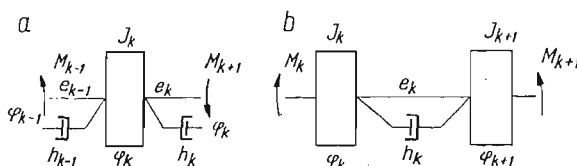


REDUKCJA STOPNI SWOBODY UKŁADÓW DYSKRETNÝCH

JANUSZ BARAN, KRZYSZTOF MARCHELEK (SZCZECIN)

Przy modelowaniu maszyn za pomocą układów dyskretnych bardzo ważną rolę odgrywa dobór liczby stopni swobody modelu. Zwykle model charakteryzuje się znaczną liczbą stopni swobody, co utrudnia analizę i obliczenia, a także może wpływać na dokładność obliczeń. Stąd dążność do modelowania maszyn za pomocą układów dyskretnych o możliwie małej liczbie stopni swobody. Należy jednakże pamiętać o tym, aby model opisywał zasadnicze cechy układu rzeczywistego. Redukcja stopni swobody musi być naukowo uzasadniona, nie można jej dokonywać w sposób dowolny.



Rys. 1. Typowe układy częściowe

Jedną z metod redukcji stopni swobody układów dyskretnych opracował i przedstawił RIWIN w pracy [1]. Metoda Riwina polega na redukcji układów częściowych, charakteryzujących się dużymi częstotliwościami drgań własnych. W większości praktycznych przypadków, zakres częstotliwości sił wymuszających jest taki, że nie wymaga się znajomości wyższych częstotliwości własnych układu. RIWIN wyznaczył wzory redukcyjne dla dwóch podstawowych parametrów układu, mianowicie masy i współczynnika sztywności. Przy obliczeniach charakterystyk dynamicznych modelu na maszynie matematycznej konieczna jest znajomość wartości współczynników tłumienia, aby współrzędne tych charakterystyk przyjmowały wartości skończone. W pracy przedstawiono modyfikację metody Riwina, dającą możliwość wyznaczania wzorów redukcyjnych dla współczynników tłumienia.

Każdy układ dyskretny można rozbić na dwa typowe układy częściowe (rys. 1). Jeśli wprowadzić pojęcie zespolonego współczynnika sztywności

$$(1) \quad K_j = k_j + i\omega h_j = \frac{1}{e_j} + i\omega h_j,$$

gdzie: k_j — współczynnik sztywności,
 e_j — współczynnik podatności,
 h_j — współczynnik tłumienia,

wówczas równania równowagi układu częściowego pokazanego na rys. 1a przyjmą postać

$$(2) \quad \begin{aligned} -K_{k-1}(\varphi_{k-1} - \varphi_k) &= M_{k-1}, \\ J_k \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + K_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + K_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) &= 0, \\ K_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) &= -M_{k+1}. \end{aligned}$$

Dla drgań harmoniczných moment wymuszający i kąt skręcenia wyrazić można w postaci

$$(3) \quad M_j = M_{0j} e^{i\omega t}, \quad \varphi_j = \varphi_{0j} e^{i\omega t}.$$

Podstawiając wyrażenia (3) do równań (2), po dokonaniu prostych przekształceń otrzymuje się

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_{0_{k+1}} &= \left(\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k} - \frac{1}{K_{k-1}K_k} J_k \omega^2 \right) M_{0_{k-1}} + \left(1 - \frac{1}{K_k} J_k \omega^2 \right) \varphi_{0_{k-1}}, \\ M_{0_{k+1}} &= \left(1 - \frac{1}{K_{k-1}} J_k \omega^2 \right) M_{0_{k-1}} - J_k \omega^2 \varphi_{0_{k-1}}, \end{aligned}$$

lub

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_{0_{k+1}} &= \left(\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} M_{0_{k-1}} + 1 - \frac{\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k}}{1} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \varphi_{0_{k-1}}, \\ M_{0_{k+1}} &= \left(1 - \frac{\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k}}{\frac{1}{K_k}} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) M_{0_{k-1}} - J_k \omega^2 \varphi_{0_{k-1}}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(6) \quad \omega_{0a}^2 = \frac{K_{k-1} + K_k}{J_k},$$

gdzie: ω_{0a} — częstotliwość drgań własnych układu częściowego typu a .

Po podstawieniu do wzoru (6) wyrażenia (1) uzyskuje się

$$(7) \quad \omega_{0a}^2 = \frac{1}{J_k \frac{e_{k-1} e_k}{e_{k-1} + e_k}} + i \frac{\omega (h_{k-1} + h_k)}{J_k}.$$

Bezwzględną wartość częstotliwości drgań własnych wyrazić można zależnością

$$(8) \quad |\omega_{0a}^2| = \sqrt{\left(\frac{1}{J_k \frac{e_{k-1} e_k}{e_{k-1} + e_k}} \right)^2 + \left[\frac{\omega}{J_k} (h_{k-1} + h_k) \right]^2}.$$

Rząd wartości poszczególnych składników wzoru (8) po podstawieniu parametrów z tablicy 1 jest następujący:

$$(9) \quad \omega_{1a}^2 \approx \sqrt{10^{12} + \omega^2 10^6}.$$

Z zależności (9) wynika, iż dla $\omega < 10$ rad/sek drugi składnik można pominąć bez szkody dla dokładności wyniku. Wówczas częstotliwość drgań własnych układu a wyznaczyć można z wzoru

$$(10) \quad \omega_{0a}^2 = \frac{e_{k-1} + e_k}{J_k e_{k-1} e_k}.$$

Postępując analogicznie w przypadku układu typu b , równania równowagi tego układu napisać można w postaci

$$(11) \quad \begin{aligned} J_k \ddot{\varphi}_k + K_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}) &= M_k, \\ J_k \ddot{\varphi}_{k+1} + K_k(\varphi_{k+1} - \varphi_k) &= -M_{k-1}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu związków (3) i uporządkowaniu wyrażeń, układ równań (11) przyjmie postać

