

ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI ORTOTROPOWEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ PODDANEJ
SKRĘCANIU

TADEUSZ GAŁKIEWICZ (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Celem pracy jest rozwiązanie liniowego zagadnienia stateczności cienkich, ortotropowych powłok stożkowych podpartych swobodnie na krawędziach i poddanych skręcaniu. Zadanie rozwiązano za pomocą metody energetycznej. Założono ugięcie środkowej powierzchni powłoki w przybliżeniu w postaci funkcji $w = f_1 \sin Kz \sin n_s(\varphi - pz)$, znaleziono całkowitą energię odkształcenia powłoki i następnie zastosowano metodę Ritza. Zadanie rozwiązano dla powłok cienkich i o niezbyt dużym pochyleniu tworzących stożka do jego osi. Udało się określić moment krytyczny oraz liczbę fal powstających na obwodzie za pomocą wygodnych do korzystania wzorów.

Okazało się, że dla powłok stożkowych o małym pochyleniu tworzących do osi stożka — wzory tu wyprowadzone dają wyniki bliższe doświadczeń niż wzory MUSZTARI otrzymane dla powłok izotropowych.

Na rys. 1 podane zostały wymiary s_1, s_2, R_1, R_2 , grubość ścianki h oraz kąt między podstawą i tworzącą α . Dowlone punkty powierzchni środkowej posiadają współrzędne s i φ , zaś przemieszczenie tych punktów w kierunku tworzących oznaczono przez u , w kierunku stycznej do równoleżnika — przez v i w kierunku normalnej do powłoki przez w . Jak widać z rys. 1: $r = s \cos \alpha$, $R_1 = s_1 \cos \alpha$, $R_2 = s_2 \cos \alpha$.

Przyjęto następujące oznaczenia dla stałych materiałowych: E_1, ν_1 — moduł sprężystości i liczba Poissona w kierunku tworzącej, E_2, ν_2 — moduł sprężystości i liczba Poissona w kierunku równoleżnikowym, G — moduł sprężystości postaciowej.

Dla powłok ortotropowych obowiązuje związek

$$(1.1) \quad \frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2}.$$

W pracy KRÓŁAKA [4] dotyczącej stateczności ściskanych powłok stożkowych równanie nierozdzielności dla powłok ortotropowych doprowadzone zostało do postaci

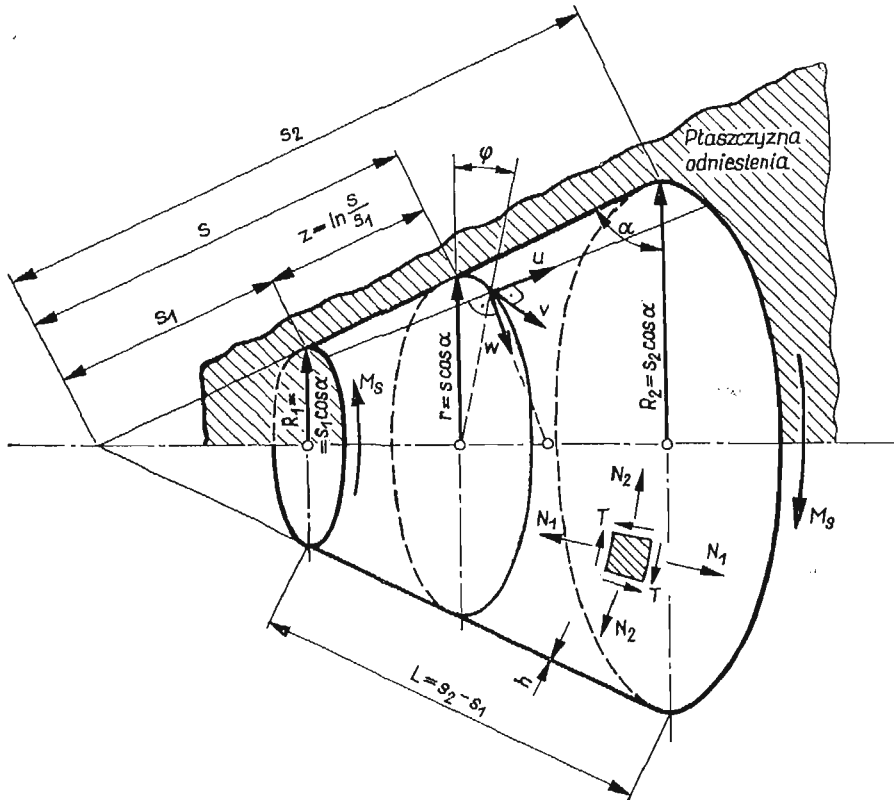
$$(1.2) \quad \delta_I \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + 2\delta_{III} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial \varphi_1^2} + \delta_{II} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi_1^4} - 4\delta_I \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - 4\delta_{III} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial \varphi_1^2} + \\ + (5\delta_I - \delta_{II}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2(\delta_{II} + \delta_{III}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1^2} - 2(\delta_I - \delta_{II}) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e^z \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

gdzie Φ jest funkcją naprężeń Airy'ego, zaś

$$(1.3) \quad z = \ln \frac{s}{s_1},$$

$$(1.4) \quad \varphi_1 = \varphi \cos \alpha,$$

$$(1.5) \quad \delta_I = \frac{1}{s_1 E_2 h \operatorname{tg} \alpha}, \quad \delta_{II} = \frac{1}{s_1 E_1 h \operatorname{tg} \alpha}, \quad \delta_{III} = \frac{1}{2s_1 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{Gh} - 2 \frac{\nu_1}{E_1 h} \right).$$



Rys. 1.

2. Energia całkowita ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu

Energia całkowita nagromadzona w obciążonej powłoce wynosi

$$(2.1) \quad U_0 = (V_s + V_\theta) + W.$$

W powyższym wzorze V_s jest energią sprężystą w stanie błonowym, V_θ — energią od

zginania, zaś W — energią od sił zewnętrznych. Energia sprężysta w stanie błonowym określona jest wzorem

$$(2.2) \quad V_s = \frac{1}{2} \int_F \int (N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + T\gamma) r d\varphi ds,$$

tutaj $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ oznaczają składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej.

