

PLASTYCZNE SKRĘCANIE NIEJEDNORODNYCH PRĘTÓW O ZMIENNEJ ŚREDNICY

MARIAN GALOS (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Problemowi sprężystego skręcania prętów o zmiennej średnicy poświęcono bardzo wiele prac. Rozwiązanie problemu sprowadza się do znalezienia dwu składowych stanu naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$, jeżeli problem rozwiązywany jest w układzie walcowym (r, θ, z) . Rozwiązano szereg przypadków sprężystego skręcania takich prętów, głównie metodą odwrotną oraz metodami przybliżonymi. Podstawowymi pracami w tej dziedzinie są prace MICHELLA [4], FÖPPLA [2], NEUBERA [5].

Znalezieniem rozkładu naprężeń w strefie plastycznej przy sprężysto-plastycznym skręcaniu takich prętów wykonanych z materiałów sprężyste i plastycznie jednorodnych zajmował się głównie SOKOŁOWSKI [6], [8], który rozwiązał szereg przypadków, jednak w postaci dość trudnej do bezpośredniego zastosowania (np. do rozwiązywania zadania o sprężysto-plastycznym skręcaniu), ponieważ autor znalazł uwikłane równanie charakterystyk.

Problemem rozkładu naprężeń w strefie plastycznej przy skręcaniu prętów plastycznie niejednorodnych dotychczas nie zajmowano się.

Bardzo trudne do rozwiązania jest zadanie o sprężysto-plastycznym skręcaniu prętów o zmiennej średnicy i dowolnym kształcie powierzchni bocznej. Istotną trudność tego zadania polega na tym, że jednocześnie szukamy rozwiązania w strefie sprężystej oraz granicy między strefą sprężystą i plastyczną. Wobec tego dla znalezienia rozwiązania w zakresie sprężystym nie znamy bezpośrednio granicy tej strefy (co za tym idzie i warunków brzegowych). Jakkolwiek w tej dziedzinie rozwiązano szereg przypadków (EDDY, SHAW [1]), to do rozwiązania wykorzystano metody przybliżone (wykreślno-analityczne, energetyczne), których zastosowanie jest bardzo uciążliwe. W rozpatrywanych przez powyższych autorów przykładach przyjęto, że pręty wykonane są z materiałów jednorodnych.

W obecnej pracy zajęto się głównie rozwiązaniem problemu plastycznego skręcania prętów o zmiennej średnicy, wykonanych z materiałów o dowolnej niejednorodności plastycznej (zależnej od zmiennych r, z w układzie walcowym r, θ, z). Stwierdzono mianowicie analogię matematyczną, jaka zachodzi pomiędzy tym problemem a problemem plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych wykonanych z materiałów o dowolnej niejednorodności poprzecznej, który to problem był rozpatrywany w pracy GALOSA [3].

Jeżeli mianowicie do rozważań wprowadzimy funkcję naprężeń Φ spełniającą tożsamościowo warunki równowagi, to rozwiązanie obydwu problemów można sprowadzić do identycznego równania

$$(1.1) \quad |\text{grad } \Phi| = k(x_1, x_2),$$

gdzie przez x_1, x_2 oznaczono w sposób ogólny zmienne w przekroju poprzecznym niejednorodnego pręta pryzmatycznego o dowolnym przekroju lub w przekroju podłużnym pręta o zmiennej średnicy. Podobnie, jak w pracy [3], zajęto się szczegółowo określeniem linii największego spadku funkcji naprężeń (tak w dalszym ciągu nazywać będziemy rzuty tych linii na płaszczyznę r, z przekroju pręta). Warto podkreślić, że linie największego spadku funkcji naprężeń są identyczne z charakterystykami problemu, a zarazem z liniami poślizgu. Na podstawie znalezionych linii największego spadku można określić samą funkcję naprężeń Φ , a następnie rozkład naprężeń.

W pracy podano również metodę projektowania prętów rurowych, które wykazują całkowite uplastycznienie oraz metodę odwrotną rozwiązywania problemu sprężysto-plastycznego skręcania prętów o zmiennej średnicy, która to metoda jest podobna do zastosowanej przez SOKOŁOWSKIEGO [7] przy rozwiązywaniu zagadnienia sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych.

W niniejszej pracy zajęto się również określeniem deformacji strefy plastycznej skręcanego pręta oraz przedstawiono szereg przykładów ilustrujących metody przedstawione w pracy.

2. Podstawowe równania problemu

Problem znalezienia rozkładu naprężeń w strefie plastycznej skręcanego pręta o zmiennej średnicy jest problemem wewnątrznie statycznie wyznaczalnym, zatem rozkład naprężeń nie jest zależny od tego, czy przyjmiemy do rozwiązywania teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych, czy też teorię płynięcia plastycznego.

Jeżeli oś z jest osią pręta (rys. 1), to różne od zera składowe stanu naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ są określone równaniem równowagi wewnętrznej

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} = 0$$

oraz warunkiem plastyczności

$$(2.2) \quad \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\theta r}^2 = k^2(r, z),$$

(gdzie $k(r, z)$ jest granicą plastyczności na ścinanie będącą pewną funkcją zmiennych r i z), przy odpowiednim warunku brzegowym.

Układ równań (2.1) i (2.2) można sprowadzić do jednego równania przez wprowadzenie funkcji naprężeń $\Phi(r, z)$, spełniającej tożsamościowo warunek równowagi (2.1), mianowicie

$$(2.3) \quad \tau_{\theta r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\theta z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Podstawiając zależności (2.3) do równania (2.2), otrzymujemy

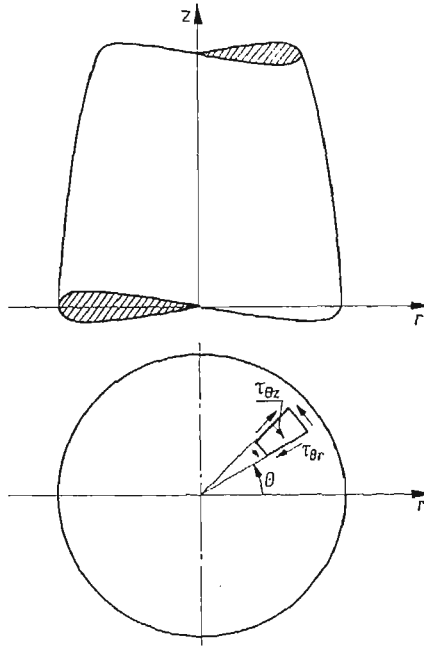
$$(2.4) \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 = r^4 k^2(r, z) = \tilde{k}^2(r, z)$$

lub zapisane w innej postaci

$$(2.5) \quad |\text{grad}\Phi| = \tilde{k}(r, z),$$

gdzie $\tilde{k}(r, z) = r^2 k(r, z)$.

Rozpatrywany problem, jak łatwo zauważyć, daje się zapisać analogicznym równaniem różniczkowym, do problemu plastycznego skręcania prętów przyzmatycznych o dowolnej niejednorodności poprzecznej [3]. Wobec tego, podobnie jak w pracy [3], zajmiemy się określaniem linii największego spadku funkcji Φ (linii poślizgu), a dopiero na tej podstawie określeniem samej funkcji Φ oraz rozkładu naprężeń.



Rys. 1

Równanie różniczkowe linii największego spadku $z = z(r)$ funkcji Φ można w oparciu o wyniki pracy [3] napisać w postaci

$$(2.6) \quad z' \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} = - \frac{z' \tilde{k}(r, z)}{1 + z'^2}.$$

Jeżeli funkcja niejednorodności $\tilde{k}(r, z)$ jest zależna tylko od zmiennej r lub stała, to równanie (2.6) ulega znacznemu uproszczeniu do postaci

$$(2.7) \quad z' \frac{d\tilde{k}}{dr} = - \frac{z' \tilde{k}}{1 + z'^2}.$$

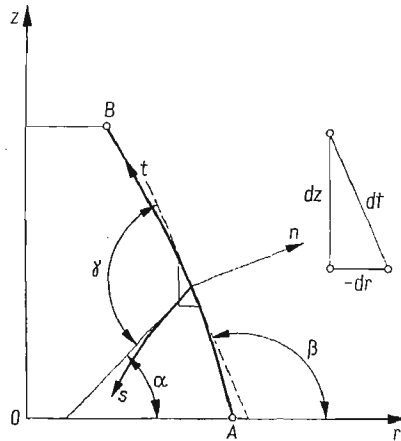
Znalezienie rozwiązania równania (2.7) w kwadraturach jest stosunkowo proste, mianowicie

$$(2.8) \quad z - z_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{Ck^2 - 1}},$$

gdzie r_0, z_0 są współrzędnymi znanego punktu, przez który przechodzi linia największego spadku, zaś C — stała całkowania wynikła z warunku brzegowego.