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi_{0_{k+1}} &= \frac{1}{K_k} M_{0_k} + \left(1 - \frac{J_k + J_{k+1}}{J_{k+1}} \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right) \varphi_{0_k}, \\ M_{0_{k+1}} &= \left(1 - \frac{J_k + J_{k+1}}{J_k} \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right) M_{0_k} - (J_k + J_{k+1}) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right) \omega^2 \varphi_{0_k}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(13) \quad \omega_{0b}^2 = \frac{K_k(J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}},$$

gdzie: ω_{0b}^2 — częstotliwość drgań własnych układu częściowego typu b .

Uwzględniając wyrażenia (1) we wzorze (13) uzyskuje się

$$(14) \quad \omega_{0b}^2 = \frac{J_k + J_{k+1}}{e_k J_k J_{k+1}} + i \frac{\omega h_k (J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}}.$$

Bezwzględna wartość wyrażenia (14) wyznaczyć można ze wzoru

$$(15) \quad |\omega_{0b}^2| = \sqrt{\left(\frac{J_k + J_{k+1}}{e_k J_k J_{k+1}} \right)^2 + \left[\frac{\omega h_k (J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}} \right]^2}.$$

Rząd wielkości poszczególnych składników we wzorze (15) po podstawieniu parametrów z tablicy 1 jest następujący

$$(16) \quad |\omega_{0b}^2| \approx \sqrt{10^{12} + \omega^2 10^6}.$$

Z oszacowania (16) wynika, że dla $\omega < 10^3$ rad/sek drugi składnik we wzorze (15) można bez szkody dla dokładności wyniku pominąć. Wówczas częstotliwość drgań własnych układu b będzie można wyznaczyć ze wzoru

$$(17) \quad \omega_{0b}^2 = \frac{J_k + J_{k+1}}{e_k J_k J_{k+1}}.$$

Układy częściowe a i b będą sobie wówczas równoważne, gdy $\omega_{0a} = \omega_{0b}$. Aby układ typu a mógł być zastąpiony układem typu b parametry układu b muszą spełniać równania:

$$(18) \quad J_k^b = \frac{\frac{1}{K_k^a}}{\frac{1}{K_{k-1}^a} + \frac{1}{K_k^a}} J_k^a,$$

$$(19) \quad J_{k+1}^b = \frac{\frac{1}{K_{k-1}^a}}{\frac{1}{K_{k-1}^a} + \frac{1}{K_k^a}} J_k^a,$$

$$(20) \quad \frac{1}{K_k^b} = \frac{1}{K_{k-1}^a} + \frac{1}{K_k^a}.$$

Po podstawieniu związków (18), (19), (20) do układu równań (12) uzyska się równania ruchu układu zamienionego

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi'_{0_{k-1}} &= \left(\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k} \right) M_{0_k} + \left(1 - \frac{K_k + K_{k-1}}{K_k} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \varphi_{0_k}, \\ M'_{0_{k-1}} &= \left(1 - \frac{K_{k-1} + K_k}{K_{k-1}} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) M_{0_k} - J_k \omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \varphi_{0_k}. \end{aligned}$$

Porównując układ równań (21) z układem równań (5) łatwo zauważyć iż różnią się one między sobą o składnik $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right)$. Jeżeli spełniona jest nierówność $\omega^2 \ll \omega_{0a}^2$ wówczas można przyjąć $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \approx 1$ i uznać, że układy równań (5) i (21) są sobie równoważne.

Można postąpić odwrotnie, zastępując układ typu b układem typu a , wówczas parametry układu a muszą spełniać zależności

$$(22) \quad J_k^a = J_k^b + J_{k+1}^b,$$

$$(23) \quad \frac{1}{K_{k-1}^a} = \frac{J_{k+1}^b}{K_k^b (J_k^b + J_{k+1}^b)}.$$

$$(24) \quad \frac{1}{K_k^a} = \frac{J_k^b}{K_k^b (J_k^b + J_{k-1}^b)}.$$

W wyniku podstawienia związków (22), (23) i (24) do układu równań (5) otrzyma się równania ruchu układu zamienionego różniące się od układu równań (12) o składnik $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right)$. Jeśli spełniona jest nierówność $\omega^2 \ll \omega_{0b}^2$, wówczas można uznać, że oba układy równań są sobie równoważne.

Ogólnie można napisać, że

$$(25) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{J_e},$$

przy czym dla układu typu a

$$(26) \quad J = J_k; \quad e = \frac{e_{k-1}e_k}{e_{k-1} + e_k},$$

zaś dla układu typu b

$$(27) \quad J = \frac{J_k J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}; \quad e = e_k.$$

Przy redukowaniu liczby stopni swobody należy w pierwszej kolejności zredukować układy częściowe charakteryzujące się małym iloczynem Je .

W równaniach zamiany (18)–(20) i (22)–(24) występuje zespolony współczynnik sztywności K . Podstawiając wyrażenie (1) do kolejnych równań zamiany, można ustalić w jakim zakresie częstotliwości składnik zawierający współczynnik tłumienia może być pominięty.

