

ZJAWISKO REZONANSU W KONTAKCIE CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

JADWIGA HALAUNBRENNER, MIECZYSLAW KMIĘCIK (KRAKÓW)

1. Wstęp

W szeregu prac teoretycznych i doświadczalnych badano właściwości mechaniczne kontaktu ciał sprężystych. Pokazano, że ciała sprężyste, stykające się z innymi (jak np. kulki w łożyskach tocznych, kamyki w warstwach żwiru) poddane działaniu sił stycznych lub normalnych do powierzchni styku, a także działaniu momentów sił, posiadają określoną podatność na przesunięcie i skręcenie. Wytrącone z położenia równowagi wykonują drgania tłumione o częstotliwości, która jest funkcją modułów sprężystości, bezwładności i nacisku normalnego. Należało zatem oczekiwać, że ciała takie poddane działaniu sił lub momentów okresowo zmiennych w czasie okażą zjawisko rezonansu.

Przedstawiona praca zajmuje się tym zjawiskiem w przypadku kuli przyciśniętej siłą normalną do podstawy i poddanej działaniu momentu $M = M_0 \sin \omega t$ wymuszającego drgania obrotowe wokół normalnej do powierzchni kontaktu.

2. Opis eksperymentu

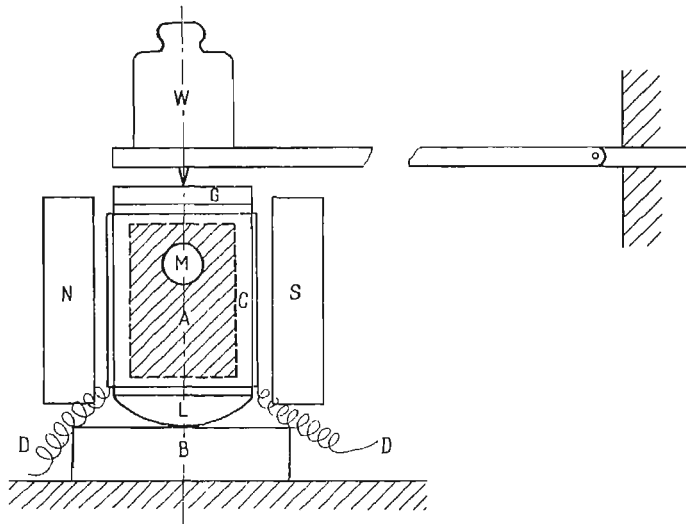
Zbudowano przyrząd przedstawiony na rys. 1. Składa się on z lekkiego, pustego walca C z materiału niemagnetycznego, do którego dolnej podstawy przyklejono soczewkę płasko-wypukłą L , do górnej — szklaną płytkę G .

Soczewka jest przyciskana za pośrednictwem stalowej igły do mosiężnej podstawy B ciężarem W , spoczywającym na końcu ramienia dźwigni. Na walcu nawinięto cewkę izolowanego drutu. Aby wywierać na ten układ (zwany dalej wibratorem) moment obrotowy proporcjonalny do natężenia prądu płynącego przez cewkę, całość — jak w galvanometrze o ruchomej cewce — umieszczono między biegunami magnesu stałego N-S. Dla nadania połu magnetycznemu struktury radialnej, wewnątrz pustego walca z cewką umieszczono walec pełny z miękkiego żelaza. Prąd do cewki doprowadzono za pomocą dwóch bardzo wiotkich mosiężnych pasków D , wywierających znikomy moment kierujący. Obroty wibratora rejestrowano metodą optyczną przy pomocy zwierciadełka M i papieru światłoczułego na obracającym się walcu. Cewkę zasilano prądem zmiennym z generatora drgań akustycznych.

Wykonano kolejno następujące pomiary:

1. Wyznaczono moment bezwładności J wibratora względem głównej, centralnej osi bezwładności metodą wahadła torsyjnego, znajdując $J = 3,57 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$.

2. Zarejestrowano drgania własne «kontaktowe» układu. Udzielano w tym celu wibratorowi słabego impulsu mechanicznego, skręcając w ten sposób materiał obu ciał w obszarze styku i jego otoczeniu. Rys. 2a przedstawia oscylogram tych drgań. Częstość ich odczytana z oscylogramu $f_0 = 55,2 \text{ Hz}$.