3. Analiza warunków brzegowych

Przy prętach wykonanych z materiałów jednorodnych uplastycznienie pręta zaczyna się na powierzchni zewnętrznej, a następnie propaguje do wnętrza pręta. Zakładamy dalej, że rozpatrywać będziemy pręty wykonane z materiałów o takiej niejednorodności, która nie zmieni kolejności uplastyczniania. Wobec tego, jeżeli moment skręcający pręt przekroczy wartość nośności sprężystej na całej długości pręta, to będziemy mieć do czynienia z dwiema strefami w przecię: zewnętrzną — plastyczną i wewnętrzną — sprężystą.



Rys. 2

Do wyznaczenia rozkładu naprężeń w strefie plastycznej wystarczająca jest znajomość sposobu obciążenia powierzchni bocznej. Najczęściej powierzchnia ta jest nieobciążona. Zakładamy dalej, że denka pręta są obciążone w taki sposób, jak to wynika z warunków brzegowych danych na powierzchni bocznej pręta oraz rozwiązania uzyskanego przy posuwaniu się wzdłuż linii największego spadku.

Jak już poprzednio zaznaczono, najczęściej spotykanym przypadkiem jest skręcanie prętów o nieobciążonej powierzchni bocznej. Dla tych przypadków można wykazać, że funkcja naprężeń Φ na konturze AB (rys. 2) jest wielkością stałą. Z warunków brzegowych wynika

$$(3.1) \quad p_{n0} = \tau_{\theta r} a_{nr} + \tau_{\theta z} a_{nz} = 0,$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_{nr} &= \cos(n, r) = \frac{dz}{dt}, \\ a_{nz} &= \cos(n, z) = -\frac{dr}{dt}, \end{aligned}$$

(dt — elementarna długość łuku konturu).

Po podstawieniu (3.2) i (2.3) do (3.1) oraz po przekształceniach otrzymujemy

$$(3.3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

co dowodzi twierdzenia.

Mogą zachodzić także i przypadki, gdy funkcja naprężeń Φ nie jest stała wzdłuż pewnego odcinka, mianowicie wtedy, gdy powierzchnia boczna pręta jest obciążona lub w przypadku analizy warunków ciągłości na granicy pomiędzy strefą sprężystą i plastyczną, przy rozwiązywaniu problemu metodą odwrotną (która to metoda zostanie przedstawiona w następnych rozdziałach niniejszej pracy).

Dlatego w dalszym ciągu rozpatrywać będziemy przypadek ogólny, gdy funkcja naprężeń Φ na pewnym odcinku AB jest zmienna. Zakładamy, że dla danej funkcji niejednorodności znane jest rozwiązanie równania różniczkowego linii największego spadku w postaci ogólnej (całka ogólna równania różniczkowego (2.6), zawierająca dwie stałe całkowania). Niechaj dalej na pewnym odcinku AB o równaniu $z = z_1(t)$, $r = r_1(t)$ jest dana wartość funkcji naprężeń $\Phi(t)$. Dla każdego punktu M leżącego na odcinku AB i określonego parametrem $t = t_M$, można określić pochodną kierunkową $\frac{d\Phi}{dt}$ (o ile oczywiście funkcja $\Phi(t)$ jest różniczkowalna). Musi być przy tym spełniony warunek

$$(3.4) \quad \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \leq |\text{grad } \Phi|.$$

Z analizy wektorowej wynika, że

$$(3.5) \quad \cos \gamma_M = \frac{\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_M}{|\text{grad } \Phi|_M},$$

gdzie kąt γ_M jest kątem zawartym pomiędzy styczną do konturu w punkcie M , a styczną do linii największego spadku funkcji naprężeń Φ w tym punkcie.

Ponieważ współczynnik kierunkowy stycznej do linii największego spadku przechodzącej przez punkt M jest (jak to wynika z rys. 2) równy

$$(3.6) \quad z'_M = \text{tg}(\gamma + \zeta) = \frac{\text{tg} \gamma + \text{tg} \zeta}{1 - \text{tg} \gamma \text{tg} \zeta},$$

więc po uwzględnieniu (2.5) oraz

$$(3.7) \quad \text{tg} \zeta = \frac{dz_1}{dt} \bigg/ \frac{dr_1}{dt}$$

i wykonaniu prostych przekształceń, otrzymujemy ostatecznie

$$(3.8) \quad \operatorname{tg} \alpha_M = z'_M = \frac{\frac{d\Phi}{dt} \frac{dz_1}{dt} + \frac{dr_1}{dt} \sqrt{\tilde{k}^2(r, z) - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2}}{\frac{d\Phi}{dt} \frac{dr_1}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \sqrt{\tilde{k}^2(r, z) - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2}} \Bigg|_M.$$

Z powyższych rozważań wynika, że warunki brzegowe dla linii największego spadku przechodzącej przez punkt M będą następujące:

$$(3.9) \quad \text{dla } t = t_M: \quad r = r_M; \quad z = z_M; \quad z' = z'_M.$$

Warunki te pozwalają na określenie obydwu stałych całkowania.

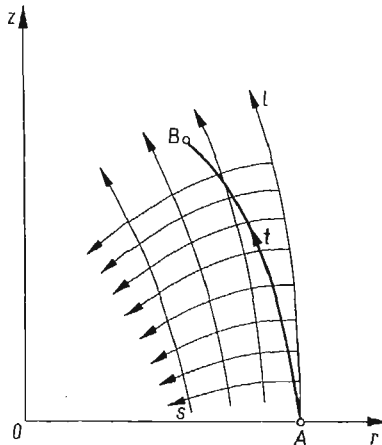
Jeżeli rozpatrywać będziemy kontur nieobciążony, dla którego $t = \text{const}$, to warunki brzegowe ulegną uproszczeniu do postaci

$$(3.10) \quad \text{dla } t = t_M: \quad r = r_M; \quad z = z_M; \quad z' = z'_M = - \frac{dr_1}{dt} \Bigg|_M \frac{dz_1}{dt} \Bigg|_M,$$

co jest równoznaczne z warunkiem prostokątowości linii największego spadku do rozpatrywanego konturu AB .

4. Określanie funkcji naprężeń

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy z krzywoliniowego układu współrzędnych s, l . Układ jest tak dobrany, że jedna rodzina krzywych współrzędnych s jest rodziną linii największego spadku, zaś druga rodzina współrzędnych l — pewną rodziną krzywych



Rys. 3

przecinających krzywe s . Współrzędna l zmienia się wraz ze zmianą punktu M leżącego na rozpatrywanym odcinku konturu AB (rys. 3). Układ współrzędnych s, l może być na ogół dowolnym, ukośnokątnym układem współrzędnych krzywoliniowych określających jednak w sposób jednoznaczny cały rozpatrywany podobszar przekroju pręta. Układ

s, l jest dobierany dla każdego zadania w ten sposób, aby obliczenia były możliwie najprostsze.

Funkcję naprężeń Φ określimy znając linie największego spadku w postaci całek ogólnych (określonych dla danej niejednorodności materiału) oraz warunki brzegowe.

Przedstawimy linie największego spadku w postaci parametrycznej (już po uwzględnieniu warunków brzegowych), jako rodzinę krzywych

$$(4.1) \quad r = r(s, l), \quad z = z(s, l),$$

gdzie s jest parametrem wyznaczającym punkt krzywej, natomiast l — parametrem wyznaczającym krzywą (stałym dla danej krzywej).

W dalszym ciągu szukać będziemy funkcji naprężeń Φ zależnej od parametrów s i l . Dla określenia funkcji Φ wykorzystana zostanie zależność (2.5) w nieco zmienionej postaci

$$|\text{grad } \Phi| = \left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = \tilde{k}(r, z),$$

która stwierdza, że przyrost funkcji naprężeń na linii największego spadku jest proporcjonalny do $|\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z)$ oraz do przyrostu długości linii największego spadku dm ,

$$(4.2) \quad d\Phi = \tilde{k}(r, z) dm.$$

Po przedstawieniu niejednorodności w postaci $\tilde{k} = \tilde{k}(s, l)$, wyrażenie na przyrost funkcji Φ wzdłuż linii największego spadku można zapisać następująco

$$(4.3) \quad \Phi(s_P, l_M) - \Phi(s_M, l_M) = \int_M^P \tilde{k}(s, l_M) dm.$$

Dla przypadku konturu nieobciążonego przyjmujemy, że na konturze $\Phi_K = C = \text{const}$ i otrzymujemy

$$(4.4) \quad \Phi(s_P, l_M) - C = \int_M^P \tilde{k}(s, l_M) dm.$$

5. Określenie rozkładu naprężeń

W rozdziale poprzednim określiliśmy funkcję naprężeń Φ . Obecnie wykorzystując wyniki poprzedniego rozdziału określimy rozkład naprężeń z zależności (2.3)

$$\tau_{\theta r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\theta z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Ponieważ poprzednio szukaliśmy Φ jako funkcji współrzędnych krzywoliniowych s, l , dlatego także i naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ łatwiej będzie określić jako funkcję współrzędnych s, l . W tym celu należy wykonać transformację zależności (2.3) ze współrzędnych r, z na współrzędne s, l .