Podstawiając do wzoru (18) zależność (1) i dokonując prostych przekształceń uzyskuje się

$$(28) \quad J_k^b = \frac{e_k^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} J_k^a + i\omega \frac{e_{k-1}^a e_k^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} \left[1 - \frac{e_k^a (h_{k-1}^a + h_k^a)}{e_{k-1}^a + e_k^a} \right] J_k.$$

Dla $\omega < 10^3$ rad/sek część urojoną wyrażenia (28) można pominąć; uzyskuje się wówczas

$$(29) \quad J_k^b = \frac{e_k^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} J_k^a.$$

Po podstawieniu wyrażenia (1) do wzoru (20) i dokonaniu prostych przekształceń uzyskuje się

$$(30) \quad \frac{e_k^b - i\omega h_k^b e_k^{b2}}{1 + (\omega h_k^b e_k^b)^2} = \frac{e_{k-1} - i\omega h_{k-1}^a e_{k-1}^{a2}}{1 + (\omega h_{k-1}^a e_{k-1}^a)^2} + \frac{e_k^a - i\omega h_k^a e_k^{a2}}{1 + (\omega h_k^a e_{k-1}^a)^2}.$$

Dla $\omega \ll 10^6$ rad/sek wyrażenie $1 + (\omega h_j e_j)^2 \approx 1$ i wówczas zależność (30) można napisać w postaci

$$(31) \quad e_k^b - i\omega h_k^b e_k^{b2} = (e_{k-1}^a + e_k^a) - i\omega (h_{k-1}^a e_{k-1}^{a2} + h_k^a e_k^{a2}).$$

Postępując analogicznie wyznaczyć można równanie zamiany dla masy $k+1$

$$(32) \quad J_{k+1}^b = \frac{e_{k-1}^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} J_k^a.$$

Z porównania części rzeczywistej i urojonej lewej i prawej strony równania (31) wynikają związki

$$(33) \quad e_k^b = e_{k-1}^a + e_k^a,$$

$$(34) \quad h_k^b = \frac{h_{k-1}^a (e_{k-1}^a)^2 + h_k (e_k^a)^2}{(e_k^b)^2}.$$

W przypadku zamiany układu b układem a równania zmiany, po dokonaniu podstawienia związku (1) do wyrażeń (23)–(24) uzyska się odpowiednio dla $\omega < 10^3$ rad/sek.

$$(35) \quad e_{k-1}^a = \frac{J_{k+1}^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} e_k^b,$$

$$(36) \quad e_k^a = \frac{J_k^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} e_k^b,$$

$$(37) \quad h_{k-1}^a = \frac{J_{k+1}^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} \left(\frac{e_k^b}{e_{k-1}^a} \right)^2 h_k^b,$$

$$(38) \quad h_k^a = \frac{J_k^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} \left(\frac{e_k^b}{e_k^a} \right)^2 h_k^b.$$

Przykład: Przedstawioną metodę redukcji stopni swobody zastosowano przy obliczeniach charakterystyk amplitudowo-fazowych napędu głównego obrabiarki.

Napęd główny frezarki Fu1a można zastąpić modelem o ośmiu stopniach swobody [2]. Postać analityczna charakterystyki amplitudowo-fazowej dla kąta skręcenia mierzzonego na wrzecionie jest skomplikowana. Złożoność charakterystyki amplitudowo-fazowej pogłębia się ze wzrostem liczby stopni swobody. Dlatego też przy obliczeniach praktycznych (projektowych) dąży się do zastosowania możliwie najmniej skomplikowanego modelu, a więc o możliwie najmniejszej liczbie stopni swobody.

Dokonano redukcji układu o ośmiu stopniach swobody do układu o pięciu stopniach swobody. Parametry układu wyjściowego podano w tabelicy 1.

Tablica 1. Wartości parametrów określających właściwości dynamiczne napędu frezarki Fu1a

Lp.	n = 180 obr/min		
	J_i kGmsek ²	h_i kGmsek	k_i kGm/rad.
1.	$25,7 \cdot 10^{-3}$	0,18	$7,53 \cdot 10^3$
2.	$1,25 \cdot 10^{-3}$	0,042	$3,79 \cdot 10^3$
3.	$0,284 \cdot 10^{-3}$	0,019	$0,839 \cdot 10^3$
4.	$0,769 \cdot 10^{-3}$	0,037	$1,372 \cdot 10^3$
5.	$1,45 \cdot 10^{-3}$	0,0975	$4,01 \cdot 10^3$
6.	$6,50 \cdot 10^{-3}$	0,187	$2,80 \cdot 10^3$
7.	$96,00 \cdot 10^{-3}$	0,72	$5,25 \cdot 10^3$
8.	$99,44 \cdot 10^{-3}$	13,00	$1,192 \cdot 10^3$

W rozpatrywanym przykładzie zastępować się będzie układy typu a układami typu b . W tym celu najwygodniej jest posługiwać się metodą tablicową. W tabelicy 2 podano schemat modelu dyskretnego opisany wartościami parametrów J_j , h_j , e_j oraz obliczone wartości parametrów układów częściowych według wzorów (26) i (27). Z tabelicy 2 wynika, że najmniejszą wartość iloczynu $J_j e_j$ ma układ częściowy typu a o masie J_3 . Układ ten zamieniono układem typu b o parametrach J_3^* , J_3^{**} , e_3^* i h_3^* (rys. 2).