Siły przekrojowe wynoszą [3]

$$(2.3a) \quad N_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

$$(2.3b) \quad N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2},$$

$$(2.3c) \quad T = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

gdzie N_1, N_2, T są to siły przypadające na jednostkę długości środkowej powierzchni (rys. 1).

W powłoce występuje dwukierunkowy stan naprężenia, a więc:

$$(2.4a) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1 h} (N_1 - \nu_1 N_2) = \delta_2 (N_1 - \nu_1 N_2),$$

$$(2.4b) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2 h} (N_2 - \nu_2 N_1) = \delta_1 (N_2 - \nu_2 N_1),$$

$$(2.4c) \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{Gh},$$

$$(2.5) \quad \delta_1 = \frac{1}{E_2 h}, \quad \delta_2 = \frac{1}{E_1 h}.$$

Po podstawieniu powyższych wzorów do wyrażenia (2.2) energia sprężysta w stanie błonowym wynosi

$$(2.6) \quad V_s = \frac{\cos \alpha}{2} \int_F \int s \left(\delta_2 N_1^2 + \delta_1 N_2^2 - 2\delta_2 \nu_1 N_1 N_2 + \frac{1}{Gh} T^2 \right) ds d\varphi.$$

Energia sprężysta od zginania

$$(2.7) \quad V_g = \frac{1}{2} \int_V \int \int (\sigma_{g_1} \varepsilon_{g_1} + \sigma_{g_2} \varepsilon_{g_2} + \tau_g \gamma_g) r d\varphi ds dz',$$

gdzie $\varepsilon_{g_1}, \varepsilon_{g_2}, \gamma_g$ są to odkształcenia względne od zginania, zaś $\sigma_{g_1}, \sigma_{g_2}, \tau_g$ — naprężenia od zginania.

Dla powłoki stożkowej przyrosty krzywizn określone są następującymi przybliżonymi związkami [3]:

$$(2.8a) \quad \Delta \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

$$(2.8b) \quad \Delta \kappa_2 = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial w}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \sin \alpha \right) \approx \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},$$

$$(2.8c) \quad \Delta \kappa_{1,2} = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial s} \sin \alpha - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \alpha - v \sin \alpha \cos \alpha \right) \approx \\ \approx \frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

Jeżeli przez z' oznaczymy odległość elementu objętości ścianki powłoki od powierzchni środkowej, to odkształcenia względne od zginania są następujące:

$$(2.9) \quad \varepsilon_{\theta_1} = -z' \Delta \kappa_1, \quad \varepsilon_{\theta_2} = -z' \Delta \kappa_2, \quad \gamma_{\theta} = -2z' \Delta \kappa_{1,2}.$$

Przyjmujemy, że w powłoce występuje dwukierunkowy stan napięcia, więc naprężenia od zginania wynoszą

$$(2.10a) \quad \sigma_{\theta_1} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{\theta_1} + \nu_2 \varepsilon_{\theta_2}) = -\frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} z' (\Delta \kappa_1 + \nu_2 \Delta \kappa_2),$$

$$(2.10b) \quad \sigma_{\theta_2} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{\theta_2} + \nu_1 \varepsilon_{\theta_1}) = -\frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} z' (\Delta \kappa_2 + \nu_1 \Delta \kappa_1),$$

$$(2.10c) \quad \tau_{\theta} = G \gamma_{\theta} = -2G z' \Delta \kappa_{1,2}.$$

Po podstawieniu związków (2.10) i (2.9) do wzoru na energię sprężystą od zginania (2.7)

i po scałkowaniu względem zmiennej z' od $-\frac{h}{2}$ do $+\frac{h}{2}$ otrzymujemy

$$(2.11) \quad V_{\theta} = \frac{\cos \alpha}{2} \int_F \int s [D_1 \Delta \kappa_1^2 + D_2 \Delta \kappa_2^2 + 2D_1 \nu_2 \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2 + 2D_{1,2} \Delta \kappa_{1,2}^2] ds d\varphi,$$

przy czym D_1 , D_2 są to sztywności zginania, $D_{1,2}$ jest sztywnością skręcania, zatem

$$(2.12) \quad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{1,2} = \frac{G h^3}{12}.$$

Energia sił zewnętrznych w przypadku skręcania powłoki stożkowej wynosi

$$(2.13) \quad W = -M_s \theta,$$

gdzie M_s — moment skręcający, θ — średni kąt skręcenia całej powłoki.

Po utracie stateczności kąt odkształcenia postaciowego dla powłoki stożkowej jest określony wzorem

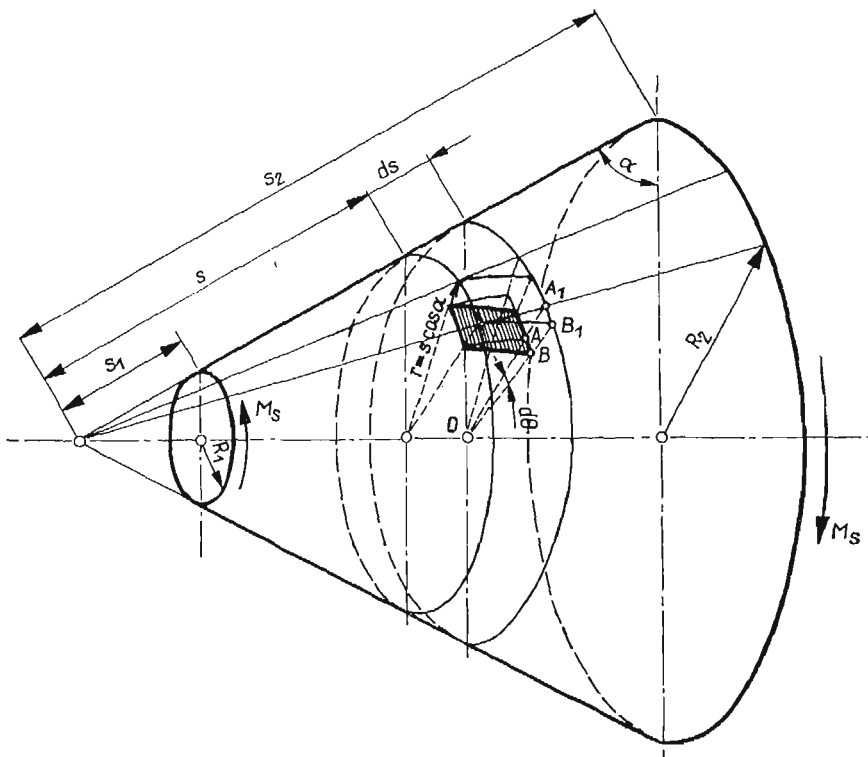
$$(2.14) \quad \gamma = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \sin \alpha \right) - v \cos \alpha \right] \approx \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

stąd

$$(2.15) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} = \gamma - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