Równanie rodziny linii największego spadku przedstawione było wzorami (4.1)

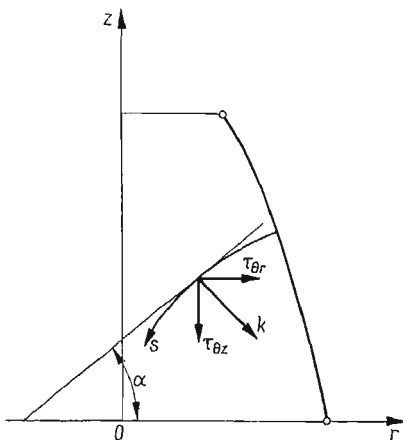
$$r = r(s; l), \quad z = z(s; l),$$

zatem pochodne funkcji naprężeń $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ można zapisać

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial l} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}. \end{aligned}$$

Ponieważ w naszym przypadku dana jest funkcja $\Phi = \Phi(s, l)$ oraz wzory (4.1), więc w równaniach (5.1) niewiadomymi są $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Wartości tych pochodnych można określić rozwiązując układ równań (5.1). Po wstawieniu obliczonych wartości $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ oraz $r(s, l)$ do (2.3) otrzymujemy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tau_{0r}(s, l) &= \frac{1}{r^2(s, l)} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial l}}{\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial l}{\partial r}}, \\ \tau_{0z}(s, l) &= \frac{1}{r^2(s, l)} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial \Phi}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial s}}{\frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial l}{\partial r}}. \end{aligned}$$



Rys. 4

Analogiczne wyniki dla naprężeń τ_{0r} i τ_{0z} możemy otrzymać na innej drodze, mianowicie, jeżeli z rys. 4 określimy zależność

$$(5.3) \quad \tau_{0r} = k(s, l) \sin \alpha, \quad \tau_{0z} = -k(s, l) \cos \alpha,$$

gdzie kąt α jest kątem zawartym pomiędzy osią r a styczną do linii największego spadku w danym punkcie.

Jeżeli udałoby się znaleźć zależność odwrotną do (4.1)

$$(5.4) \quad s = s(r; z), \quad l = l(r; z),$$

to można byłoby określić funkcję naprężeń jako $\Phi(r, z)$, a dalej, korzystając z (2.3), określić naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ w funkcji współrzędnych r, z , co jest bardziej korzystne od (5.2), ze względu na często spotykane ograniczenia prętów powierzchniami $z = \text{const}$; łatwo jest wtedy, dla powierzchni $z = \text{const}$ określić interesujący nas rozkład naprężeń.

6. Deformacja prętów

Przy rozpatrywaniu zadania skręcania prętów o zmiennej średnicy korzysta się z metody półodwrotnej, która zakłada, że przemieszczenia u i w w kierunkach osi r i z są równe zeru, natomiast przemieszczenie v w kierunku θ jest różne od zera. Przy takim założeniu, różne od zera składowe stanu odkształcenia można przedstawić wzorami

$$(6.1) \quad \gamma_{\theta r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right); \quad \gamma_{\theta z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right).$$

Jeżeli dalej przyjmować będziemy, że pręt wykonany jest z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, to z prawa zmiany postaci Prandtla–Reussa oraz z warunków ciągłości pomiędzy strefą sprężystą i plastyczną wynika, że dla strefy plastycznej zachodzi zależność

$$(6.2) \quad \frac{\tau_{\theta r}}{\tau_{\theta z}} = \frac{\gamma_{\theta r}}{\gamma_{\theta z}} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right)}{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right)}.$$

Jeżeli dalej uwzględnimy, że z rys. 4 wynikają związki (5.3)

$$\tau_{\theta r} = k(s, l) \sin \alpha, \quad \tau_{\theta z} = -k(s, l) \cos \alpha,$$

to otrzymamy zależność, określającą funkcję $\frac{v}{r}$ na linii największego spadku, mianowicie

$$(6.3) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) dz + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) dr = 0;$$

funkcja $\left(\frac{v}{r} \right)$ jest więc stała na linii największego spadku.

Dla strefy sprężystej obowiązuje

$$(6.4) \quad \gamma_{\theta r} = \frac{1}{G} \tau_{\theta r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G} \tau_{\theta z}.$$

Jeżeli rozpatruje się zmianę funkcji $\frac{v}{r}$ na granicy Γ między strefą sprężystą, a plastyczną, to przy oznaczeniu elementu długości tej granicy przez $d\kappa$, można napisać

$$(6.5) \quad \frac{d \left(\frac{v}{r} \right)}{d\kappa} = \frac{\partial \left(\frac{v}{r} \right)}{\partial r} \frac{dr}{d\kappa} + \frac{\partial \left(\frac{v}{r} \right)}{\partial z} \frac{dz}{d\kappa},$$

a po uwzględnieniu (6.4)

$$(6.6) \quad \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{d\kappa} = \frac{1}{Gr} \left(\tau_{\theta r} \frac{dr}{d\kappa} + \tau_{\theta z} \frac{dz}{d\kappa} \right).$$

Gdy dana jest wartość funkcji $\frac{v}{r}$ w pewnym punkcie R_0 na linii granicznej Γ , to wartość $\frac{v}{r}$ dla punktu R leżącego na tej samej linii granicznej możemy obliczyć całkując wyrażenie (6.6) wzdłuż linii Γ

$$(6.7) \quad \left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0} = \frac{1}{G} \int_{R_0}^R \frac{1}{r} (\tau_{\theta r} dr + \tau_{\theta z} dz).$$

Wzór powyższy wykorzystany zostanie w dalszej części pracy przy rozwiązywaniu konkretnych przykładów.

7. Przykład plastycznego skręcania niejednorodnego pręta o zmiennej średnicy

Rozpatrzmy obecnie przykład skręcania pręta wykonanego z materiału niejednorodnego o niejednorodności liniowej

$$(7.1) \quad k(r, z) = k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z}{z_0} - \frac{1}{2} \frac{r}{r_0} \right),$$

gdzie k_0, z_0, r_0 są pewnymi wielkościami stałymi.

Niejednorodność zastępczą dla tego materiału można wyrazić wzorem

$$(7.2) \quad \tilde{k}(r, z) = k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z}{z_0} - \frac{1}{2} \frac{r}{r_0} \right) r^2.$$

Rozwiązywanie problemu określania naprężeń w strefie plastycznej rozpoczniemy od określania linii największego spadku funkcji naprężeń Φ . Po wstawieniu do równania (2.6) funkcji niejednorodności (7.2), równanie różniczkowe linii największego spadku ma postać

$$(7.3) \quad (1+z'^2) \left[z' \left(4 - 2 \frac{z}{z_0} - 3 \frac{r}{r_0} \right) + \frac{r}{r_0} \right] r = -z'' \left(2 - \frac{z}{z_0} - \frac{r}{r_0} \right) r^2.$$

Równanie rodziny linii największego spadku funkcji naprężeń określone w postaci $z = z(s; l)$ przedstawimy w postaci szeregu potęgowego. Z uwagi na osobliwość równania dla $r = 0$ oraz z uwagi na to, że warunki brzegowe dane są na konturze, wygodnie jest wprowadzić zmienną s

$$(7.4) \quad s = r(l) - \varrho(l),$$

gdzie $\varrho = \varrho(l)$ jest promieniem konturu pręta. Parametr l będzie określał położenie punktu na konturze.

Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci szeregu

$$(7.5) \quad z = a_0(l) + a_1(l)s + a_2(l)s^2 + \dots$$

Po podstawieniu (7.4) i (7.5) do (7.3), wykonaniu działań i porównaniu współczynników przy jednakowych potęgach s po obu stronach równania otrzymujemy układ równań liniowych, z których można wyrazić współczynniki a_2, a_3, a_4, \dots , przez a_0 i a_1 (które wynikają z warunków brzegowych).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do określenia współczynników a_2 i a_3 ,

$$(7.6) \quad a_2 = - \frac{(1+a_1^2) \left[a_1 \left(4 - 2 \frac{a_0}{z_0} - 3 \frac{\rho}{r_0} \right) + \frac{\rho}{z_0} \right]}{2\rho \left(2 - \frac{a_0}{z_0} - \frac{\rho}{r_0} \right)},$$

$$a_3 = a_2 \frac{-6 + 5 \frac{\rho}{r_0} + 3 \frac{a_0}{z_0} - a_1 \frac{\rho}{z_0} + a_1^2 \left(-12 + 6 \frac{a_0}{z_0} + 9 \frac{\rho}{r_0} \right)}{3\rho \left(2 - \frac{a_0}{z_0} - \frac{\rho}{r_0} \right)}$$

$$- \frac{(1+a_1^2) \left[a_1 \left(-2 \frac{a_1}{z_0} - 3 \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{z_0} \right]}{6\rho \left(2 - \frac{a_0}{z_0} - \frac{\rho}{r_0} \right)}.$$

Założmy, że powierzchnia boczna pręta (rys. 4) dana jest równaniem

$$(7.7) \quad z = l(\rho);$$

wobec tego warunki brzegowe dla tej nieobciążonej powierzchni możemy zapisać w postaci

$$(7.8) \quad \text{dla } s = 0: \quad z = l, \quad z' = \frac{1}{l'(\rho)}.$$

Jeżeli wstawimy powyższe warunki do szeregu (7.5), to natychmiast określimy współczynniki szeregu a_0 i a_1

$$(7.9) \quad a_0 = 1, \quad a_1 = - \frac{1}{l'(\rho)},$$

a przy znajomości tych współczynników można z (7.6) określić dalsze współczynniki szeregu a_2 i a_3 .

Przykładowo przyjęto, że kształt powierzchni bocznej jest stożkiem o równaniu

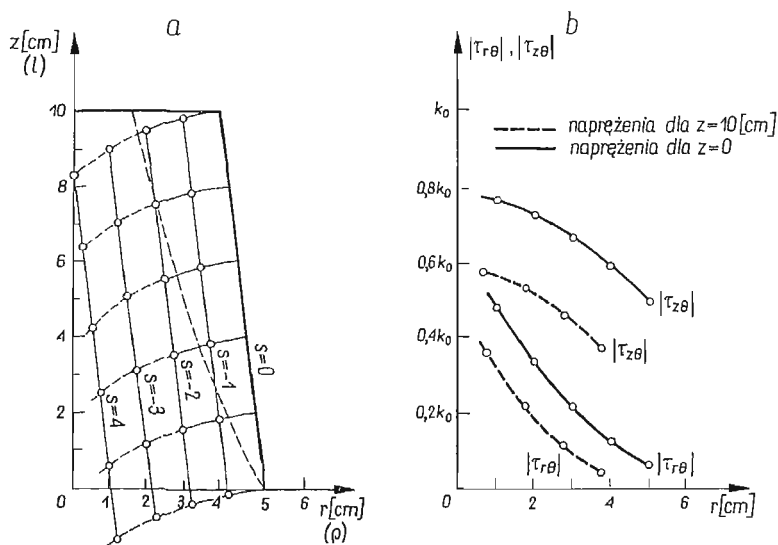
$$(7.10) \quad l = 2z_0 \left(1 - \frac{\rho}{r_0} \right);$$

wtedy

$$(7.11) \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{r_0}{z_0} = \text{const.}$$

Przeprowadzono numeryczne obliczenia dla $r_0 = 5$ [cm], $z_0 = 20$ [cm], przy czym pręt ograniczono płaszczyznami $z = 0$, $z = 10$ [cm]. W tabelicy 1 podano wartości obliczonych współczynników a_2 i a_3 dla szeregu wartości parametru l . Na rys. 5 przedstawiono orientacyjny przebieg linii największego spadku funkcji naprężeń Φ (ograniczono się do wyrazów przy trzeciej potęgze s).

Z analizy wzoru (7.5) i obliczonych współczynników wynika, że zadowalająca zbieżność przy przyjętej ilości wyrazów szeregu istnieje w rozważanym przykładzie w zakresie $0,7 \leq \frac{r}{\rho} \leq 1$, natomiast przy mniejszym stosunku $\frac{\rho}{r}$ zbieżność szeregu pogarsza się i od pewnej wartości jest on rozbieżny. Wynika to z faktu, że linie największego spadku w pew-



Rys. 5

nym miejscu ulegają zagięciu i istnieje punkt na linii największego spadku, w którym wartość $z \rightarrow \infty$. Dla prętów wykonanych z materiałów jednorodnych, zostało to przedstawione przez SOKOŁOWSKIEGO [8]. W naszym przypadku, gdy znajdujemy rozwiązanie równania (7.3) w postaci szeregu potęgowego, uchwycenie tego zjawiska wydaje się utrudnione; jednakże w warunkach rzeczywistych strefa plastyczna znajduje się w dość dużym oddaleniu od punktów zagięcia linii największego spadku, wobec czego rozwiązanie równania (7.3) przedstawione w postaci szeregu (7.5) jest wystarczająco dokładne i dogodne przy rozpatrywaniu problemu sprężysto-plastycznego skręcania prętów niejednorodnych.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń numerycznych przedstawiono na rys. 5 rozkłady naprężeń $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ w strefie plastycznej na denkach pręta. Granicę między strefą sprężystą i plastyczną (orientacyjnie przedstawioną linią przerywaną na rys. 5a) oraz rozkład naprężeń w strefie sprężystej moglibyśmy określić rozwiązując problem sprężysto-plastycznego skręcania pręta — co jest jednak zadaniem bardzo trudnym.

Tablica 1

/ [cm]	ρ [cm]	a_1	$a_2 \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$	$a_3 \left[\frac{1}{\text{cm}^2} \right]$	$z(s, l)$ [cm]				
					$s = 0$	$s = -1$ [cm]	$s = -2$ [cm]	$s = -3$ [cm]	$s = -4$ [cm]
0	5,000	0,125	-0,038085	0,0036366	0,000	-0,167	-0,431	-0,816	-1,342
1	4,875	0,125	-0,039063	0,0038256	1,000	0,832	0,563	0,170	-0,370
2	4,750	0,125	-0,040089	0,0040295	2,000	1,831	1,557	1,155	0,000
3	4,625	0,125	-0,041175	0,0042503	3,000	2,791	2,551	2,140	1,570
4	4,500	0,125	-0,042318	0,0044814	4,000	3,828	3,545	3,123	2,536
5	4,375	0,125	-0,043527	0,004750	5,000	4,827	4,538	4,105	3,500
6	4,250	0,125	-0,044808	0,0050334	6,000	5,825	5,530	5,086	4,361
7	4,125	0,125	-0,046164	0,0053431	7,000	6,823	6,525	6,065	5,419
8	4,000	0,125	-0,047607	0,0056773	8,000	7,822	7,514	7,043	6,375
9	3,875	0,125	-0,049143	0,0060548	9,000	8,820	8,505	8,019	7,326
10	3,750	0,125	-0,05078	0,0064652	10,000	9,818	9,495	8,993	8,274
11	3,625	0,125	-0,05253	0,0069187	11,000	10,816	10,485	9,965	9,217

8. Projektowanie prętów rurowych o zmiennej średnicy, wykazujących całkowite uplastycznienie

W rozdziale obecnym zajmiemy się projektowaniem prętów rurowych o zmiennej średnicy, wykonanych z materiału niejednorodnego, z uwagi na stałą na całej długości nośność graniczną przekroju (całkowite uplastycznienie przekroju).

Założmy, że z materiału o dowolnej niejednorodności typu $k(r, z)$, wykonany jest pręt o przekroju rurowym i danej powierzchni wewnętrznej (np. ze względów konstrukcyjnych), którą można przedstawić wzorem

$$(8.1) \quad z = l(\varrho),$$

gdzie l jest parametrem konturu.

Należy tak dobrać kształt powierzchni zewnętrznej, aby przy danym momencie skręcającym nastąpiło całkowite uplastycznienie pręta. Pręt taki jest zaprojektowany najbardziej ekonomicznie, bowiem cały jego materiał jest wykorzystany.

Jeżeli wprowadzimy do rozważań funkcję naprężeń $\bar{\Phi}$ (2.3), to związek między funkcją naprężeń a momentem granicznym skręcającym pręt $\bar{\bar{M}}$ można zapisać jako

$$(8.1) \quad \bar{\bar{M}} = 2\pi(\bar{\Phi}_z - \bar{\Phi}_w),$$

gdzie $\bar{\Phi}_z$ jest wartością funkcji naprężeń, odpowiadającą powierzchni zewnętrznej pręta, a $\bar{\Phi}_w$ jest wartością funkcji naprężeń, odpowiadającą powierzchni wewnętrznej pręta.