Tablica 2

	$25,7 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$0,284 \cdot 10^{-3}$	$0,769 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$6,50 \cdot 10^{-3}$	$96,00 \cdot 10^{-3}$	$99,40 \cdot 10^{-3}$
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
	$0,133 \cdot 10^{-3}$	$0,264 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$0,728 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,358 \cdot 10^{-3}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,84 \cdot 10^{-3}$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
	0,18	0,042	0,019	0,037	0,0975	0,187	0,72	13,00
$J = \frac{J_k \cdot J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$0,231 \cdot 10^{-3}$	$0,208 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$6,07 \cdot 10^{-3}$	$50,2 \cdot 10^{-3}$	
$J \cdot e_k$	$0,16 \cdot 10^{-6}$	$0,061 \cdot 10^{-6}$	$0,248 \cdot 10^{-6}$	$0,363 \cdot 10^{-6}$	$0,295 \cdot 10^{-6}$	$2,17 \cdot 10^{-6}$	$9,55 \cdot 10^{-6}$	
$e = \frac{e_k \cdot e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}$	$0,0885 \cdot 10^{-3}$	$0,215 \cdot 10^{-3}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,186 \cdot 10^{-3}$	$0,148 \cdot 10^{-3}$	$0,124 \cdot 10^{-3}$	$0,16 \cdot 10^{-3}$	
$J_k \cdot e$	$0,11 \cdot 10^{-6}$	$0,061 \cdot 10^{-6}$	$0,345 \cdot 10^{-6}$	$0,27 \cdot 10^{-6}$	$0,96 \cdot 10^{-6}$	$11,9 \cdot 10^{-6}$	$15,9 \cdot 10^{-6}$	

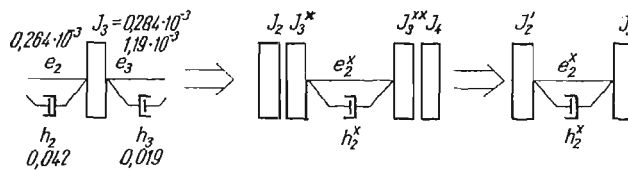
Parametry układu obliczono na podstawie wzorów (29), (30), (33) i (34).

$$J_3^* = \frac{e_3}{e_2 + e_3} J_3 = 0,233 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]},$$

$$J_3^{**} = \frac{e_2}{e_2 + e_3} J_3 = 0,051 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]},$$

$$e_3^* = e_2 + e_3 = 1,454 \cdot 10^{-3} \text{ [rad/kGm]},$$

$$h_3^* = \frac{h_2 e_2^2 + h_3 e_3^2}{e_3^{*2}} = \frac{0,042 \cdot 0,264^2 + 0,019 \cdot 1,19^2}{1,454^2} = 0,014 \text{ [kGmsek]}.$$



Rys. 2. Schemat zamiany układu typu a układem typu b przy redukcji układu o ośmiu stopniach swobody

Momenty bezwładności J_2 i J_3^* oraz J_3^{**} i J_4 sumuje się, uzyskując układ częściowy o momentach bezwładności J_2' i J_3' (rys. 2)

$$J_2' = J_2 + J_3^* = 1,483 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]},$$

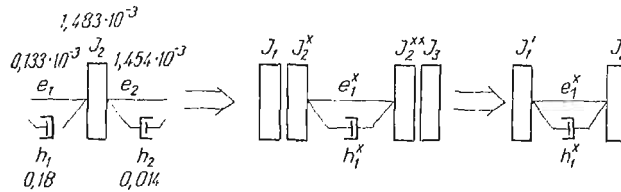
$$J_3' = J_3^{**} + J_4 = 0,820 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]}.$$

W wyniku zamiany układu częściowego typu a układem typu b zredukowano liczbę stopni swobody modelu napędu głównego frezarki Fuła o jeden, uzyskując model o siedmiu stopniach swobody.

Przy dalszej redukcji stopni swobody postępuje się podobnie. W tablicy 3 podano schemat modelu o siedmiu stopniach swobody, jego parametry oraz parametry układów częściowych. Najmniejszą wartość iloczynu $J_i e_i$ ma układ częściowy typu *a* o masie J_2 .

Tablica 3

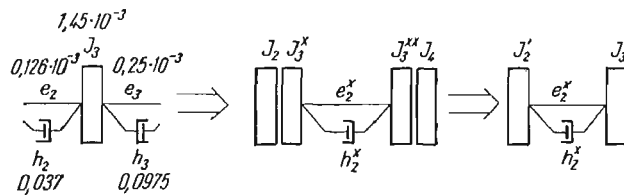
	$25,9 \cdot 10^3$	$1,483 \cdot 10^3$	$0,82 \cdot 10^3$	$1,45 \cdot 10^3$	$6,50 \cdot 10^3$	$96,00 \cdot 10^3$	$99,40 \cdot 10^3$
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
	$0,133 \cdot 10^3$	$1,454 \cdot 10^3$	$0,726 \cdot 10^3$	$0,25 \cdot 10^3$	$0,358 \cdot 10^3$	$0,19 \cdot 10^3$	$0,84 \cdot 10^3$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
	0,18	0,014	0,037	0,0975	0,187	0,72	13,00
$J = \frac{J_k \cdot J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}$		$1,4 \cdot 10^3$	$0,53 \cdot 10^3$	$0,52 \cdot 10^3$	$1,18 \cdot 10^3$	$6,07 \cdot 10^3$	$50,2 \cdot 10^3$
$J \cdot e_k$		$0,186 \cdot 10^6$	$0,77 \cdot 10^6$	$0,378 \cdot 10^6$	$0,295 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^6$	$9,55 \cdot 10^6$
$e = \frac{e_k \cdot e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}$		$0,122 \cdot 10^3$	$0,485 \cdot 10^3$	$0,186 \cdot 10^3$	$0,148 \cdot 10^3$	$0,124 \cdot 10^3$	$0,16 \cdot 10^3$
$J_k \cdot e$		$0,181 \cdot 10^6$	$0,40 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,96 \cdot 10^6$	$11,9 \cdot 10^6$	$15,9 \cdot 10^6$