Za powierzchnię odniesienia przyjmijmy powierzchnię środkową stożka nieodkształconego. Dla pofalowanej powłoki długość odcinka $A_1 B_1$ (rys. 2) wynosi

$$(2.16) \quad A_1 B_1 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) ds.$$



Rys. 2

Obrót promienia OA_1 na skutek odkształcenia elementu siłami stycznymi oznaczamy przez $d\theta$, przy czym

$$(2.17) \quad \begin{aligned} d\theta &\approx \frac{A_1 B_1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) ds = \\ &= \frac{1}{r} \left(\gamma - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) ds = \frac{1}{r} \left(\frac{T}{Gh} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) ds = \\ &= \frac{1}{s \cos \alpha} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds = \\ &= \frac{1}{s \cos^2 \alpha} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds. \end{aligned}$$

Średni kąt skręcenia elementarnego stożka, (którego długość tworzącej jest ds) wynosi

$$(2.18) \quad d\theta_{sr} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta d\varphi}{2\pi} = \\ = \frac{ds}{2\pi s \cos^2 \alpha} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] d\varphi.$$

Średni kąt skręcenia całej powłoki stożkowej określono całkując $d\theta_{sr}$ od s_1 do s_2 , mianowicie

$$(2.19) \quad \theta = \int_{s_1}^{s_2} d\theta_{sr} = \frac{1}{2\pi \cos^2 \alpha} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{s} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] d\varphi.$$

Ostateczny wzór określający energię sił zewnętrznych jest następujący:

$$(2.20) \quad W = -M_s \theta = \frac{M_s}{2\pi \cos^2 \alpha} \int_F \int \left[\frac{1}{Gh} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds d\varphi.$$

Całkowita energia sprężysta ortotropowej powłoki stożkowej wynosi

$$(2.21) \quad U_0 = (V_s + V_\theta) + W = \\ = \frac{\cos \alpha}{2} \left\{ \int_F \int s \left(\delta_2 N_1^2 + \delta_1 N_2^2 - 2\delta_2 \nu_1 N_1 N_2 + \frac{1}{Gh} T^2 \right) ds d\varphi + \right. \\ \left. + \int_F \int s (D_1 \Delta \kappa_1^2 + D_2 \Delta \kappa_2^2 + 2D_1 \nu_1 \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2 + 2D_{1,2} \Delta \kappa_{1,2}^2) ds d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{M_s}{\pi \cos^3 \alpha} \int_F \int \left[\frac{1}{Gh} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds d\varphi. \right.$$

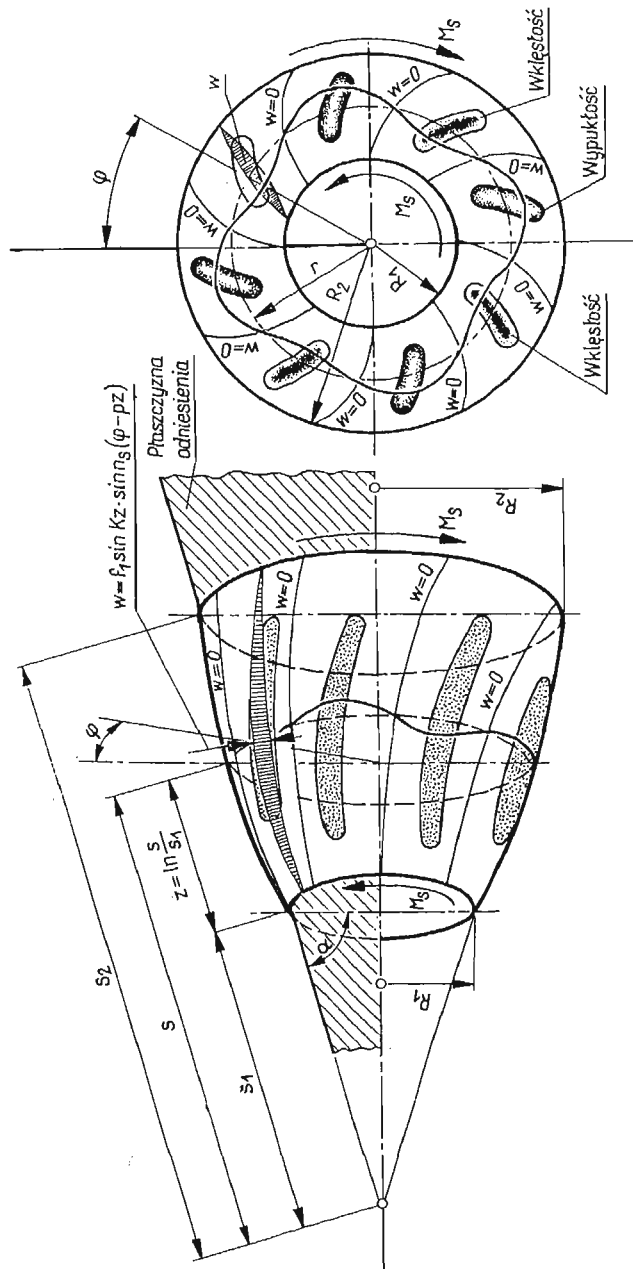
3. Liniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu

Przeprowadzone doświadczenia na skręcanych powłokach stożkowych wykazują, że fale, które tworzą się po utracie stateczności układają się wzdłuż linii zbliżonych do śrubowych. Kształt powierzchni środkowej odkształconej powłoki opisać można w przybliżeniu za pomocą następującej funkcji

$$(3.1) \quad w = f_1 \sin Kz \sin n_s (\varphi - pz);$$

tutaj zmiennymi niezależnymi określającymi powierzchnię środkową są φ oraz z . Kąt φ odkładany jest stałe od pewnej płaszczyzny — bazy przechodzącej przez oś stożka w płaszczyznach prostopadłych do osi stożka (rys. 1, 3). Drugą zmienną z można wyrazić przez współrzędną s mierzoną od wierzchołka stożka wzdłuż jego tworzących

$$(3.2) \quad z = \ln \frac{s}{s_1},$$



Rys. 3.

gdzie f_1 oznacza maksymalną strzałkę fali,

$$(3.3) \quad K = \frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \quad \left(1 \leq \frac{s_2}{s_1} \leq 2 \right),$$

zaś s_1 i s_2 są to najmniejsza i największa tworząca stożka mierzona od jego wierzchołka, n_s określa liczbę fal tworzących się na obwodzie (n_s — liczba całkowita większa od jedności), p jest to pewien parametr.