Jeżeli powierzchnia zewnętrzna i wewnętrzna są nieobciążone, to zgodnie z (3.3) $\bar{\Phi}_z$ i $\bar{\Phi}_w$ są stałe na odpowiednich konturach. Ponieważ pręt jest optymalnie zaprojektowany z uwagi na nośność graniczną, więc po obciążeniu pręta momentem granicznym $\bar{\bar{M}}$, cały materiał ulegnie uplastycznieniu. Wychodząc wobec tego od danej np. powierzchni wewnętrznej możemy, wykorzystując równanie linii największego spadku funkcji $\bar{\Phi}$, znaleźć rozkład naprężeń oraz funkcję $\bar{\Phi}$ w przecie. Jeżeli mamy do czynienia z nieobciążoną powierzchnią wewnętrzną, to możemy przyjąć $\bar{\Phi}_w = 0$. Wobec takiego przyjęcia, funkcja naprężeń $\bar{\Phi}$ będzie określona zgodnie z (4.4) wzorem

$$\bar{\Phi} = \int_M^P \tilde{k} dm,$$

gdzie dm jest elementarnym przyrostem linii największego spadku

$$(8.2) \quad dm = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} ds.$$

Gdy powierzchnia zewnętrzna jest nieobciążona, to $\bar{\Phi}_z = C = \text{const}$, wobec czego możemy dla danej powierzchni wewnętrznej oraz dla danej funkcji niejednorodności $k = k(r, z)$ określić rodzinę poszukiwanych nieobciążonych powierzchni zewnętrznych rozwiązując równanie

$$(8.3) \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(s, l) = C,$$

a równanie powierzchni zewnętrznej można wyrazić w postaci parametrycznej

$$(8.4) \quad r = r(l, C), \quad z = z(l, C).$$

Analogicznie możemy postąpić, gdy problem zostanie postawiony odwrotnie, czyli przy danym kształcie powierzchni zewnętrznej poszukuje się kształtu powierzchni wewnętrznej. Jednakże w tym przypadku problem może okazać się nie do rozwiązania: gdy założony moment skręcający \bar{M} będzie za duży, to linie największego spadku funkcji naprężeń dojdą do punktu w którym występuje osobliwość, mianowicie linie największego spadku zaginają się (patrz rozdział poprzedni). Gdy mamy do czynienia z prętem o obciążonej powierzchni bocznej, to ulegną zmianie jedynie warunki brzegowe na tej powierzchni.

P r z y k ł a d. Rozpatrzono najprostszy fizycznie przypadek, gdy pręt jest wykonany z materiału jednorodnego. Jeżeli będziemy mieli do czynienia z materiałem o innej, dowolnej niejednorodności plastycznej, to może to jedynie komplikować obliczenia, a sama zasada projektowania nie ulegnie zmianie.

Dla naszego materiału niejednorodność zastępcza ma postać

$$(8.5) \quad \tilde{k} = k_0 r^2.$$

Równanie różniczkowe linii największego spadku (2.6) przybierze postać

$$(8.6) \quad (1+z'^2)z' \frac{d\tilde{k}}{dr} = -z''\tilde{k},$$

a po obniżeniu rzędu równania

$$(8.7) \quad z' = \pm \sqrt{\frac{1}{Cr^4 - 1}},$$

gdzie C jest stałą całkowania.

Rozwiązanie równania (8.7) można wyrazić przez całki eliptyczne. Jednakże wygodniej szukać jest rozwiązania w postaci szeregu potęgowego, rozwijając rozwiązanie wokół punktów położonych na danym konturze np. wewnętrznym. Wprowadźmy w tym celu nową zmienną (7.4)

$$s = r(l) - \varrho(l),$$

gdzie ϱ jest promieniem danego konturu pręta.

Rozwiązania równania (8.7) szukać będziemy w postaci

$$(8.8) \quad z = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$$

Jeżeli szereg (8.8) podstawimy do równania (8.7), to przez przyrównanie wyrazów przy jednakowych potęgach s , możemy określić współczynniki

$$(8.9) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{C\varrho^2 - 1}}, & a_2 &= -\frac{a_1}{\varrho}(1+a_1^2), \\ a_3 &= \frac{a_1}{\varrho^2}(1+a_1^2)(1+2a_1^2), & a_4 &= \dots \end{aligned}$$

Dla rozważanego przypadku, warunki brzegowe można ogólnie przedstawić w postaci (7.8)

$$\text{dla } s=0 \quad [\varrho = \varrho(l)]: \quad z = l, \quad z' = -\frac{1}{r'(\varrho)}.$$

Dla takich warunków, współczynniki a_0 i a_1 szeregu (8.8) są odpowiednio równe

$$(8.10) \quad a_0 = l, \quad a_1 = -\frac{1}{l'(\varrho)}.$$

Współczynniki powyższe określają pozostałe współczynniki: a_2, a_3, \dots , które ponadto są na ogół zależne od parametru konturu l .

Jeżeli w dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, gdy dana powierzchnia wewnętrzna pręta jest powierzchnią stożkową o równaniu

$$(8.11) \quad z - z_0 = l - z_0 = -\frac{\varrho}{n},$$

(gdzie z_0 i n są wielkościami stałymi), to współczynniki szeregu (8.8) wyniosą

$$a_0 = l, \quad a_1 = n, \quad a_2 = -\frac{n(1+n^2)}{\varrho}, \quad a_3 = \frac{n(1+n^2)(1+2n^2)}{\varrho^2}, \quad a_4 = \dots$$

Tablica 2

l [cm]	ϱ [cm]	$z(l, s)/\Phi(l, s)$ [cm/kGcm]				
		$s = 0$ [cm]	$s = 0,5$ [cm]	$s = 1$ [cm]	$s = 1,5$ [cm]	$s = 2,0$ [cm]
0	5,00	0,00 0,0 k_0	-0,22 15,5 k_0	-0,41 34,0 k_0	-0,60 55,4 k_0	-0,60 80,0 k_0
3	6,50	3,00 0,0 k_0	2,77 25,4 k_0	2,57 54,5 k_0	2,39 87,2 k_0	2,21 123,5 k_0
6	8,00	6,00 0,0 k_0	5,77 37,9 k_0	5,56 80,1 k_0	5,38 126,5 k_0	5,20 177,2 k_0
9	9,50	9,00 0,00 k_0	8,75 52,9 k_0	8,56 110,7 k_0	8,36 173,4 k_0	8,18 240,9 k_0
12	11,00	12,0 0,0 k_0	11,76 70,4 k_0	11,55 146,3 k_0	11,35 227,8 k_0	11,17 314,7 k_0
15	12,50	15,00 0,0 k_0	14,76 90,4 k_0	14,54 187,0 k_0	14,34 289,7 k_0	14,15 398,6 k_0
18	14,00	18,00 0,0 k_0	17,76 113,0 k_0	17,54 232,7 k_0	17,33 359,2 k_0	17,14 492,5 k_0

Funkcję naprężeń Φ określimy wykorzystując zależności (4.4) i (8.2). Po wykonaniu przekształceń, otrzymujemy wzór określający funkcję naprężeń Φ w postaci szeregu potęgowego, mianowicie

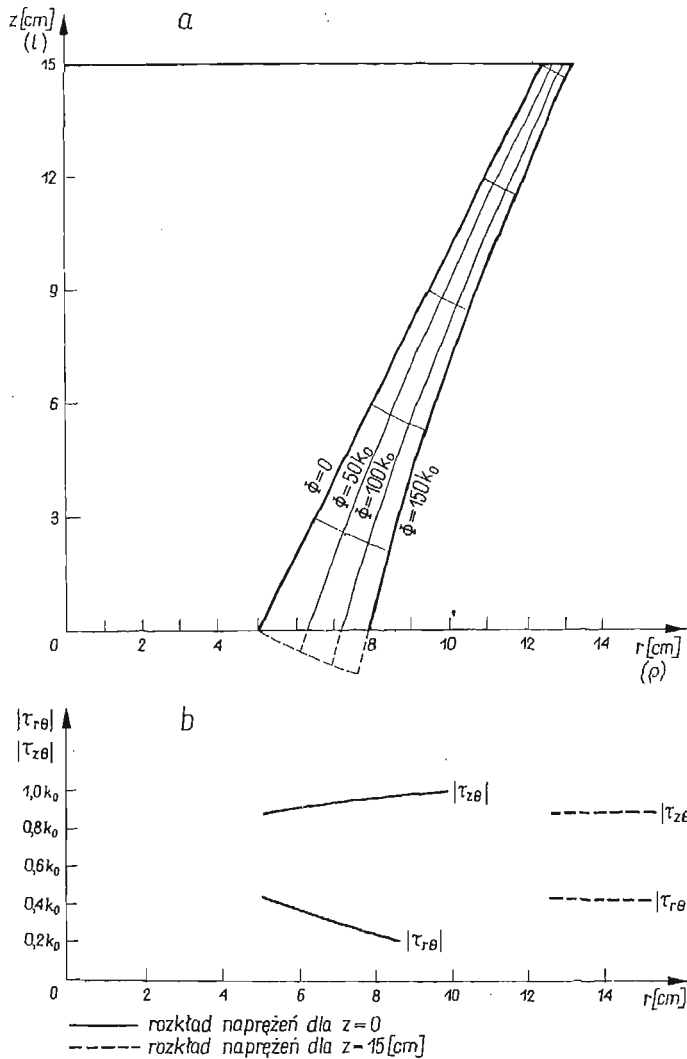
$$\Phi = k_0 \sqrt{1+n^2} \left[\varrho^2 s + \varrho(1+n^2)s^2 + \frac{1+2n^2+7n^4+6n^6}{1+n^2} s^3 + \dots \right].$$

Ponieważ szukamy nieobciążonej powierzchni zewnętrznej pręta przenoszącego moment \bar{M} , więc z zależności (8.1) można określić wartość funkcji naprężeń Φ_z , a dalej z zależności

$$\Phi_z = \Phi_z(s, l), \quad z = z(s, l),$$

szukaną powierzchnię nieobciążoną w postaci $s = s(l)$.