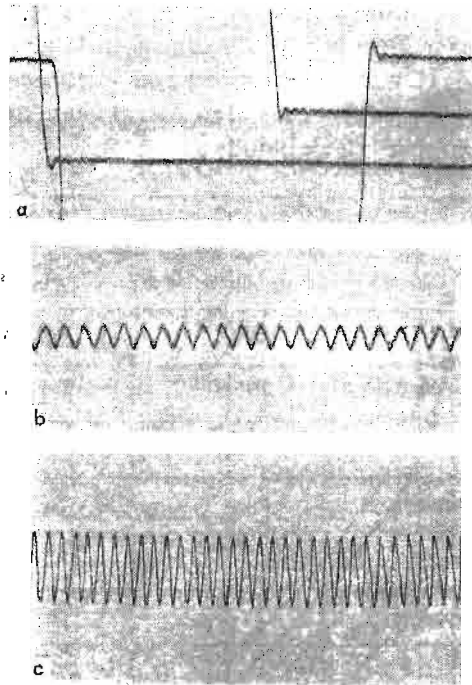
Rys. 1. Schemat układu do wymuszania drgań obrotowych

3. Sporządzono statyczne pętle histerezy. Doprowadzono w tym celu do cewki prąd stały o powoli, monotonicznie narastającym natężeniu i od zera do pewnej wartości maksymalnej i_0 , przechodząc następnie powoli do natężenia $-i_0$ i wracając do zera. Odpowiadające obrotowi przesunięcia wskaźnika świetlnego odczytywano na mikroskali odległej od zwierciadła o 4 m. Wykreślono statyczne pętle histerezy dla szeregu amplitud prądowych i_0 aż do wartości amplitudy, przy której zachodził poślizg na całej powierzchni styku, tzn. obserwowano powolny, jednostajny obrót cewki. Rys. 3 przedstawia otrzymane pętle histerezy w układzie współrzędnych M, φ , gdzie φ oznacza kąt obrotu cewki liczony od położenia początkowego, zaś $M = ki$ moment obrotowy wywierany przez pole magnetyczne na cewkę przewodzącą prąd. Pola powierzchni pętli rosną szybko z rosnącymi amplitudami M_0 .

4. Wyznaczono doświadczalnie współczynnik proporcjonalności k między natężeniem prądu i w cewce a momentem $M = ki$ wywieranym na nią przez pole magnetyczne. Usuwano w tym celu podstawę B oraz igłę przenoszącą nacisk normalny i zawieszano wibrator na pionowym, sprężystym druciku z fosforobrazu. Mierzono metodą optyczną kąt obrotu cewki φ pod wpływem prądu o natężeniu i ; moment wywierany przez skręcany drucik obliczono ze wzoru $M = \pi Gr^4 \varphi / 2L$. Otrzymana stąd wartość k wynosi

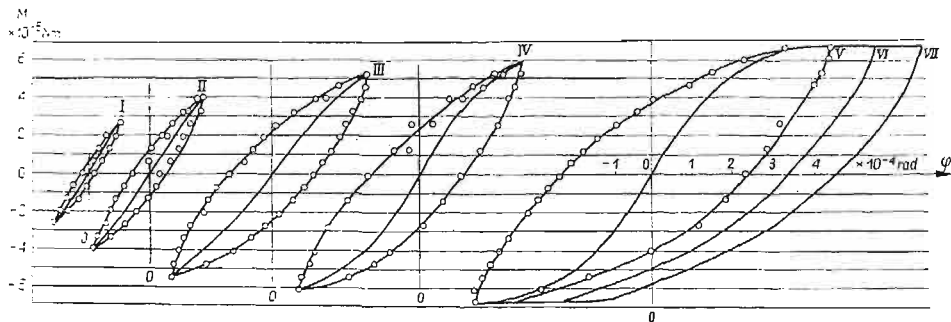
$$k = \frac{M}{i} = 6,86 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/A.}$$