Analizując warunki brzegowe jakie spełnia funkcja ugięcia okazuje się, że odpowiada ona w przybliżeniu podparciu swobodnemu na krawędziach. Funkcję tę łatwo jest przekształcić do następującej postaci

$$(3.4) \quad w = \frac{f_1}{2} [\cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) - \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)]$$

gdzie

$$(3.5) \quad \varphi_1 = \varphi \cos \alpha,$$

$$(3.6) \quad \bar{a}_1 = n_s p + K = n_s p + \frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}},$$

$$(3.7) \quad \bar{b}_1 = n_s p - K = n_s p - \frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}},$$

$$(3.8) \quad c = -\frac{n_s}{\cos \alpha}.$$

Wstawiono funkcję ugięcia (3.4) do prawej strony równania nierozdzielności (1.2) i otrzymano następujący związek:

$$(3.9) \quad \left. \begin{array}{l} \text{prawa strona} \\ \text{równania} \\ \text{nierozdzielności} \end{array} \right\} = \frac{f_1}{2} e^{\alpha} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)].$$

Przewidziano funkcję naprężeń w postaci

$$(3.10) \quad \Phi = \frac{f_1}{2} e^{\alpha} [\alpha \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \beta \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \gamma \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \delta \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + A_0 \varphi_1,$$

gdzie α , β , γ , δ i A_0 są to pewne stałe, które należy określić.

Wstawiono następnie funkcję Φ do równania nierozdzielności (1.2) i po przyrównaniu do siebie współczynników występujących przy tych samych funkcjach trygonometrycznych po obu stronach równania nierozdzielności otrzymano układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Współczynniki tych równań w sposób skomplikowany zależą od parametrów \bar{a}_1 , \bar{b}_1 , c i dalsze rozwiązanie zadania nastęrcza duże trudności rachunkowe.

Na podstawie porównania szeregu szczególnych przypadków powłok stożkowych z powłokami walcowymi o zbliżonych wymiarach [zakładano tu średnicę powłoki walcowej równą $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$ i długość powłoki $L = (s_2 - s_1)$] zauważono, że dla pewnej grupy powłok występujący w równaniach współczynnik c^4 jest wielkością znacznie większą od współczynników typu $c^2 \bar{a}_1^2$, $c^2 \bar{b}_1^2$, \bar{a}_1^4 , \bar{b}_1^4 itp. W omawianej dalej pracy zagadnienie rozwiązano w sposób przybliżony, gdyż pominięto wszystkie wyrażenia małe w stosunku do c^4 .

Jak wykazuje dokładniejsza analiza dobre wyniki uzyskuje się dla powłok stosunkowo cienkich i o małym kącie pochylenia tworzących do osi stożka.

Po wykonaniu powyższych uproszczeń i przyrównaniu do siebie współczynników występujących przy tych samych funkcjach trygonometrycznych z obu stron równania nierozdzielności otrzymujemy następujący układ czterech równań, z których wyliczamy stałe

$$(3.11a) \quad \alpha \delta_{II} c^4 = -\bar{a}_1 \quad \text{stąd} \quad \alpha = -\frac{\bar{a}_1}{\delta_{II} c^4},$$

$$(3.11b) \quad \beta \delta_{II} c^4 = \bar{a}_1^2 \quad \text{stąd} \quad \beta = \frac{\bar{a}_1^2}{\delta_{II} c^4},$$

$$(3.11c) \quad \gamma \delta_{II} c^4 = \bar{b}_1 \quad \text{stąd} \quad \gamma = \frac{\bar{b}_1}{\delta_{II} c^4},$$

$$(3.11d) \quad \delta \delta_{II} c^4 = -\bar{b}_1^2 \quad \text{stąd} \quad \delta = -\frac{\bar{b}_1^2}{\delta_{II} c^4}.$$

Wzór na funkcję naprężeń jest więc teraz następujący:

$$(3.12) \quad \Phi = \frac{f_1}{2} \frac{e^z}{\delta_{II} c^4} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + A_0 \varphi_1.$$

Stałą A_0 wyliczamy z warunku równowagi. Z sumy momentów względem osi stożka wynika równość

$$(3.13) \quad M_s = \int_0^{2\pi} [T(r d\varphi)] r,$$

przy czym siła styczna T przypadająca na jednostkę długości środkowej powierzchni określona jest wzorem (2.3c).

Po wyliczeniach

$$(3.14) \quad T = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [-c\bar{a}_1^2 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + c\bar{a}_1^3 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + c\bar{b}_1^2 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \\ - c\bar{b}_1^3 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + \frac{A_0}{s^2}.$$

Wstawiając siłę T do wzoru (3.13) i całkując, mamy

$$(3.15) \quad M_s = \int_0^{2\pi} A_0 \cos^2 \alpha d\varphi = A_0 2\pi \cos^2 \alpha,$$

a stała

$$(3.16) \quad A_0 = \frac{M_s}{2\pi \cos^2 \alpha}.$$

Końcowa więc postać wzoru na funkcję naprężeń jest następująca:

$$(3.17) \quad \Phi = \frac{f_1}{2} \frac{e^z}{\delta_{II} c^4} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + \frac{M_s}{2\pi \cos^2 \alpha} \varphi_1.$$