Wykonano obliczenia numeryczne dla pręta o powierzchni wewnętrznej określonej wzorem (8.11), przy czym $n = \frac{1}{2}$, $z_0 = -20$ [cm], ograniczonego płaszczyznami $z = 0$, $z = 15$ [cm]. Wyniki obliczeń $z = z(s, l)$, $\Phi = \Phi(s, l)$ dla szeregu wartości s i l przed-



Rys. 6

stawiono w tabl. 2. Na rys. 6 przedstawiono linie największego spadku funkcji Φ oraz rodzinę nieobciążonych powierzchni zewnętrznych (które są oczywiście powierzchniami $\Phi = \text{const}$).

D e f o r m a c j a p r ę t a. Uplastycznienie pręta rozpocznie się od powierzchni zewnętrznej, a następnie będzie posuwać się do wewnątrz pręta. W chwili wyczerpania nośności plastycznej pręta, ulega uplastycznieniu warstwa przy powierzchni wewnętrznej. W tym

momencie na powierzchni wewnętrznej pręta obowiązywać będzie wzór (6.7), na podstawie którego zostanie określona deformacja $\left(\frac{v}{r}\right)$ pręta.

Jeżeli powierzchnia wewnętrzna jest dana wzorem

$$\varrho = \varrho(l)$$

[odwrócona zależność (7.7)], to równanie (6.7) przyjmie postać,

$$\left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0} = \frac{1}{G} \int_{R_0}^R \frac{1}{\varrho} (\tau_{\theta r} d\varrho + \tau_{\theta z} dl),$$

przy czym na powierzchni wewnętrznej przekroju (rys. 6) obowiązują zależności

$$\tau_{\theta r} = k(l) \sin \alpha(l), \quad \tau_{\theta z} = -k(l) \cos \alpha(l), \quad d\varrho = -dl \operatorname{tg} \alpha(l).$$

Po uwzględnieniu tych zależności otrzymujemy

$$\left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0} = -\frac{1}{G} \int_{R_0}^R \frac{k(l) dl}{\varrho(l) \cos \alpha(l)}.$$

W rozpatrywanym przykładzie interesujące nas dane były następujące:

$$k(l) = k_0 = \text{const}, \quad \operatorname{tg} \alpha(l) = n = -\frac{1}{2}, \quad z_0 = -20 \text{ [cm]}.$$

Jeżeli przyjmiemy dalej, że punkt powierzchni wewnętrznej określony parametrem $l = 0$ jest ustalony, to deformacja powierzchni wewnętrznej pręta jest równa

$$\frac{v}{\varrho(l)} = \frac{k_0}{G} \ln \left(1 - \frac{l}{z_0}\right).$$

Ponieważ, jak to wynika ze wzoru (6.3), linie największego spadku funkcji naprężeń Φ są zarazem poziomiami funkcji $\left(\frac{v}{r}\right)$, więc deformację całego pręta (w chwili wyczerpania nośności plastycznej) można już łatwo obliczyć wychodząc ze znanych deformacji na powierzchni wewnętrznej.

9. Metoda odwrotna rozwiązywania zagadnienia sprężysto-plastycznego

Ponieważ ściśle rozwiązanie problemu sprężysto-plastycznego skręcania niejednorodnych plastycznie prętów o zmiennej średnicy metodą wprost jest bardzo trudne, w obecnym rozdziale pracy przedstawiono metodę odwrotną rozwiązania tego problemu.

Przyjmijmy mianowicie, że znany jest nam rozkład naprężeń w strefie sprężystej, na przykład przez funkcję naprężeń

$$(9.1) \quad \Phi^e = \Phi^e(r, z),$$

która w przypadku ciał sprężystości jednorodnych spełnia równanie

$$(9.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi^e}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial z^2} = 0,$$

czyli tak warunki równowagi, jak i warunki nierozdzielności.

Jeżeli dla danego ciała określona jest funkcja niejednorodności plastycznej $k = k(r, z)$, to można określić granicę między strefą sprężystą i plastyczną równaniem

$$(9.3) \quad r_g = r_g(z),$$

które znajdziemy, wykorzystując w tym celu warunek plastyczności słuszny dla zakresu sprężystego na granicy międzystrefowej

$$(9.4) \quad \left(\frac{\partial\Phi^e}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi^e}{\partial r}\right)^2 = k^2(r, z)r^4 = \tilde{k}^2(r, z).$$

Na granicy międzystrefowej muszą być spełnione również warunki ciągłości naprężeń

$$(9.5) \quad \text{dla } r = r_g: \quad \tau_{\theta z}^e = \tau_{\theta z}^p, \quad \tau_{\theta r}^e = \tau_{\theta r}^p,$$

co jest równoważne związkom

$$(9.6) \quad \frac{\partial\Phi^e}{\partial r} = \frac{\partial\Phi^p}{\partial r}, \quad \frac{\partial\Phi^e}{\partial z} = \frac{\partial\Phi^p}{\partial z}.$$

Przyjmijmy dalej, że na granicy międzystrefowej funkcja naprężeń Φ jest ciągła

$$(9.7) \quad \Phi^e = \Phi^p \quad \text{dla } r = r_g.$$

Przy znajomości granicy międzystrefowej oraz wartości funkcji naprężeń na tej granicy, można określić warunki brzegowe dla rodziny linii największego spadku funkcji naprężeń w obszarze plastycznym Φ^p , a dalej — przy znajomości linii największego spadku funkcji naprężeń — rozkład naprężeń w strefie plastycznej. Dalszym zadaniem przedstawionej metody będzie określenie kształtu nieobciążonej powierzchni zewnętrznej pręta (przy danym momencie skręcającym) lub też znalezienie obciążenia powierzchni zewnętrznej (przy danym jej kształcie). Należy jednak zaznaczyć, że jeżeli pręt o określonej w ten sposób powierzchni zewnętrznej obciążać będziemy danym momentem skręcającym, to rozkład naprężeń w strefie sprężystej oraz granica międzystrefowa mogą się różnić od obliczonych powyższą metodą. Obydwa rozwiązania będą identyczne wtedy, gdy na denkach pręta będą spełnione odpowiednie warunki brzegowe mianowicie, jeśli rozkład naprężeń będzie taki, jak to wynika z rozwiązania problemu metodą odwrotną, oraz gdy sposób obciążenia będzie prosty lub też zbliżony do prostego.

P r z y k ł a d. Rozpatrzmy przykładowo pręt wykonany z materiału jednorodnego (przyjęcie materiału niejednorodnego w niczym nie zmieni metody rozwiązywania, a jedynie może utrudnić obliczenia). Załóżmy dalej, że funkcja naprężeń obowiązująca w zakresie sprężystym dana jest wzorem

$$(9.8) \quad \Phi^e = Cr^4(1 + \varepsilon z).$$

Funkcja ta oczywiście spełnia równanie (9.2).

