 7b.

6.2. Przykład 2. Obiekt jest nitowaną belką blaszaną o przekroju podanym na rys. 8a. Wymiary w mm elementów przekroju są następujące: środnik 900×10 ; pasy 300×10 ; kątowniki równoramienne $100 \times 100 \times 10$ ($\nu_0 = 0,3$). Dla przekroju obiektu obliczono: $A_0 = 229,8 \text{ cm}^2$; $I_{y_0} = 322\,271 \text{ cm}^4$; $I_{z_0} = 6\,125 \text{ cm}^4$; $I_{y_0 z_0} = 910 \text{ cm}^4$; $I_{\omega_0} = 12\,410\,000 \text{ cm}^6$.



Rys. 8.

Model należy sporządzić z celuloиду ($\nu_0 = 0,42$) w skali $1 : 20$. Przyjęto bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy (rys. 3), sprawdzono warunek (4.10)

$$\frac{2298 \cdot 12410000}{322271 \cdot 6125} = 1,413 > 1$$

oraz za pomocą wzorów (4.9) obliczono wymiary przekroju zastępczego

$$H = \frac{2}{20} \sqrt{\frac{12\,410\,000}{6\,125}} = 4,5 \text{ cm},$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{322\,271}{2} - \frac{226,8 \cdot 12\,410\,000}{6 \cdot 6125} \right) \frac{1}{6125}} = 3,27,$$

$$b = \frac{4,5}{3,27} = 1,377 \text{ cm},$$

$$t = \frac{2 \cdot 322\,271}{6125 \cdot 3,27^3} - \frac{6}{3,27} = 1,175,$$

$$q = \sqrt{\frac{910 \cdot 1,0923}{2 \cdot 6125 \cdot (1,175^3 \cdot 3,27 + 2)}} = 0,1053,$$

$$\delta = 0,1053 \cdot 1,377 = 0,145 \text{ cm},$$

$$\delta_1 = 1,175 \cdot 0,145 = 0,1704 \text{ cm}.$$

Zaprojektowany przekrój zastępczy przedstawiono na rys. 8b.

Literatura cytowana w tekście

1. O. DĄBROWSKI, *Odpowiedniość modelowa dla ram przestrzennych*, Referaty I Sesji Naukowej Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1958.
2. M. JANUSZ, *Teoria badań modelowych ustrojów statycznie niewyznaczalnych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, nr 43, Wrocław 1952.
3. M. JOKIEL, *Statyka modelowa cienkościennych układów prętowych* (praca doktorska), Wrocław 1965.
4. T. KOLENDOWICZ, *Statyka modelowa układów prętowych przestrzennych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, nr 115, Wrocław 1964.
5. И. В. УРБАН, *Теория расчёта стержневых тонкостенных конструкций*, Трансжелдориздат, Москва 1955.
6. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Физматгиз, 1959.
7. J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ БИСИММЕТРИЧЕСКОГО ОТКРЫТОГО СЕЧЕНИЯ

В работе даются условия подобия для простого призматического тонкостенного стержня произвольного открытого сечения, и принципы подбора размеров для небольших моделей построенных из такого рода стержней. Предполагается, что тонкостенные стержни подвержены несвободному кручению и что их сечения депланируются. Учитывается влияние биомоментов и изгибающе-крутящих моментов.

Критерий подобия выводится из подобия энергий уругой деформации [уравнения (2.3), (4.2)]. В главе 4 предложен метод сечений-заменителей не обладающих геометрическим подобием по отношению сечениям объекта. Упругие характеристики модели и объекта могут также различаться для тех случаев, когда влияние поперечных сил не учитывается. Вопрос подобия узлов рассмотрен в главе 5. Предложенный метод иллюстрируется с помощью числовых примеров (гл 6).

Summary

MODEL CORRESPONDENCE CRITERIA FOR THIN-WALLED RODS OF BI-SYMMETRIC OPEN CROSS-SECTION

In the paper the conditions of model correspondence for a straight prismatic thin-walled bar of arbitrary open cross-section are given, as well as the rules of designing the smallscale models for systems consisting of such bars. The thin-walled bars are subject to constrained torsion, their cross-sections undergoing deplanation. The influence of bimoments and torsionflexure couples (Fig. 1) is taken into consideration.

The model correspondence criterion is derived from the similarity of the elastic strain energy expressions, Eqs. (2.3), (4.2). In Sec. 4 the method of «reduced cross-sections», geometrically different from the original, is proposed. Elastic characteristics of the object and the model can also be different provided the influence of transversal forces is neglected. The problem of similarity of joints is discussed in Sec. 5. Numerical examples (Sec. 6) illustrate the method proposed in the paper.

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 maja 1970 r.