Ze związków (2.3a), (2.3b), (2.3c) wyliczyć można teraz siły wewnętrzne N_1 , N_2 i T , mianowicie

$$(3.18a) \quad N_1 = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [\bar{a}_1 (c^2 - \bar{a}_1^2 - 1) \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ - \bar{a}_1^2 c^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1 (c^2 - \bar{b}_1^2 - 1) \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1^2 c^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.18b) \quad N_2 = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [-\bar{a}_1^2 (\bar{a}_1^2 + 1) \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1^2 (\bar{b}_1^2 + 1) \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.18c) \quad T = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [-c\bar{a}_1^2 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + c\bar{a}_1^3 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + c\bar{b}_1^2 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - c\bar{b}_1^3 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + \frac{M_s}{2\pi s^2 \cos^2 \alpha}.$$

Otrzymane wyżej siły N_1 , N_2 i T wstawiono do wyrażenia (2.6) i po scałkowaniu i pominięciu wielkości małych otrzymano ostateczną postać wzoru na energię sprężystą w stanie błonowym

$$(3.19) \quad V_s = \frac{f_1^2}{2} \frac{\pi \ln \frac{s_2}{s_1} \sin^2 \alpha}{4\delta_2 \cos \alpha} \left[\left(\frac{\bar{a}_1}{c} \right)^4 + \left(\frac{\bar{b}_1}{c} \right)^4 \right] + \frac{M_s^2}{8\pi Gh \cos^3 \alpha} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

Przystąpiono następnie do obliczenia energii sprężystej od zginania. Przyrosty krzywizn określono z wzorów (2.8a), (2.8b) i (2.8c), wynoszą one

$$(3.20a) \quad \Delta \kappa_1 = \frac{f_1}{2s^2} [\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \\ + \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.20b) \quad \Delta \kappa_2 = \frac{f_1}{2s^2} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - c^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + c^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.20c) \quad \Delta \kappa_{1,2} = \frac{f_1}{2s^2} [-\bar{a}_1 c \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1 c \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + c \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ - c \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)];$$

$\Delta \kappa_1, \Delta \kappa_2, \Delta \kappa_{1,2}$ wstawiono następnie do wzoru na energię od zginania (2.11) następnie po obliczeniach i uproszczeniach otrzymano

$$(3.21) \quad V_\theta = \frac{f_1^2}{2} \frac{D_2 \pi \cos \alpha}{4} \left(\frac{K^2}{K^2+1} \right) \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2} c^4 = \frac{f_1^2}{2} \frac{D_2 \pi \cos \alpha}{4} C c^4,$$

gdzie

$$(3.22) \quad C = \frac{K^2}{(K^2+1)} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right)^2}{\left[\left(\frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right)^2 + 1 \right]} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

Gdy $\frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \gg 1$, wówczas $C \approx \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}$.

Energia sił zewnętrznych wyliczona ze wzoru (2.19) wynosi

$$(3.23) \quad W = -\frac{f_1^2}{2} M_s \frac{n_s p}{4 \cos^2 \alpha} C - \frac{M_s^2}{4 \pi G h \cos^3 \alpha} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

Ostatecznie wzór określający całkowitą energię odkształcenia powłoki został doprowadzony do następującej postaci:

$$(3.24) \quad U_0 = (V_s + V_\theta) + W = \frac{f_1^2 K^2}{8 \cos^2 \alpha} C \left\{ A[(p + \eta)^4 + (p - \eta)^4] + \frac{B}{\eta^4} - M_s \frac{p}{\eta^2} \right\} + \\ - \frac{M_s^2}{8 \pi G h \cos^3 \alpha} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2},$$

gdzie

$$(3.25) \quad \eta = \frac{\pi}{n_s \ln \frac{s_2}{s_1}} = \frac{K}{n_s},$$

$$(3.26) \quad A = \pi^2 E_1 h \frac{s_1^2 s_2^2}{s_2^2 - s_1^2} \left[\frac{K^2 + 1}{K^5} \right] \sin^2 \alpha \cos^5 \alpha$$

$$\left(\text{gdy } K^2 \gg 1 \text{ wówczas } \left[\frac{K^2 + 1}{K^5} \right] \approx \frac{1}{K^3} \right),$$

$$(3.27) \quad B = \frac{\pi E_2 h^3 K^2}{12(1 - \nu_1 \nu_2) \cos \alpha}.$$

Z warunku minimum energii $\frac{\partial U_0}{\partial f_1} = 0$, $\frac{\partial^2 U_0}{\partial f_1^2} > 0$ określony został moment skręcający

$$(3.28) \quad M_s = A \frac{\eta^2}{p} [(p + \eta)^4 + (p - \eta)^4] + B \frac{1}{p \eta^2}.$$

Wyznaczono następnie dla jakich wartości p i η moment M_s jest najmniejszy. Warunki minimum dają dwa związki

$$(3.29) \quad \frac{\partial M_s}{\partial p} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial M_s}{\partial \eta} = 0,$$

które prowadzą do następującego równania dwukwadratowego

$$(3.30) \quad \left(\frac{p}{\eta}\right)^4 - 3\left(\frac{p}{\eta}\right)^2 - 2 = 0.$$

Interesujący nas rzeczywisty dodatni pierwiastek tego równania wynosi

$$(3.31) \quad \frac{p}{\eta} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}} = 1,887.$$

Stąd określono związek między parametrami p i η , mianowicie

$$(3.32) \quad p = 1,887\eta.$$

Wstawiono teraz p do wzoru (3.28) i otrzymano M_s w funkcji tylko jednego parametru

$$(3.33) \quad M_s = 37,5A\eta^5 + \frac{B}{1,887\eta^3},$$

$$(3.34) \quad \frac{\partial M_s}{\partial \eta} = 5 \cdot 37,5 \cdot A\eta^4 - \frac{3B}{1,887\eta^4} = 0,$$

czyli

$$(3.35) \quad \eta = \frac{1}{1,81} \sqrt[8]{\frac{B}{A}}.$$

Mając η można określić liczbę fal powstających na obwodzie stożka

$$(3.36) \quad n_s = \frac{K}{\eta} = K1,81 \sqrt[8]{\frac{A}{B}}.$$

Gdy skorzystamy ze związków (3.26) i (3.27), to po wyliczeniach otrzymamy

$$(3.37) \quad n_s = 4,02 \left[\frac{s_1 s_2}{h} \operatorname{tg} \alpha \sqrt[8]{\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{2 \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{\pi} \right)^2 \right]}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}}} \right]^{1/4} \cos \alpha \approx$$

$$\approx 4,02 \left[\frac{s_1 s_2}{h} \operatorname{tg} \alpha \sqrt[8]{\frac{2 \frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2)}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}}} \right]^{1/4} \cos \alpha.$$