Zadanie nasze polegać będzie na «obudowaniu» strefy sprężystej, określonej wzorem (9.8), strefą plastyczną oraz znalezienie — przy danym momencie skręcającym — kształtu nieobciążonej powierzchni zewnętrznej ograniczającej strefę plastyczną. W dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy metodą małego parametru przyjmując, że małym

parametrem będzie ε . Ze znajomości funkcji naprężeń w strefie sprężystej możemy określić rozkład naprężeń

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \tau_{\theta z}^e &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^e}{\partial r} = -4Cr(1 + \varepsilon z), \\ \tau_{\theta r}^e &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^e}{\partial z} = Cr^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Granicę międzystrefową określimy z warunku plastyczności, który obowiązuje dla strefy sprężystej na tej granicy

$$(9.10) \quad (\tau_{\theta z}^e)^2 + (\tau_{\theta r}^e)^2 = k_0^2.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\frac{k_0}{C} = K$, to stosując metodę małego parametru można określić granicę międzystrefową w postaci parametrycznej

$$(9.11) \quad \begin{aligned} z_g &= l, \\ r_g &= \frac{K}{4} \left[1 - l\varepsilon + \left(l^2 - \frac{K^2}{2 \cdot 4^4} \right) \varepsilon^2 + \left(-l^2 + \frac{5K^2 l}{2 \cdot 4^4} \right) \varepsilon^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Na granicy międzystrefowej można dalej określić

$$(9.12) \quad \begin{aligned} \Phi(l) &= C \frac{K^4}{4^4} \left[1 - 3l\varepsilon + \left(6l^2 - \frac{K^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^2 + \left(-10l^3 + \frac{7K^2 l}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^3 + \dots \right], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= C \frac{K^4}{4^4} \left[1 - 3l\varepsilon + \left(10l^2 - \frac{K^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^2 + \dots \right] \varepsilon, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= C \frac{K^3}{4^2} \left[1 - 2l\varepsilon + \left(3l^2 - \frac{3K^2}{2 \cdot 4^4} \right) \varepsilon^2 + \left(-4l + \frac{9K^2 l}{4^4} \right) \varepsilon^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Znając te wartości, możemy określić warunki brzegowe dla linii największego spadku na granicy międzystrefowej, mianowicie warunki (3.9). Wartość z'_M określona zostanie ze wzoru (3.10)

$$(9.13) \quad z'_M = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_M}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_M},$$

gdzie M jest dowolnym punktem leżącym na znalezionej granicy.

Równanie różniczkowe linii największego spadku funkcji naprężeń Φ^p dla materiału jednorodnego można sprowadzić do postaci

$$(9.14) \quad z' = \pm \sqrt{\frac{D}{r^4 - D}},$$

a po scałkowaniu

$$(9.15) \quad z = z_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{r^4 - D}} dr.$$

Stałą całkowania D określimy z warunku brzegowego, wyznaczającego kierunek linii największego spadku na granicy międzystrefowej

$$(9.16) \quad D = \frac{z_M'^2 r_g^4}{1 + z_M'^2}.$$

Po rozwinięciu w szereg i wykonaniu całkowania, równanie linii największego spadku można przedstawić następująco:

$$(9.17) \quad z = l - \frac{K^2}{4^3} \left[\left(\frac{K}{4r} - 1 \right) \varepsilon + l \left(3 - \frac{K}{r} \right) \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \left(-6l^2 + \frac{5}{2} \frac{Kl^2}{r} - \frac{1}{2 \cdot 4^4} \frac{K^3}{r} + \frac{7K^2}{5 \cdot 4^5} + \frac{K^7}{10 \cdot 4^9 \cdot r^5} \right) \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Funkcję naprężeń w zakresie plastycznym Φ^p określimy, wykorzystując w tym celu wzór (4.3), z którego po przekształceniach otrzymujemy

$$(9.18) \quad \Phi^p = \Phi(l) + CK \left\{ \frac{1}{3} \left[r^3 - \left(\frac{K}{4} \right)^3 \right] + \left(\frac{K}{4} \right)^3 l \varepsilon + \left[- \left(\frac{K}{4} \right)^6 \frac{1}{2 \cdot 4^2 r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{K}{4} \right)^5 \frac{1}{4^2} - \frac{K^3 l^2}{2 \cdot 4^2} \right] \varepsilon^2 + \left[- \left(\frac{K}{4} \right)^6 \frac{l}{4r} - \frac{7}{4^2} \left(\frac{K}{4} \right)^5 l + \frac{5K^3 l^3}{3 \cdot 6 \cdot 4^2} \right] \varepsilon^3 + \dots \right\}.$$

W powyżej przedstawionym wzorze funkcja naprężeń Φ^p zależna jest od promienia r oraz parametru l . Dla naszych celów (określenia naprężeń i kształtu powierzchni nieobciążonej) potrzebna jest znajomość $\Phi = \Phi(r, z)$. Aby uzyskać tę zależność, musimy odwrócić szereg $z = z(l, \varepsilon)$ na $l = l(z, \varepsilon)$; po przekształceniach otrzymujemy

$$(9.19) \quad l = z + \frac{K^2}{64} \left(\frac{K}{4r} - 1 \right) \varepsilon - \frac{K}{64} z \left(3 - \frac{K}{r} \right) \varepsilon^2 + \dots$$

Wprowadzając tę zależność do wzoru (9.18) określającego $\Phi = \Phi(r, l)$ otrzymujemy po wykonaniu przekształceń,

$$(9.20) \quad \Phi^p(r, z) = k_0 \left[\frac{1}{3} \left(r^3 - \frac{K^3}{4^3} \right) + \frac{K^3}{4^4} z \varepsilon + \left(\frac{K^6}{2 \cdot 4^8} \frac{1}{r} - \frac{K^5}{2 \cdot 4^6} - \frac{K^3 z^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \left(- \frac{K^6 z}{4^7 r} - \frac{5K^5 z}{4^7} + \frac{5K^3 z^3}{6 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Jeżeli znana jest już funkcja naprężeń Φ^p w powyższej postaci, to z zależności (2.3) można dla zakresu plastycznego określić rozkład naprężeń

$$(9.21) \quad \tau_{\theta r}^p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^p}{\partial z} = k_0 \left[\frac{K^3}{4^4} \frac{1}{r^2} \varepsilon - \frac{K^3}{4^3} \frac{z}{r^2} \varepsilon^2 + \left(- \frac{5K^5}{4^7 r^2} + \frac{5K^3 z^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^3 + \dots \right], \\ \tau_{\theta z}^p = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^p}{\partial r} = -k_0 \left[1 - \frac{K^6}{2 \cdot 4^8} \frac{1}{r^4} \varepsilon^2 + \frac{K^6}{4^7} \frac{z}{r^4} \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Kształtu powierzchni zewnętrznej poszukiwać będziemy w postaci

$$(9.22) \quad r = r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2 + r_3 \varepsilon^3 + \dots$$

Szukana powierzchnia jest powierzchnią nieobciążoną, wobec czego na tej powierzchni $\Phi^p(r, z) = \Phi_0 = \text{const}$. Jeżeli wprowadzimy do tego warunku szereg określający kształt szukanej powierzchni, to porównując współczynniki przy jednakowych potęgach parametru ε , możemy określić współczynniki r_1, r_2, r_3 itd. Ostatecznie, po wykonaniu tych przekształceń, kształt powierzchni zewnętrznej można zapisać następująco:

$$(9.23) \quad r = r_0 - \frac{K^3 z}{4^4} \frac{1}{r_0^2} \varepsilon + \left(-\frac{K^6 z^2}{4^8 r_0^5} - \frac{K^6}{24^8 r_0^3} + \frac{K^5}{2 \cdot 4^6 r_0^2} + \frac{K^3 z^2}{2 \cdot 4^3 r_0^2} \right) \varepsilon^2 + \\ + \left(-\frac{3K^9 z^3}{4^{12} r_0^8} - \frac{3K^9 z}{24^{12} r_0^6} + \frac{K^8 z}{4^{10} r_0^5} + \frac{K^6 z^3}{47 r_0^5} + \frac{K^6 z}{47 r_0^3} + \frac{5K^5 z}{47 r_0^2} - \frac{5K^3 z^3}{6 \cdot 4^3 r_0^2} \right) \varepsilon^3 + \dots,$$

gdzie $r_0 = \sqrt[3]{\frac{K^3}{4^4} + 3 \frac{\Phi_0}{k_0}}$.

Zaletą tego rozwiązania jest ogólna postać zapisu kształtu powierzchni zewnętrznej w zależności od trzech parametrów $\varepsilon, \frac{k_0}{C}, \Phi_0$. Jeżeli zadanie polegało będzie na rozwiązaniu przypadku skręcania sprężysto-plastycznego pręta o zmiennej średnicy metodą wprost, to możemy wykonać to w sposób przybliżony, dobierając współczynniki $\varepsilon, \frac{k_0}{C}, \Phi_0$ tak, aby powierzchnia określona wzorem $r = r\left(z, \varepsilon, \frac{k_0}{C}, \Phi_0\right)$ jak najmniej różniła się od danej powierzchni rzeczywistej pręta.

Dokładniejsza analiza wyprowadzonych zależności wykazuje, że szereg określający promień graniczny r_g jest stosunkowo słabo zbieżny dla większych parametrów l i ε .