Rys. 3. Schemat zamiany układu typu *a* układem typu *b* przy redukcji układu o siedmiu stopniach swobody

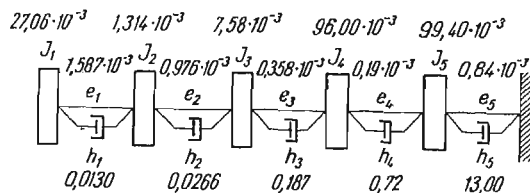
Tablica 4

	$27,06 \cdot 10^3$	$0,943 \cdot 10^3$	$1,45 \cdot 10^3$	$6,50 \cdot 10^3$	$96,00 \cdot 10^3$	$99,40 \cdot 10^3$
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
	$1,582 \cdot 10^3$	$0,726 \cdot 10^3$	$0,25 \cdot 10^3$	$0,358 \cdot 10^3$	$0,19 \cdot 10^3$	$0,84 \cdot 10^3$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
	0,013	0,037	0,0975	0,187	0,72	13,00
$J = \frac{J_k \cdot J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}$		$0,915 \cdot 10^3$	$0,57 \cdot 10^3$	$1,18 \cdot 10^3$	$6,07 \cdot 10^3$	$50,2 \cdot 10^3$
$J \cdot e_k$		$1,45 \cdot 10^6$	$0,42 \cdot 10^6$	$0,295 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^6$	$9,55 \cdot 10^6$
$e = \frac{e_k \cdot e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}$		$0,5 \cdot 10^3$	$0,186 \cdot 10^3$	$0,148 \cdot 10^3$	$0,124 \cdot 10^3$	$0,16 \cdot 10^3$
$J_k \cdot e$		$0,47 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,96 \cdot 10^6$	$11,9 \cdot 10^6$	$15,9 \cdot 10^6$

Układ ten zamieniono układem typu *b*. Schemat zamiany pokazano na rys. 3. Uzyskano model o sześciu stopniach swobody. W tablicy 4 podano schemat modelu o sześciu stopniach swobody, jego parametry oraz parametry układów częściowych. Najmniejszą wartość iloczynu $J_i e_i$ ma układ częściowy typu *a* o masie J_3 . Układ ten zamieniono układem



Rys. 4. Schemat zamiany układu typu *a* układem typu *b* przy redukcji układu o sześciu stopniach swobody



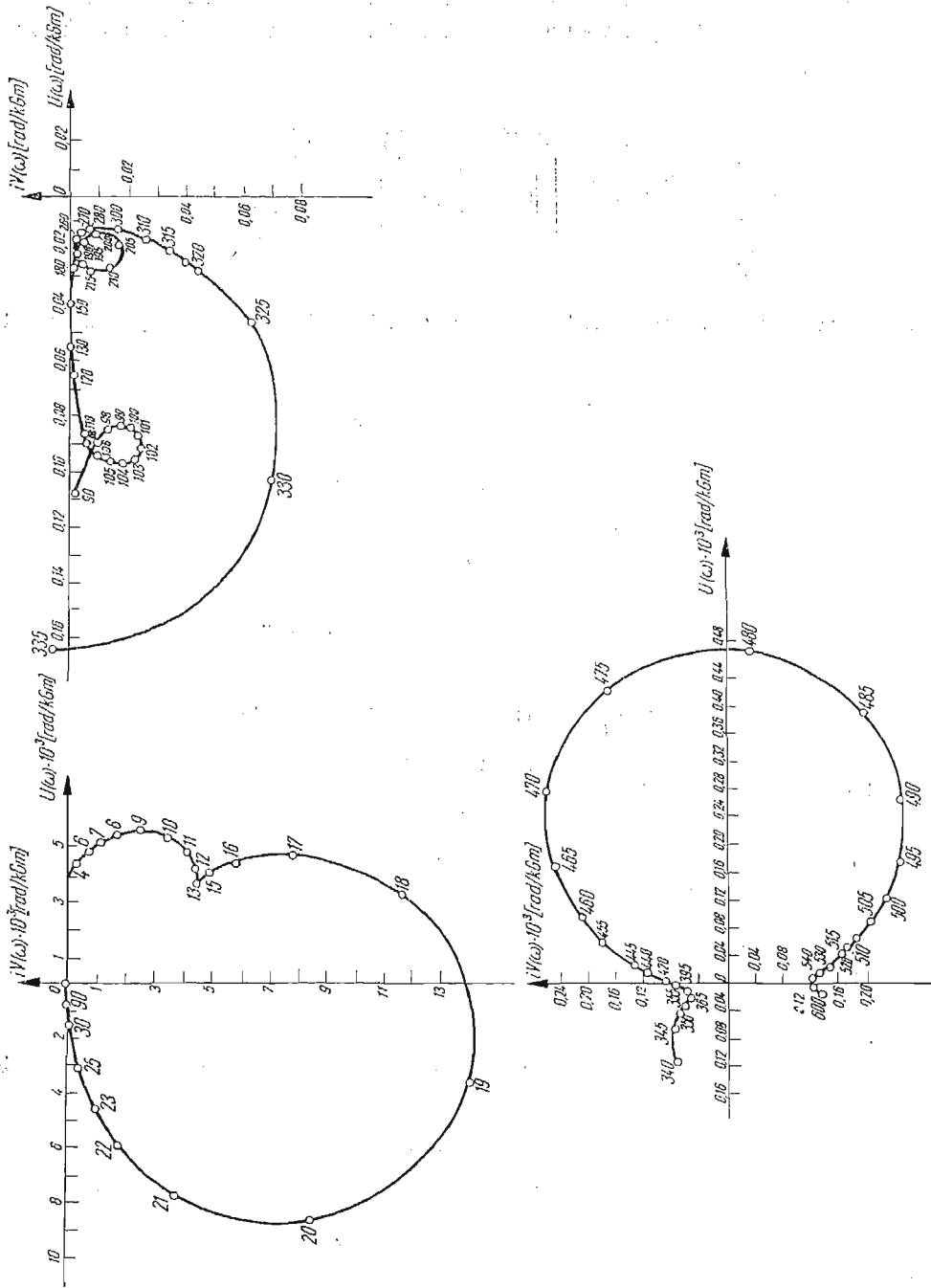
Rys. 5. Model układu o pięciu stopniach swobody