5. Zdjęto szereg amplitudowych krzywych rezonansu zasilając cewkę prądem o natężeniu sinusoidalnie zmiennym o stałej amplitudzie i_0 zmieniając jego pulsację ω . Dla każdej wartości amplitudy prądowej wykonywano dwie serie obserwacji: pierwszą — dla



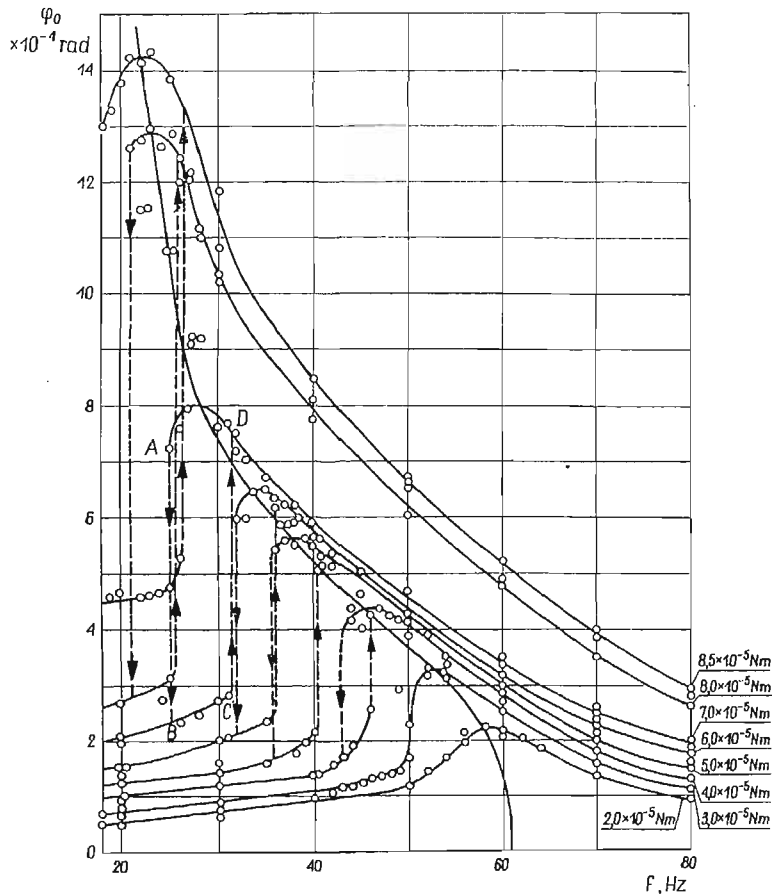
Rys. 2. Oscylogramy: *a* — swobodnych drgań układu, *b* — drgań wymuszonych przez moment o częstotliwości 20 Hz i amplitudzie $M_0 = 9,5 \cdot 10^{-5}$ Nm, *c* — drgań wymuszonych przez moment o częstotliwości 33 Hz o tej samej amplitudzie

częstotliwości rosnących (przy nacisku normalnym $N = 7,5$ N, od 20 Hz do 80 Hz), drugą — dla częstotliwości malejących, w tych samych granicach. Ustaloną amplitudę drgań wymuszonych odczytywano na mikroskali lub rejestrowano na papierze światłoczułym (rys. 2b i 2c).



Rys. 3. Pętle histerezy statycznej: zależności przyłożonego momentu obrotowego M od kąta obrotu układu ruchomego

Krzywe rezonansu amplitudy przedstawia rys. 4. Na osi poziomej odcinano częstotści f momentu wymuszającego, na osi pionowej — ustaloną amplitudę drgań wymuszonych. Wartość amplitudy momentu wymuszającego $M_0 = ki_{\text{eff}}/\sqrt{2}$ zaznaczono jako parametr dla każdej krzywej. Począwszy od pewnej wartości amplitudy prądowej obserwowano «skoki» amplitudy drgań wymuszonych: AB — przy częstotściach malejących, CD — przy częstotściach rosnących, charakterystyczne dla drgań nieliniowych. Przesunięcie wierzchołka krzywej rezonansowej w kierunku mniejszych częstotści świadczy o «miękkiej» charakterystyce sił sprężystych w kontakcie. Ten rodzaj charakterystyki pociąga za sobą wzrost okresu drgań ze wzrostem ich amplitudy.