Tablica 3

l [cm]	r_g [cm]	Φ_g [kGcm]	D [cm ⁴]	$b = \sqrt[4]{D}$ [cm]	$z = \text{cm}/\Phi$ [kGcm]			
					$r = 3$ [cm]	$r = 4$ [cm]	$r = 5$ [cm]	$r = 6$ [cm]
0	3,000	6,73 k_0	0,4531	0,820	0,0000 6,73 k_0	0,0517 19,10 k_0	0,0756 39,43 k_0	0,0985 69,77 k_0
3	2,6342	5,20 k_0	0,1605	0,633	0,0019 8,11 k_0	0,0519 20,46 k_0	0,0720 40,79 k_0	0,0856 71,13 k_0
6	2,3757	4,24 k_0	0,0701	0,514	0,0232 8,77 k_0	0,0452 21,11 k_0	0,0584 41,45 k_0	0,0673 71,78 k_0
9	2,1808	3,57 k_0	0,0354	0,434	0,0235 9,12 k_0	0,0407 21,45 k_0	0,0487 41,78 k_0	0,0548 72,11 k_0
12	2,0271	3,09 k_0	0,0196	0,374	0,0224 9,32 k_0	0,0341 21,65 k_0	0,0410 41,98 k_0	0,0457 72,32 k_0
15	1,9018	2,72 k_0	0,0118	0,330	0,0209 9,43 k_0	0,0291 21,76 k_0	0,0354 42,10 k_0	0,0337 72,43 k_0
18	1,7972	2,43 k_0	0,0075	0,294	0,0192 9,50 k_0	0,0266 21,81 k_0	0,0308 42,16 k_0	0,0337 72,50 k_0

Słaba zbieżność tego szeregu pociąga za sobą słabą zbieżność pozostałych szeregów. Dlatego w dalszym ciągu rozwiązano przykład numerycznie, bez stosowania metody małego parametru; w tym przypadku l i ε mogą być dowolnie duże.

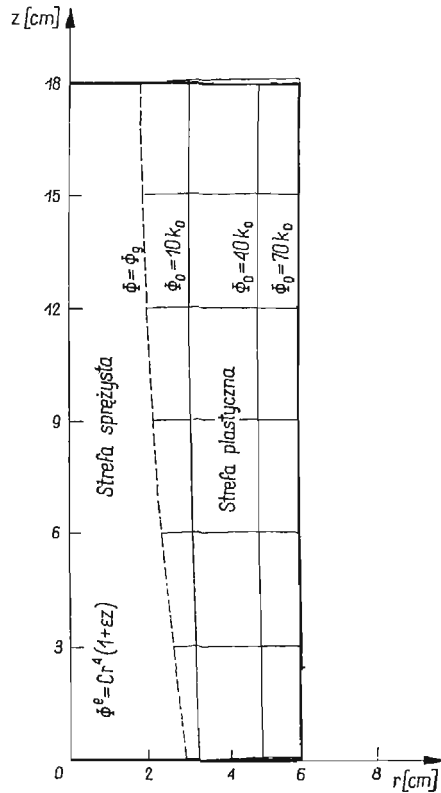
Rozwiązano przykład, gdy zakres sprężysty jest określony funkcją naprężeń wyrażoną wzorem (9.8), przy czym

$$\varepsilon = 0,1 \left[\frac{1}{\text{cm}} \right], \quad K = \frac{k_0}{C} = 12,03 \text{ [cm]}.$$

Dla tych wartości granicę międzystrefową można przedstawić wzorem

$$(9.24) \quad r_g = 50 \left[-16 \left(1 + \frac{l}{10} \right) + \sqrt{256 \left(1 + \frac{l}{10} \right)^2 + 5,79} \right].$$

Określono dalej dla szeregu wartości l promień graniczny r_g , wartości funkcji naprężeń $\Phi^e = \Phi_g^e(l)$ na granicy międzystrefowej, wartości stałej D oraz $b = \sqrt[4]{D} = b(l)$. Równanie



Rys. 7

linii największego spadku funkcji naprężeń Φ można, w zakresie plastycznym, dla przypadku materiału jednorodnego przedstawić jako

$$(9.25) \quad z = l + b \frac{\sqrt{2}}{2} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)],$$

gdzie $F(\varepsilon, p)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, natomiast odpowiednie argumenty są równe

$$\varepsilon_1 = \arccos \frac{b}{r}, \quad \varepsilon_2 = \arccos \frac{b}{r(l)}, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wzór na funkcję naprężeń Φ^p dla zakresu plastycznego można natomiast przedstawić w postaci

$$(9.26) \quad \Phi^p = \Phi_0^p(l) + K \left\{ \frac{b^3}{3\sqrt{2}} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)] + \frac{r}{3} \sqrt{r^4 - D} - \frac{r(l)}{3} \sqrt{r^4(l) - D} \right\}.$$

Wyniki numerycznie obliczonych wartości $\Delta z = (z-l)$, Φ^p dla szeregu wartości l podano w tablicy 3. Na rys. 7 przedstawiono rodziny nieobciążonych powierzchni zewnętrznych ograniczające strefę plastyczną znalezione numerycznie. Z przedstawionego rysunku wynika, że w miarę narastania warstwy plastycznej (przy ustalonym obszarze sprężystym), powierzchnia boczna zbliża się coraz bardziej do powierzchni walcowej. Z przeprowadzonych badań wynika, że małe zmiany średnicy zewnętrznej pręta skręcane go pociągają za sobą duże zmiany promienia granicznego między strefą sprężystą a plastyczną — tym większe, im bardziej materiał jest uplastyczniony.

Literatura cytowana w tekście

1. R. P. EDDY, F. S. SHAW, *Numerical solution of elasto-plastic torsion of a shaft of rotational symmetry*, J. Appl. Mech., **16** (1949), 139–148.
2. A. FÖPPL, *Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Monachium*, **35** (1905), 249–504.
3. M. GALOS, *Obliczanie nośności granicznej skręcanych prętów o dowolnej niejednorodności poprzecznej*, Rozpr. Inżyn., **2**, **16** (1968), 233–260.
4. J. H. MICHELL, *Proc. London Math. Soc.*, **31** (1899), 141.
5. H. NEUBER, *Kerbspannunglehre*, Berlin 1937.
6. В. В. Соколовский, *Некоторые задачи теории пластичности со степенным упрочнением материалов*, Прикл. Мат. Мех., т. XII, вып. 6 (1949).
7. В. В. Соколовский, *О одной задаче упруго-пластического кручения*, Прикл. Мат. и Мех., **2**, **6** (1942), 241–246.
8. В. В. Соколовский, *Пластическое кручение круглых стержней переменной диаметра*, Прикл. Мат. и Мех., **4**, **9** (1945), 343–346.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

Темой работы является пластическое кручение стержней переменной диаметра из материала с произвольной пластической неоднородностью (зависимой от координат r, z в применяемой здесь цилиндрической системе координат r, θ, z). Здесь используется математическая аналогия между

рассматриваемой задачей и задачей о пластическом кручении призматических стержней из материала с произвольной поперечной неоднородностью (Гальос [3]).

Решение задачи получено путем введения функции напряжений, благодаря чему задача свелась к решению уравнения $|\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z)$. Из этого уравнения можно определить линии наибольшего наклона функции напряжений Φ а в последствии также функцию Φ и напряжения $\tau_{\theta r}$ и $\tau_{\theta z}$.

Приведен метод проектирования трубчатых стержней полностью переходящих в пластическое состояние и обратный метод решения задачи об упруго-пластическом кручении стержней переменного сечения из пластически неоднородного материала.

Рассмотрен также вопрос деформации пластической зоны рассматриваемых стержней.

Приводятся ряд примеров иллюстрирующих рассуждения.

S u m m a r y

PLASTIC TORSION OF NON-HOMOGENEOUS RODS OF VARIABLE THICKNESS

The problem of plastic torsion of rods of variable thickness made of materials characterized by arbitrary plastic nonhomogeneity (depending on coordinates r, z of the cylindrical system r, θ, z) has been considered in the paper. The mathematical analogy between the problem under consideration and the problem of torsion of prismatic transversally nonhomogeneous rods (Galos [3]) has been used.

The solution is obtained by introducing the stress function Φ what reduces the problem to the solution of the equation

$$|\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z).$$

This equation enables us to determine the lines of maximum slope of the stress function Φ and, next, the function Φ itself and the stresses $\tau_{\theta r}$ and $\tau_{\theta z}$.

The method of designing the fully plasticized pipe rods is presented as well as the inverse method of solution of the problem of elastic-plastic torsion of variable diameter rods made of plastic non-homogeneous materials. The question of deformation of the plastic zone in the rods under consideration has been also presented. A number of numerical examples is given.

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1970 r.