Tablica 5. Parametry modelu o 5 stopniach swobody

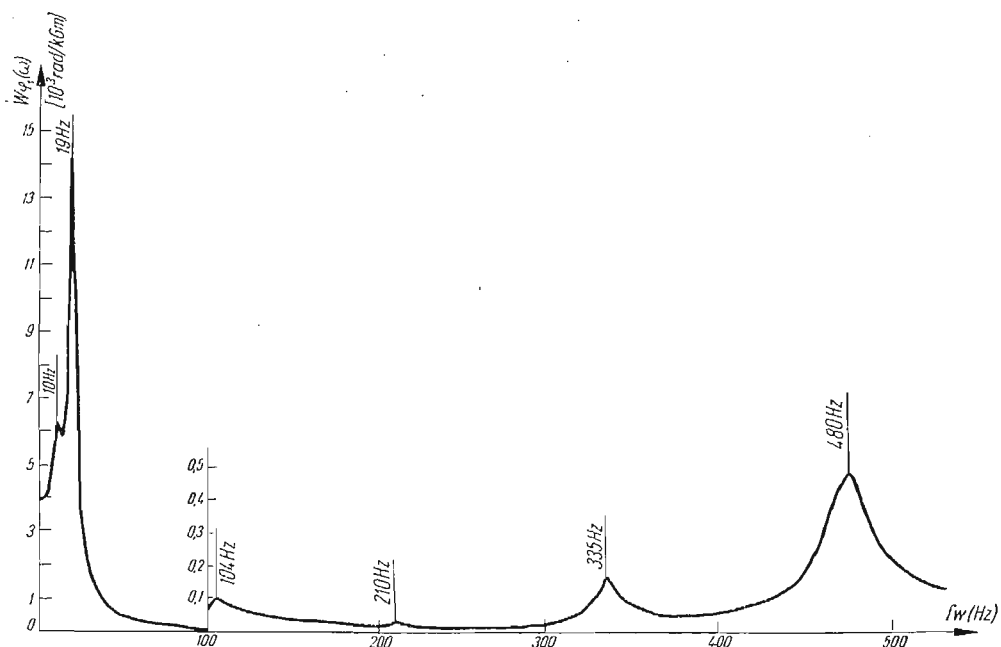
Lp.	n = 180 obr/min		
	J_i kGmsek ²	h_i kGmsek	k_i kGm/rad
1.	$27,06 \cdot 10^{-3}$	0,013	$0,63 \cdot 10^3$
2.	$1,314 \cdot 10^{-3}$	0,0266	$1,020 \cdot 10^3$
3.	$7,58 \cdot 10^{-3}$	0,187	$2,80 \cdot 10^3$
4.	$96,00 \cdot 10^{-3}$	0,720	$5,25 \cdot 10^3$
5.	$99,40 \cdot 10^{-3}$	13,00	$1,192 \cdot 10^3$

Tablica 6. Częstotliwości drgań własnych napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej n = 180 obr/min

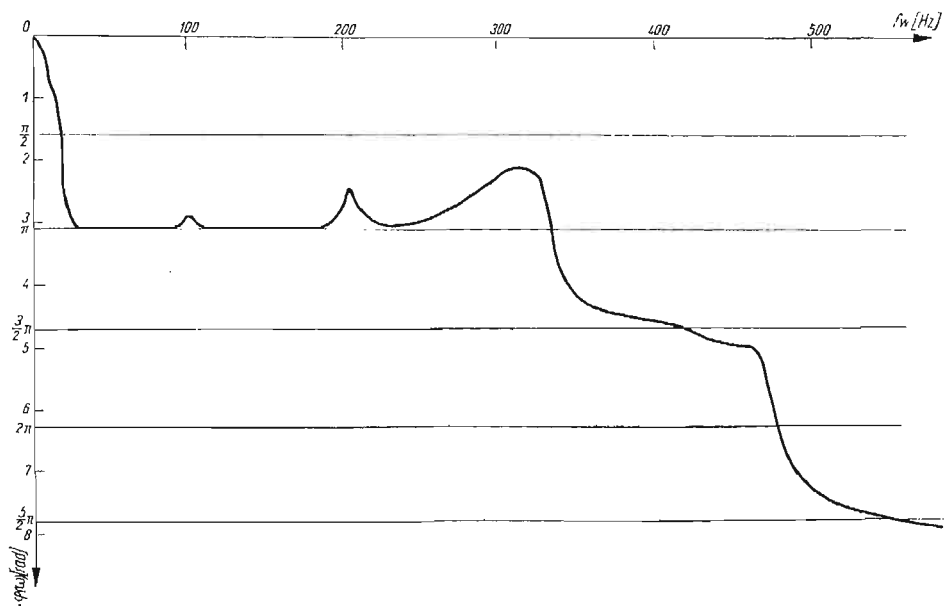
MODEL	Częstotliwości drgań własnych w Hz						
	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}	f_{06}	f_{07}
8 masowy	10,6	19,8	53,2	102,6	227,2	346,6	387,6
5 masowy	10,6	19,7	53,2	102,6	187,2	—	—