Rys. 4. Krzywa rezonansu: zależność amplitudy kątowej φ_0 drgań wymuszonych od częstotści f momentu wymuszającego $M = M_0 \sin 2\pi ft$ dla różnych wartości amplitudy M_0 . Na rysunku wykreślono krzywą «szkieletową» poprzez maksima krzywych rezonansu

Przez maksima krzywych rezonansu przeprowadzono krzywą «szkieletową» i ekstrapolowano ją do przecięcia z osią częstotści. Punkt ten ma odciętą $f = 61,2$ Hz bliską częstotści drgań swobodnych $55,2$ Hz zarejestrowanych na oscylogramie na rys. 2a.

6. Zmierzono współczynnik tarcia ślizgowego szkła po mosiądzu przyrządem wahadłowym; otrzymano $\mu = 0,33$.

3. Sporządzenie charakterystyk momentów sił sprężystych i momentów sił tarcia

Przedstawimy sporządzenie charakterystyk momentów sił sprężystych i momentów sił tarcia w kontakcie kuli z płytą w tarcu suchym, wiertnym na podstawie uzyskanych eksperymentalnie krzywych rezonansu amplitudy względem statycznych pętli histerezy.

Celem znalezienia charakterystyki sprężystej kontaktu, tzn. zależności momentu sił sprężystych M_s od amplitudy φ_0 kąta obrotu wibratora na podstawie krzywych rezonansowych, napiszemy równanie drgań wymuszonych wibratora w postaci:

$$(3.1) \quad J\ddot{\varphi} = -M_s(\varphi) - k\dot{\varphi} + M_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

W równaniu tym J oznacza moment bezwładności wibratora względem osi obrotu, M_0 — amplitudę momentu wymuszającego o pulsacji ω ; tarcie suche zastąpiono tarcie wiskotycznym (przy czym współczynnik k jest funkcją amplitudy) tak, by praca rzeczywistego momentu sił tarcia w czasie okresu $T = 2\pi/\omega$ była równa pracy momentu $k\dot{\varphi}$ w tym samym czasie.

Jako przybliżone rozwiązanie tego równania można przyjąć funkcję

$$(3.2) \quad \varphi = \varphi_0 \sin \omega t.$$

Z żądania, aby to rozwiązanie było słuszne przynajmniej dla maksymalnych wychyleń ($\omega t = \pi/2$) i dla przejść przez położenie równowagi ($\omega t = 0$), otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} -J\varphi_0 \omega^2 + M_s(\varphi_0) &= M_0 \cos \alpha, \\ k\varphi_0 \omega &= M_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Z tego układu równań obliczamy

$$(3.3) \quad M_s(\varphi_0) = \pm \sqrt{M_0^2 - k^2 \varphi_0^2 \omega^2} + J\varphi_0 \omega^2$$

i

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k\varphi_0 \omega}{M_s(\varphi_0) - J\varphi_0 \omega^2}.$$

Pamiętając, że moment sił tarcia równa się $M_t = k\dot{\varphi} = k\varphi_0 \omega \cos \omega t$ i jego wartość maksymalna wynosi $M_{t0} = k\varphi_0 \omega$, możemy przepisać równania (3.3) i (3.4) w postaci

$$(3.5) \quad M_s(\varphi_0) = \pm \sqrt{M_0^2 - M_{t0}^2} + J\varphi_0 \omega^2,$$

$$(3.6) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{t0}}{M_s(\varphi_0) - J\varphi_0 \omega^2}.$$