Wstawiono następnie $\eta = \frac{1}{1,81} \sqrt[8]{\frac{B}{A}}$ do wyrażenia (3.33) i otrzymano wzór na krytyczny moment skręcający ortotropowej powłoki stożkowej. Moment ten wynosi

$$(3.38) \quad M_{k_0} = 5,05 A^{3/8} B^{5/8}.$$

Po uwzględnieniu, że A i B określone są odpowiednio wzorami (3.26) i (3.27) mamy

$$(3.39) \quad M_{k_0} = 4,6 \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2}(1-\nu_1\nu_2)\right]^{5/8}} \left[s_1 s_2 h^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2 \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{\pi} \right)^2 \right]}{\ln \frac{s_2}{s_1} (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{3/4} \cos^2 \alpha.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$(3.40) \quad \omega = \left[s_1 s_2 h^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2 \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{\pi} \right)^2 \right]}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{1/4} \approx \left[s_1 s_2 h^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{1/4},$$

to wzory (3.37) i (3.39) można zapisać prościej

$$(3.41) \quad n_s = 4,02 \left[\frac{E_1}{E_2} (1-\nu_1\nu_2) \right]^{1/8} \frac{\omega \cos \alpha}{h},$$

$$(3.42) \quad M_{k_0} = 4,6 \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2}(1-\nu_1\nu_2)\right]^{5/8}} \omega^3 \cos^2 \alpha.$$

Dla powłoki izotropowej $E_1 = E_2 = E$, zaś $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Gdy $\nu = 0,3$ wówczas mamy

$$(3.43) \quad n_s = 3,97 \frac{\omega \cos \alpha}{h},$$

$$(3.44) \quad M_{k_0} = 4,88 E \omega^3 \cos^2 \alpha.$$

Uwzględniając fakt, że $s_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha}$, $s_2 = \frac{R_2}{\cos \alpha}$ i $L = s_2 - s_1$, wzory (3.37) i (3.39) można doprowadzić do następującej postaci:

$$(3.45) \quad n_s = 4,02 \sqrt{\frac{R_1}{L}} \sqrt[4]{\frac{R_1}{h}} \left[\frac{E_1}{E_2} (1-\nu_1\nu_2) \xi_1 \xi_2^3 \right]^{1/8} \sqrt[4]{\sin \alpha},$$

$$(3.46) \quad M_{k_0} = 4,6 \frac{R_1 h^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{R_1 h}}}} \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2}(1-\nu_1\nu_2)\right]^{5/8}} (\xi_1^3 \xi_2)^{1/8} \sqrt[4]{\sin^3 \alpha},$$

gdzie

$$(3.47) \quad \xi_1 = \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \right] \approx \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{\frac{R_2}{R_1} + 1},$$

$$(3.48) \quad \xi_2 = \frac{\frac{R_2}{R_1} - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Zbadane zostanie teraz zachowanie się funkcji określających n_s oraz M_{k_0} w przypadku zbliżania się kształtu powłoki stożkowej do walcowej. Gdy $\alpha \rightarrow \pi/2$ wówczas:

$$(3.49) \quad \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 1, \quad \sin \alpha \rightarrow 1.$$

Można wykazać, że

$$(3.50) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \xi_1 = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \xi_2 = 1.$$

Wzory na liczbę fal oraz moment krytyczny dla powłoki walcowej otrzymane jako granice, do których dążą wyrażenia (3.45) i (3.46), gdy kąt α dąży do $\pi/2$, są więc następujące:

$$(3.51) \quad n = n_s = 4,02 \sqrt{\frac{R}{L}} \sqrt[4]{\frac{R}{h}} \left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{1/8},$$

$$(3.52) \quad M_{k_{r_0}} = M_{k_0} = 4,6 \frac{Rh^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{Rh}}}} \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{5/8}}.$$

Tutaj $R_1 = R_2 = R$ oznacza promień powierzchni środkowej powłoki walcowej, L — długość powłoki, h — grubość ścianki, zaś $E_1, E_2, \nu_1 \nu_2$ — stałe materiałowe. Liczbę fal dla powłoki walcowej oznaczono przez n , a moment krytyczny symbolem $M_{k_{r_0}}$. Wzory (3.51) i (3.52) są identyczne z wzorami uzyskanymi przez autora w pracy [1] dotyczącej stateczności ortotropowych powłok walcowych poddanych skręcaniu.

Wyniki otrzymane na podstawie wyżej wyprowadzonych wzorów dla powłok walcowych są bardzo bliskie wyników uzyskanych przez innych autorów np. DONNELLA [8], PARSZEWSKIEGO [7], DAREWSKIEGO [9], którzy rozwiązali podobne zagadnienia innymi metodami. Dla powłok izotropowych, gdy parametr $\frac{L}{\sqrt{Rh}} > 17$ maksymalna różnica w odniesieniu do wzoru (3.52) nie przekracza $\pm 4\%$.

W artykule [2] przeprowadzono porównanie wyników uzyskanych w niniejszej pracy z wynikami MUSZTARI [9], który rozwiązał liniowe zagadnienie stateczności skręcanych izotropowych powłok stożkowych. Wykazane zostało, że gdy $L \sqrt{\frac{\sin \alpha}{R_1 h}} \approx 20$ wyniki

uzyskiwane przy pomocy porównywanych wzorów są do siebie zbliżone. Okazuje się, że wraz ze wzrostem parametru $L \sqrt{\frac{\sin \alpha}{R_1 h}}$ moment krytyczny liczony według wzorów Musztari daje wartości większe o ΔM_M od wyników uzyskanych według wyprowadzonego tu wzoru (3.42) i (3.46), np. dla $L \sqrt{\frac{\sin \alpha}{R_1 h}}$ wynoszącego kolejno 40, 50 i 60 — względny przyrost momentu $\frac{\Delta M_M}{M_{k_0}}$ równy jest odpowiednio około +6%, +9% i +11%.