Rys. 6. Charakterystyka amplitudowo-fazowa modelu o ośmiu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180 \text{ obr/min}$



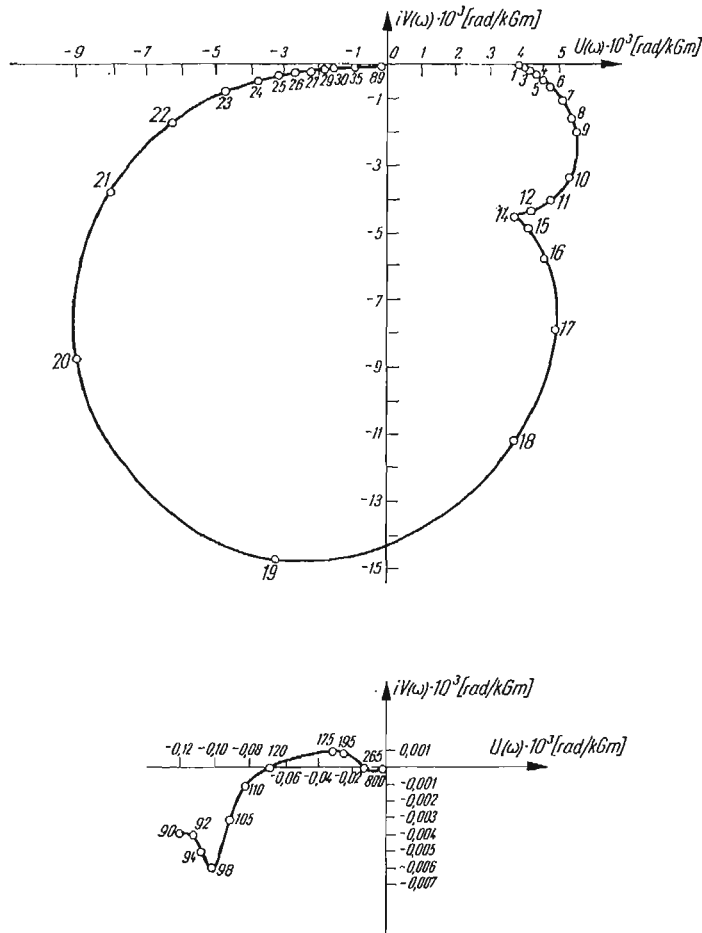
Rys. 7. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu o ośmiu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min



Rys. 8. Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa modelu o ośmiu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min

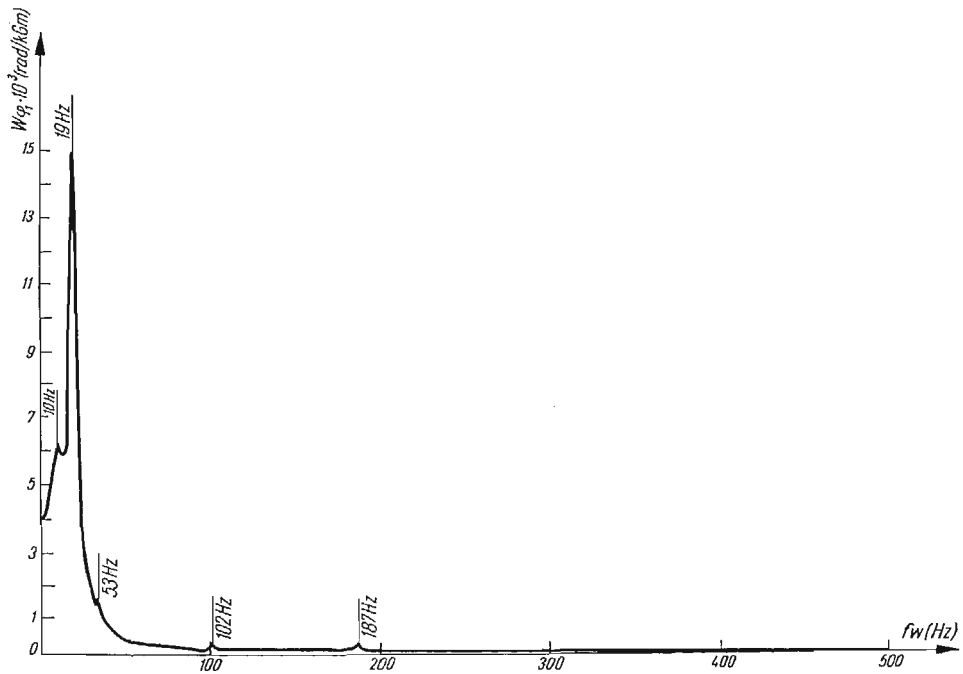
typu *b*. Schemat zamiany pokazano na rys. 4. Uzyskano w ten sposób model o pięciu stopniach swobody (rys. 5), którego parametry podano w tablicy 5.