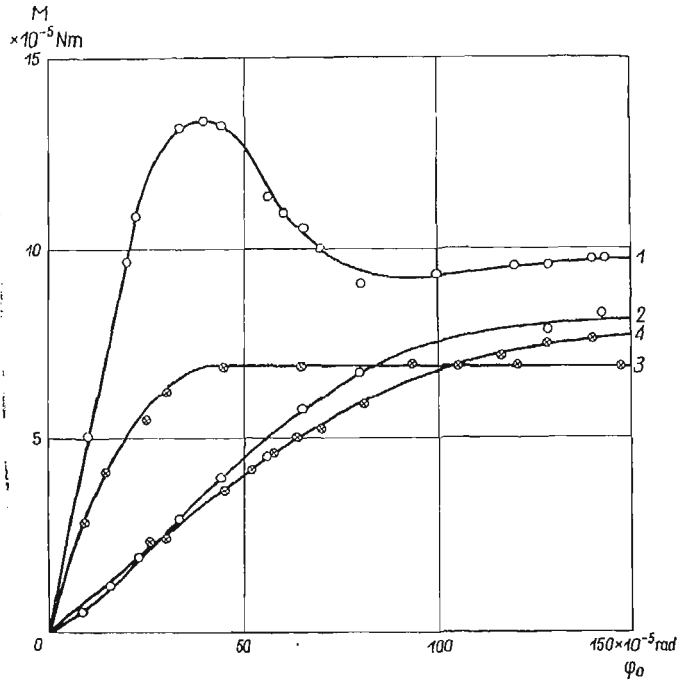
Wzór (3.5) jest równaniem krzywej rezonansowej. Przy danej pulsacji momentu wymuszającego, maksymalną amplitudę drgań wymuszonych otrzymamy dla $M_0^2 = M_{t0}^2$. Zatem równanie

$$(3.7) \quad M_s(\varphi_0) = J\varphi_0 \omega^2$$

jest równaniem krzywej «szkieletowej» dla układu krzywych rezonansu amplitudy. Odczytując z krzywej «szkieletowej», poprowadzonej przez maksima krzywych rezonansowych wartości φ_0 i ω , otrzymujemy przebieg funkcji $M_s = M_s(\varphi_0)$. Krzywa ta przedstawiona

jest na rys. 5 i oznaczona cyfrą 1. Posiada ona jedno wyraźne maksimum. Zależność amplitudy momentu sił tarcia M_{t0} od amplitudy wychylenia otrzymujemy również z krzywej szkieletowej, ponieważ dla wszystkich jej punktów zachodzi $M_{t0} = M_0$. Przebieg M_{t0} przedstawia krzywa 2 na rys. 5.

Przedstawimy charakterystyki: sprężystą i tarciovą kontaktu uzyskane na podstawie statycznej pętli histerezy.



Rys. 5. Przybliżone charakterystyki sprężyste i tarciove kontaktu uzyskane w oparciu o krzywe rezonansu (krzywe 1 i 2) i oparte na statycznej pętli histerezy (krzywe 3 i 4)

Dla sporządzenia przybliżonej charakterystyki kontaktu, przy pominięciu wyższych harmonicznych, wystarczy odczytać współrzędne wierzchołków pętli histerezy. Przy dowolnym ($\omega \approx 0$) obiegu pętli z przystankami dla odczytu M_s i φ , moment zewnętrzny przyłożony do wibratora równoważy moment sił sprężystych w kontakcie. Wykres amplitudy M_{s0} w funkcji φ_0 przedstawia krzywa 3 na rys. 5. Począwszy od pewnej wartości amplitudy wychylenia przebiega ona równoległe do osi φ_0 . Charakterystykę tarciovą kontaktu otrzymamy, pamiętając, że powierzchnia pętli histerezy przedstawia pracę L_t momentu sił tarcia zamienioną podczas obiegu pętli na ciepło i zużycie cierne obu powierzchni. Przy założeniu tarcia wiskotycznego i przybliżonego rozwiązania (3.2), mamy

$$(3.8) \quad L_t = \int_0^{2\pi} M_t d\varphi = \int_0^{2\pi} k\dot{\varphi} d\varphi = \int_0^T k\dot{\varphi}^2 dt = k\varphi_0^2\omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2\omega t dt =$$

$$= \pi k\varphi_0^2\omega = M_{t0}\pi\varphi_0, \quad \text{stąd} \quad M_{t0} = \frac{L_t}{\pi\varphi_0}.$$

Wykres amplitudy momentu sił tarcia w funkcji amplitudy kąta obrotu przedstawia krzywa 4 na rys. 5. Przebiegi M_{t0} na podstawie krzywej rezonansowej i na podstawie statycznej pętli histerezy nie różnią się wiele od siebie, natomiast przebiegi amplitudy sił sprężystych różnią się bardzo znacznie.