Jak wiadomo, wyniki doświadczeń dla powłok walcowych leżą kilkanaście procent poniżej wyników uzyskanych z rozwiązań zagadnień liniowych [1, 8, 7]. Oczywiście jest, że podobnie będzie się rzecz miała z powłokami stożkowymi o małym pochyleniu tworzących do osi stożka. Z przeprowadzonej analizy wynika, że wzory na moment krytyczny wyprowadzone w niniejszej pracy dają wyniki bliższe doświadczeń niż wzory Musztari.

W celu ułatwienia korzystania z wzorów (3.45) i (3.46) wprowadzono oznaczenia

$$(3.53) \quad \psi_0 = (\xi_1 \xi_2^3)^{1/8} = \left\{ \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \right] \left(\frac{R_2 - 1}{R_1} \right)^3 \right\}^{1/8} \approx \sqrt[4]{\frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)},$$

$$(3.54) \quad \xi_0 = (\xi_1^3 \xi_2)^{1/8} = \left\{ \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \left(1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \right) \right\}^3 \frac{R_2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right\}^{1/8} \approx \sqrt[4]{\frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^3}{\frac{R_2}{R_1} + 1}}.$$

Powyższe wzory są słuszne, gdy $\left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right) \ll 1$, co ma miejsce dla $1 \leq \frac{R_2}{R_1} \leq 2$ i wówczas

$$1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \approx 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)}{\left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \ln \frac{R_2}{R_1}} \approx 1.$$

Dzięki czemu wzory na n_s i M_{k_0} można zapisać krótko

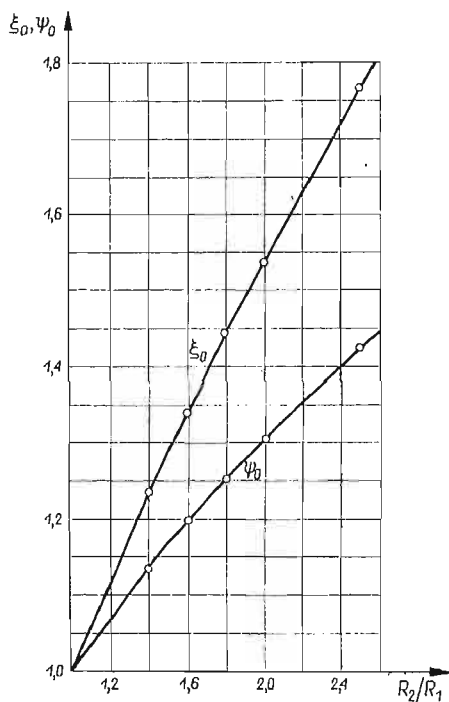
$$(3.55) \quad n_s = n \psi_0 \sqrt[4]{\sin \alpha} \approx n \sqrt[4]{\frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \sin \alpha},$$

$$(3.56) \quad M_{k_0} = M_{k_{r_0}} \xi_0 \sqrt[4]{\sin^3 \alpha} \approx M_{k_{r_0}} \sqrt[4]{\frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \right)^3}{\frac{R_2}{R_1} + 1}}.$$

Tutaj n i M_{kr_0} jest to liczba fal oraz górny moment krytyczny dla powłoki walcowej o grubości ścianki h , promieniu $R = R_1$, długości równej długości tworzącej stożka $L = s_2 - s_1$ i stałych materiałowych E_1, E_2, ν_1, ν_2 , czyli

$$(3.57) \quad n = 4,02 \sqrt{\frac{R_1}{L}} \sqrt[4]{\frac{R_1}{h}} \left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{1/8},$$

$$(3.58) \quad M_{kr_0} = 4,6 \frac{R_1 h^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{R_1 h}}}} \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{5/8}}.$$



Rys. 4.

Dla powłoki izotropowej zakładamy $E_1 = E_2 = E$, oraz $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, a gdy dodatkowo przyjmemy $\nu = 0,3$, otrzymamy

$$(3.59) \quad n = 3,97 \sqrt{\frac{R_1}{L}} \sqrt[4]{\frac{R_1}{h}},$$

$$(3.60) \quad M_{kr_0} = 4,88E \frac{R_1 h^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{R_1 h}}}}.$$

Występujące we wzorach (3.55), (3.56) współczynniki ψ_0 i ξ_0 jak widać ze związków (3.53) i (3.54) są funkcjami stosunku $\frac{R_2}{R_1}$. Na rys. 4 sporządzono wykresy ψ_0 i ξ_0 w za-

leżności od $\frac{R_2}{R_1}$. Wykresy te ułatwiają praktyczne korzystanie z otrzymanych wzorów.

Zilustrowane zostanie to na przykładzie liczbowym.

Przykład liczbowy. Obliczyć n_s oraz M_{k_0} dla powłoki stożkowej poddanej skręcaniu wykonanej z folii mosiężnej. Dane:

$$h = 0,02 \text{ cm}, R_1 = 5,20 \text{ cm}, R_2 = 8,33 \text{ cm}, L = 18,0 \text{ cm},$$

$$E_1 = E_2 = E = 1,16 \cdot 10^6 \text{ kG cm}^2, \nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3.$$

Mamy

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{8,33}{5,20} = 1,6,$$

$$\cos \alpha = \frac{R_2 - R_1}{L} = \frac{8,33 - 5,20}{18} = \frac{3,13}{18} = 0,1737 \quad (\alpha = 80^\circ),$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,1737^2} = 0,985,$$

$$\sin^3 \alpha = 0,952, \quad \sqrt[4]{\sin \alpha} = \sqrt[4]{0,985} = 0,997, \quad \sqrt[4]{\sin^3 \alpha} = 0,988.$$

Z wykresów na rys. 4 znajdujemy, że dla $\frac{R_2}{R_1} = 1,6$

$$\psi_0 = 1,195; \quad \xi_0 = 1,338.$$

Liczba fal na obwodzie (3.55) oraz skręcający moment krytyczny dla (3.56) rozpatrywanej przez nas powłoki stożkowej wynosi

$$n_s = n\psi_0 \sqrt[4]{\sin \alpha} = \left(3,97 \sqrt{\frac{5,20}{18,0}} \sqrt[4]{\frac{5,20}{0,02}} \right) 1,195 \cdot 0,997 = (8,57)1,191 = 10,2 \approx 10 \text{ fal},$$

$$\begin{aligned} M_{k_0} &= M_{k_{r_0}} \xi_0 \sqrt[4]{\sin^3 \alpha} = \left(4,88 \cdot 1,16 \cdot 10^6 \frac{5,20 \cdot 0,02^2}{18,0} \sqrt{\frac{5,20 \cdot 0,02^2}{18,0}} \right) 1,338 \cdot 0,988 = \\ &= (1580)1,32 = 2085 \text{ kGcm} = 20,85 \text{ kGm}. \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach skorzystano z wzorów (3.59) i (3.60).