W tablicy 6 podano wartości częstotliwości drgań własnych modelu o ośmiu oraz modelu o pięciu stopniach swobody, obliczone metodą HOLZERA [3] na maszynie matematycznej.

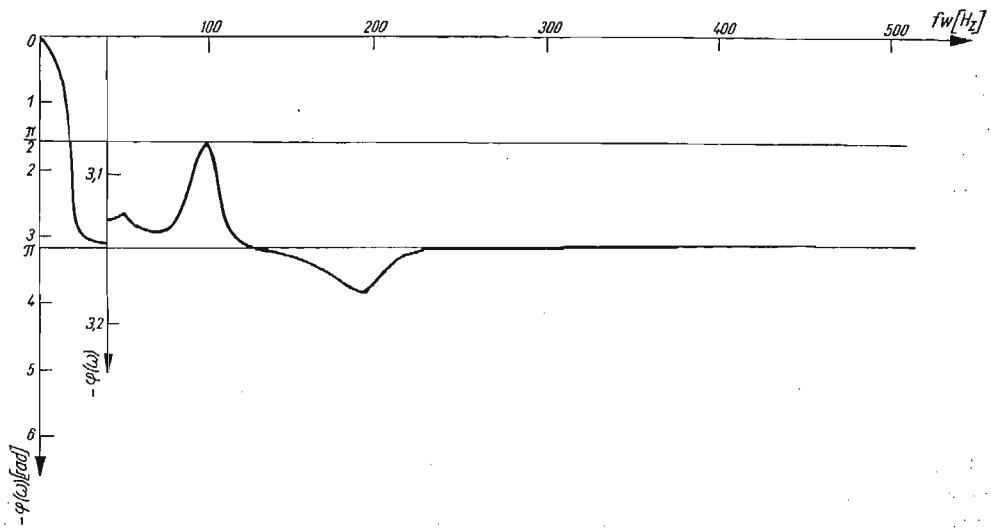


Rys. 9. Charakterystyka amplitudowo-fazowa modelu o pięciu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min

Na rys. 6, 7 i 8 pokazano wykresy charakterystyki amplitudowo-fazowej, charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i charakterystyki fazowo-częstotliwościowej modelu o ośmiu stopniach swobody, natomiast na rys. 9, 10 i 11 pokazano te same charakterystyki dla modelu o pięciu stopniach swobody. Charakterystyki obliczono na maszynie matematycznej.



Rys. 10. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu o pięciu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min



Rys. 11. Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa modelu o pięciu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min

Wnioski

1. Z porównania uzyskanych wyników dla redukcji układu o ośmiu stopniach swobody (tablica 6 oraz rys. 6–11) wynika, że proponowana metoda daje dobre wyniki dla celów praktycznych w zakresie częstotliwości $\omega < 10^3$ rad/sek. W zakresie częstotliwości $\omega > 10^3$ rad/sek występują rozbieżności zarówno w przypadku częstotliwości drgań własnych (tablica 6), jak w przypadku charakterystyk fazowo-częstotliwościowych. Wynika stąd, że dla częstotliwości $\omega > 10^3$ rad/sek nie można pomijać członów urojonych we wzorach redukcyjnych.

2. Różnice w wartościach rzędnych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych (rys. 7 i 10) rosną ze wzrostem częstotliwości f . Wynika to z powodu malejącej dokładności obliczeń na maszynie matematycznej. Zastosowanie dokładniejszej maszyny matematycznej powinno dać wyniki praktycznie zgodne, szczególnie w zakresie $\omega < 10^3$ rad/sek.

3. Przyjęcie w proponowanej metodzie idei kolejnej redukcji układów częściowych o najwyższych częstotliwościach drgań własnych jest uzasadnione, ponieważ amplitudy drgań w rezonansach o dużych częstotliwościach są wielokrotnie (nawet kilkaset razy) mniejsze od amplitud drgań w rezonansie podstawowym, który występuje zwykle przy jednej z niższych częstotliwości drgań własnych.

4. Wyznaczenie wzorów opisujących współczynniki tłumienia zastępczego układu częściowego ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ umożliwia zastosowanie maszyn matematycznych do obliczeń charakterystyk dynamicznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Е. И. Ривин, *Метод уменьшения степеней свободы в расчетных схемах цепных и разветвленных системах*, Машиностроение № 5, 1966.
2. K. MARCHELEK, *Teoretyczne podstawy dynamicznych obliczeń napędów głównych frezarek*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej nr 103, Prace Monograficzne nr 49, Szczecin 1968.
3. J. P. DEN HARTOG, *Mechanical Vibrations*, New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Company, 1956.

Резюме

ПРИВЕДЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В работе содержится видоизмененный метод Э. И. Ривина приведения степеней свободы дискретных систем. При введении понятия комплексного коэффициента жесткости получены формулы для приведения коэффициентов затухания. Представленный метод приведения степеней свободы применен для расчета амплитудно-фазовых характеристик главного привода станка Fu-1a. На основе полученных результатов найдено, что предлагаемый метод дает хорошие для практических целей результаты в диапазоне $\omega < 10^3$ рад/сек.

S u m m a r y

REDUCTION OF THE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM IN DISCRETE SYSTEMS

The paper presents a modification of Rivin's method of reduction of the number of degrees of freedom of discrete systems. By introducing the notion of a complex rigidity coefficient the reduction formulae for the damping coefficients are obtained. The method is then applied to the calculation of the amplitude-phase characteristics of the main drive of the Fu-1a milling machine. The results of these calculations indicate that the proposed method is practically accurate and applicable in the frequency range of $\omega < 10^3 \text{ sec}^{-1}$.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1970 r.