W przypadku przebiegów quasi-statycznych moment sił sprężystych osiąga «nasylenie», w przypadku drgań wymuszonych to nie zachodzi.

Próby uzyskania krzywych rezonansu przy założeniu ważności statycznej pętli histerezy w warunkach dynamicznych nie doprowadziły do krzywych rezonansu otrzymanych doświadczalnie.

4. Przegląd ważniejszych prac teoretycznych dotyczących charakterystyki sprężystej kontaktu dwóch kul z uwzględnieniem tarcia

Zagadnienie kontaktu dwóch ciał sprężystych stosujących się do prawa Hooke'a i przyciskanych do siebie siłą N normalną do ich wspólnej powierzchni styku rozwiązał H. HERTZ. Jednym z ważnych jego założeń jest pominięcie naprężeń stycznych na powierzchni kontaktu.

W przypadku kuli przyciskanej do półprzestrzeni sprężystej obszar kontaktu jest kołem o promieniu a danym wzorem

$$(4.1) \quad a = \left[\frac{3N}{8} \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right) R \right]^{1/3},$$

gdzie G_1 i G_2 oznaczają współczynniki sprężystości na skręcanie, ν_1 i ν_2 — współczynniki Poissona materiału kuli i podstawy, R — promień kuli.

Rozkład naprężeń normalnych na powierzchni kontaktu wyraża się wzorem

$$(4.2) \quad \sigma_n = \frac{3N}{2\pi a^3} (a^2 - \rho^2)^{1/2},$$

gdzie ρ jest odległością punktu od środka koła styku.

MINDLIN [1] rozpatruje kontakt dwu sprężystych, jednorodnych kul przyciskanych do siebie siłą normalną i poddanych działaniu momentu pary sił obracającego układ wokół linii środków obu kul. Wykazuje on, że przyjmując szczenie kul w obszarze kontaktu otrzymujemy wynik, że naprężenia styczne na obwodzie koła styku rosną do nieskończoności przy dowolnie małym kącie skręcenia φ .

LUBKIN [2] zakładając tarcie, dopuszcza poślizgi; skręcenie układu o kąt φ powoduje podział obszaru styku na dwie części: część środkową, kołową, obracającą się jak ciało sztywne (obszar szczenia) i pierścień poślizgu, na powierzchni którego naprężenia styczne mają wartość wyznaczoną prawem tarcia Coulomba: $\tau = \mu\sigma_n$, gdzie μ jest współczynnikiem tarcia między obu ciałami, niezależnym od nacisku i prędkości. Relację między kątem skręcenia φ i wewnętrznym promieniem c pierścienia poślizgu podaje wzór

$$(4.3) \quad \varphi = \frac{3\mu N}{4\pi G a^2} k^2 D,$$

gdzie $k^2 = 1 - c^2/a^2$, zaś D jest kompletną całką eliptyczną modulo k . Przy wzroście kąta φ , szerokość pierścienia poślizgu rośnie. Gdy poślizg obejmuje całą powierzchnię styku ($c = 0$), moment sił tarcia osiąga wartość maksymalną M_1

$$(4.4) \quad M_1 = \frac{3\pi}{16} \mu Na.$$

Dla momentu sił zewnętrznych $M = M_1$, kąt φ rośnie nieograniczenie. Związek między wartością momentu sił zewnętrznych a promieniem pierścienia poślizgu c wyraża się bardzo skomplikowaną funkcją uwikłaną, nie pozwalającą na zapis momentu M w formie $M = M(\varphi)$.

DERESIEWICZ [3] rozpatruje dwie jednakowe sprężyste kule przyciskane do siebie siłą normalną, działającą wzdłuż ich linii środków i poddane działaniu momentu M oscylującego powoli między wartościami $-M_0 \leq M \leq M_0$, ograniczając się do momentów $M \ll M_1$. Otrzymuje on pętle histerezy o powierzchni proporcjonalnej do M^3 , przedstawiające straty energii na ciepło podczas jednego cyklu.