Naprężenie krytyczne występujące w dowolnym przekroju poprzecznym powłoki oznaczamy symbolem

$$(3.61) \quad \tau_{kr} = \frac{M_{k_0}}{2\pi r^2 h}.$$

Wstawiając $r = R_1$ i $r = R_2$ otrzymujemy naprężenia krytyczne odpowiadające naprężeniom na krótszej i dłuższej krawędzi skręcanej powłoki stożkowej.

Maksymalne naprężenia wystąpią na krawędzi o mniejszym obwodzie i wynoszą

$$(3.62) \quad \tau_{kr} = \frac{M_{k_0}}{2\pi R_1^2 h}.$$

Ponieważ rozpatrywane zagadnienie dotyczyło sprężystej utraty stateczności, więc oczywiście τ_{kr} musi być mniejsze od granicy proporcjonalności materiału powłoki.

Wzory wyprowadzone w tej pracy są pierwszym przybliżeniem omawianego zagadnienia. Rozwiązując zadanie pominięto wszystkie wyrażenia małe w porównaniu z c^4 . Ważną rzeczą jest ocena maksymalnego błędu otrzymanego rozwiązania, co pozwoliłoby na określenie dla jakich parametrów powłok stożkowych wyprowadzone tu wzory można stosować. Problem ten na obecnym etapie pracy jest niemożliwy do rozwiązania, gdyż nieznanne jest ściśle bądź dokładniejsze rozwiązanie omawianego zagadnienia. W artykule [2] rozważany był ten problem dla izotropowych powłok walcowych i zostało tam wykazane, że z dokładnością do $\pm 4\%$ wzory (3.51) i (3.52) można stosować wówczas, gdy $L/\sqrt{Rh} > 14$.

Ponieważ wzory tu wyprowadzone wraz ze zbliżeniem się kształtu powłoki stożkowej do walcowej dążą dokładnie do postaci (3.51), (3.52), więc można przypuszczać, że — dla powłok stożkowych o niezbyt dużym pochyleniu tworzących do osi stożka — granica stosowalności wzorów (3.55), (3.56) będzie niewiele różniła się od granicy dla powłok walcowych. Wydaje się, że otrzymane wzory będzie można stosować z dobrymi wynikami nawet w zakresie $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, wówczas gdy parametr

$$L\sqrt{\frac{\sin\alpha}{R_1 h}} > 18.$$

W celu dokładniejszej oceny omawianego zagadnienia przeprowadzane są obecnie w Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej badania na skręcanych powłokach stożkowych. Wyniki tych badań zestawione zostaną w osobnej publikacji.

Rozpatrzone w pracy zadanie jest rozwiązaniem zagadnienia liniowego. Obecnie jest w trakcie rozwiązywania identyczny problem — tylko w ujęciu nieliniowym.

Literatura cytowana w tekście

1. T. GAŁKIEWICZ, *Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej poddanej skręcaniu* Arch. Bud. Masz., 4, 12 (1965).
2. T. GAŁKIEWICZ, *Analiza znanych wzorów dotyczących stateczności powłok walcowych i stożkowych poddanych skręcaniu*, Zeszyty PŁ (1970), (w druku).
3. Е. И. Григолюк, *Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек*, Расчет пространственных конструкции III, Москва 1955.
4. M. KRÓLAK, *Stateczność ortotropowej powłoki stożkowej ściskanej osiowo — w ujęciu nieliniowym*, Arch. Bud. Masz., 3, 16 (1969).
5. J. LEYKO, *Stateczność ortotropowej powłoki o postaci wycinka stożkowego ściskanego wzdłuż tworzących*, Arch. Bud. Masz., 4, 8 (1961).
6. X. M. МУШТАРИ, *Приближенное решение некоторых задач устойчивости тонкостенной конической оболочки кругового сечения*, Прикл. Мат. Мех., 3, 7 (1943).
7. Z. PARZEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powłoki ortotropowej o skończonej długości*, Arch. Mech. Stos., 3, 17 (1955).
8. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej* (Wzory L. H. Donnella), Arkady, Warszawa 1963.
9. А. Ц. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем* (Wzory W. M. Darewskiego i Ch. M. Muštari), Наука, Москва 1967.

Р е з ю м е

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПОДВЕРГНУТОЙ СКРУЧИВАНИЮ

В работе приведено решение проблемы устойчивости конических ортотропных оболочек шарпирно опертых по торцам и подвергнутых кручению.

Задача решается с помощью приближенного энергетического метода Ритца, в рамках теории тонких оболочек с небольшим наклоном образующей конуса к его оси.

Показывается, что применяя полученные автором, довольно простые с точки зрения вычислений формулы, можно в данном случае определить критический момент, а также число образующихся по окружности волн.

Полученные результаты ближе к экспериментальным данным, чем получаемые по формулам Х. М. Муштари для изотропной оболочки.

S u m m a r y

NONLINEAR STABILITY PROBLEM OF AN ORTHOTROPIC CONICAL SHELL SUBJECTED
TO TENSION

This paper is devoted to the solution of the stability problem of an orthotropic shell with simply supported edges, subjected to torsion.

The problem is solved by the energy method. The obtained solution is valid for conical shells of moderate apex angle.

The critical torque is determined, and the number of waves arising on the circumference is expressed by very simple formulae.

It is shown that for the shells with a small apex angle the derived formulae give better results for practice than the formulae obtained by H. M. Mushtari for isotropic shells.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 marca 1970 r.