W pracy doświadczalnej HALAUNBRENNER i SUKIENNIK [4] obserwowano drgania kuli ściśniętej między dwiema równoległymi płytami, obróconej o mały kąt i puszczonej swobodnie. Na podstawie wzoru Lubkina na podatność C jednego z ciał kontaktujących dla bardzo małych kątów skręcenia

$$(4.5) \quad C = \frac{d\varphi}{dM} = \frac{3}{16Ga^3}$$

obliczono okres tych drgań

$$(4.6) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{16} \cdot \frac{J}{a^3} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right)},$$

gdzie J oznacza moment bezwładności kuli względem średnicy. Wzór ten doświadczenie potwierdziło.

W drugiej pracy tych samych autorów [5] obserwowano zanik amplitudy drgań kuli przy tej samej geometrii doświadczenia, wymuszonych przez skręconą i puszczonej swobodnie sprężynę płaską. Przebieg zjawiska tłumienia wyjaśniono poślizgami na całej powierzchni styku, następnie przy mniejszych amplitudach na pierścieniach zewnętrznych koła styku, w końcu przy bardzo małych — tarcie wewnętrzne w materiale kuli i podstawy.

SIEMIENOWA [6, 7] obserwuje zjawisko rezonansu przy drganiach obrotowych wymuszonych walca przyciskanego siłą normalną do podstawy i wykorzystuje krzywe rezonansu dla określenia zależności sił wzajemnego oddziaływania obu ciał od nacisku normalnego, czasu trwania kontaktu, rodzaju ciał, obróbki powierzchni i smaru. Próbuje ona opisać zjawisko równaniem Duffinga bez wnikania w strukturę kontaktu.

5. Wyniki eksperymentu w świetle prac teoretycznych

Rozpatrzono pętle histerezy statycznej (rys. 3). Na każdej z nich zaznaczona jest krzywa «dziewicza» wychodząca z położenia zerowego. Ze wzrostem kąta φ , $\frac{dM}{d\varphi}$ maleje

i począwszy od pewnej wartości amplitudy kątowej φ krzywa osiąga «nasylenie». Krzywa teoretyczna, podająca zależność kąta obrotu cewki φ od wartości przyłożonego momentu M , dana jest graficznie w pracy [3]. Przebieg krzywej eksperymentalnej ma ten sam charakter. Wartość momentu zewnętrznego, od której począwszy następuje poślizg na całej powierzchni styku według wzoru (4.4) wynosi teoretycznie $2,74 \cdot 10^{-4}$ Nm, podczas gdy wartość ta odczytana z pętli histerezy równa się $6,86 \cdot 10^{-4}$ Nm. Ta znaczna rozbieżność obu wartości da się częściowo wyjaśnić działaniem kolca przenoszącego nacisk normalny. Zarówno kolec, jak i sprężynki doprowadzające prąd wywierają pewien moment zwrotny. Prawo tarcia Coulomba też nie jest ścisłe: współczynnik tarcia jest funkcją nacisku i prędkości, a także zależy od wilgotności i zanieczyszczeń atmosfery. Należałoby doświadczenie powtórzyć zastępując kolec drugą soczewką, indentyką z dolną i przeprowadzić eksperyment w próżni.

Podatność układu soczewka–płyta na skrócenie dla bardzo małych kątów skręcania obliczona na podstawie (4.5) wynosi przy $N = 7,5$ N, $R = 5,0$ cm i tablicowych wartościach G dla szkła i mosiądzu: $C = 1,90$ rad/Nm. Podatność otrzymana z krzywej «dziewiczej» pętli o najmniejszej amplitudzie na rys. 3 ma wartość $3,29$ rad/Nm. Należy zauważyć, że w położeniu zerowym struktura kontaktu nie jest znana; nie udaje się bowiem zetknąć soczewki z podstawą i obciążyć jej tak, by nie było na powierzchni styku małych poślizgów i obrotów. Można się o tym przekonać na dużych modelach przy użyciu metody elastooptycznej.

Zajmiemy się teraz częstością drgań własnych wibratora o tak małej amplitudzie, że nie popełniając dużego błędu można przyjąć, że zachodzi szczipienie na całej powierzchni styku. Częstość ta odczytana z oscylogramu na rys. 3a wynosi $f_0 = 55,2$ Hz, częstość obliczona na podstawie wartości C otrzymanej z pętli histerezy $46,5$ Hz. Krzywa «szkieletowa» amplitudowych krzywych rezonansu (rys. 4) przecina oś częstości w punkcie o częstości 61 Hz. Fakt ten jest trudny do interpretacji, skoro częstość słabo tłumionych drgań własnych wynosi około 55 Hz.

Z rys. 2b i 2c widać, że przebieg drgań wymuszonych nie wykazuje dużych odstępstw od przebiegu drgań harmonicznym prostym: zawartość wyższych harmonicznym zależy od amplitudy i pulsacji momentu wymuszającego.

Opisane zjawisko odgrywa rolę w badaniu procesów zachodzących w parach kinematycznych. Biorąc pod uwagę, że podobne zjawiska występują w kontakcie przy drganiach wymuszonych przez okresowo zmienne siły styczne do powierzchni kontaktu, a także i siły normalne, można przewidzieć obszary częstości fal mechanicznym tłumionych selektywnie przez warstwy materiałowym ziarnistym, jak np. piasek i żwir.

Literatura cytowana w tekście

1. R. D. MINDLIN, *Compliance of elastic bodies in contact*, Jour. of Appl. Mech. Trans., ASME, 71 (1949), 259–268.
2. J. L. LUBKIN, *The torsion of elastic spheres in contact*, Jour. of Appl. Mech. Trans., ASME, 73 (1951) 183–187.
3. H. DERESIEWICZ, *Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple*, Jour. of Appl. Mech., March, 1954, 52–56.

4. J. HALAUNBRENNER, P. SUKIENNIK, *On the end of the motion of solids on an elastic base*, Acta Phys. Polon., XXI (1962), Fasc. 3.
5. J. HALAUNBRENNER, P. SUKIENNIK, *On the role of contact stresses in frictional damping of mechanical oscillation*, Jour. of Lubrication Technology Trans., ASME, Series F., N., 2, 89 (1967), 109.
6. В. А. СЕМЕНОВА, *Исследование процессов внешнего трения металлов методом анализа вынужденных микроколебаний ползуна*, Изв. Выс. Уч. Зав. СССР, Машиностр., № 10, 1961.
7. В. А. СЕМЕНОВА, *О физической природе внешнего трения в условиях гармонических колебаний ползуна в пределах предварительного смещения*, Изв. Выс. Школы, Машиностр., № 2, 1962.

Резюме

ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА В КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ

Представленная работа состоит из 3 частей: часть I содержит описание эксперимента. Сферическая, стеклянная линза была прижата нормальной силой к горизонтальному, упругому основанию и подвергнута моменту сил вращающих её вокруг вертикальной оси. При изменяющейся пульсации ω вынуждающего момента $M = M_0 \sin \omega t$ при постоянной амплитуде M_0 получены амплитудные кривые резонанса для разных величин M_0 . Ход кривых указывает на сильно нелинейную и «мягкую» упругую характеристики контакта.

Затем сняты статические петли гистерезиса для различных амплитуд M_0 и зарегистрирована оптически методом осциллограмма свободных и вынужденных колебаний линзы.

В части II на основе результатов эксперимента определены упругая и frictionальная характеристика контакта.

В части III представлены результаты более знаменательных теоретических работ в области контакта упругих тел. Результаты эксперимента сравнены с теорией.

Summary

THE RESONANCE PHENOMENON FOR ELASTIC BODIES IN CONTACT

The paper is divided into three parts. In part I the experimental investigations are described. A spherical glass lens has been presented to a horizontal elastic plate and then loaded by a twisting moment $M = M_0 \sin \omega t$ turning it around the vertical axis. Varying the frequency ω of the torque and keeping the amplitude M_0 constant, the resonance curves for various values of M_0 have been recorded. These curves show that the elastic characteristics of the contact is strongly non-linear and «soft». For various amplitudes M_0 of the moment, the hysteresis loops have been measured and, using optical methods, the oscillograms of the free and forced vibrations of the lens have been recorded. Part II of the paper contains the analysis of the approximate elastic and frictional characteristics of the contact based upon the experimental results. In part III the results of certain important theoretical works dealing with the contact phenomena of elastic bodies are presented. Theoretical results are then compared with those obtained experimentally.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1970 r.