

WYBOCZENIE TRÓJWARSTWOWEJ PŁYTY KOŁOWEJ POZA ZAKRESEM SPRĘŻYSTYM*

ZENON W A S Z C Z Y S Z Y N (KRAKÓW)

1. Wstęp

Przy obliczaniu obciążeń krytycznych płyt poza zakresem sprężystym korzystamy z dwóch koncepcji — podobnie jak przy badaniu stateczności prętów ściskanych. Pierwsza, tzw. koncepcja ustalonego obciążenia zakłada, że po wyboczeniu obciążenie nie ulega zmianie, a w chwili utraty stateczności powstają natychmiast pełne strefy lokalnych odciążeń (procesów biernych). Druga koncepcja dopuszcza wzrastanie obciążenia i rozwijanie się stref procesów biernych w wyniku powstawania pozakrytycznych ugięć. W prętach analogiczne podejścia łączy się odpowiednio z nazwiskami ENGESERA i KÁRMÁNA oraz SHANLEYA (por. [29]). W odniesieniu do płyt pierwszą koncepcję zaproponowali ILIUSZYN [6] oraz HANDELMAN i PRAGER [4], a drugą koncepcję — wzrastającego obciążenia — zapoczątkowali STOWELL [22] oraz PEARSON [14]**.

W porównaniu z prętami, znaczną komplikacją w zagadnieniach stateczności płyt jest konieczność uwzględnienia złożonego stanu naprężeń. Stosowano tutaj różne teorie plastyczności. Na teorii odkształceniowej, obok wymienionych prac [6, 22] opierał swoje rozważania BIJLAARD [1]. Z prac korzystających z równań konstytutywnych teorii płynięcia plastycznego, obok [4, 14] należy wymienić pracę [5] HOPKINSA.

Przytoczone prace dotyczą płyt prostokątnych. Płytami kołowymi zajmowali się TOŁOKONNIKOW [26, 27], LEPIK [9, 10] i POPOW [16].

Podstawową trudnością w koncepcji ustalonego obciążenia jest wyznaczanie położenia stref procesów biernych, zarówno wzdłuż grubości płyty, jak też w odniesieniu do jej powierzchni środkowej. Trudność tę można obejść w wielu przypadkach przez zastosowanie metody przybliżonej ILIUSZYNA [6], która zakłada zerowanie się wariacji sił podłużnych wewnątrz całej płyty.

Rachunki znacznie upraszczają się, jeśli przekrój pełnościenny zastąpimy idealnym przekrojem «sandwiczowym». Taka aproksymacja często stosowana w teorii plastyczności (por. [24]), pozwala na dobre opisanie zachowania się konstrukcji. Przyjęcie takiego modelu płyty umożliwiło KLUSZNIKOWI [7] przeprowadzenie jakościowej analizy utraty

*) Podstawowe tezy pracy zostały przedstawione na sympozjum nt. stateczności, organizowanym przez Oddział Łódzki PTMTS i Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej (Łódź, 18–19.XI.1971).

**) Przy cytowaniu literatury ograniczono się do prac podstawowych i bezpośrednio związanych z obecną pracą. Obszerniejszy przegląd literatury dotyczącej wyboczenia płyt poza zakresem sprężystym można znaleźć w [29].

stateczności z punktu widzenia stosowania różnych koncepcji i różnych teorii plastyczności.

W obecnej pracy zajmiemy się szczegółowo obliczaniem symetrycznych postaci utraty stateczności idealnej, symetrycznej płyty trójwarstwowej (w całym przekroju obowiązywać będzie hipoteza odcinka normalnego, płaski stan naprężenia jest jednorodny wzdłuż nośnych warstw zewnętrznych o jednakowej grubości i własnościach). Będziemy opierali się na liniowych równaniach teorii małych ugięć, przyjmując materiał izotropowy i ściśliwy. Taki przekrój pozwoli na otrzymanie ścisłych rozwiązań, podobnych do znanych z teorii stateczności sprężystej, dla różnych koncepcji i teorii plastyczności.

Otrzymane rozwiązania przeanalizujemy w granicznym przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego, a w oparciu o metodę rozdzielania sztywności BIJLAARDA [2] uogólnimy otrzymane wzory dla opisanego ogólnej utraty stateczności płyty trójwarstwowej z wypełniaczem lekkim.

Wszystkie równania, i wzory podamy w postaci bezwymiarowej, a obok powszechnie stosowanych, będziemy posługiwali się następującymi oznaczeniami:

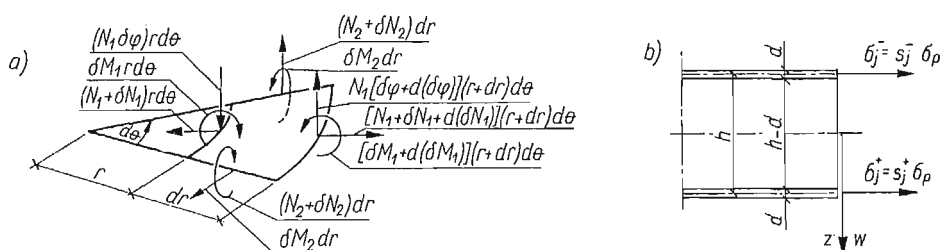
A_j, B_j, C_{jr}	elementy macierzy sztywności,
C_j, D_j	stałe całkowania,
α, β^2	bezwymiarowe ciśnienie radialne według (2.16),
d, h	grubość i odległość osi ciężkości warstw zewnętrznych przekroju trójwarstwowego
ε_p, σ_p	odkształcenie i naprężenie na granicy plastyczności przy jednoosiowym ścisaniu,
$e_j = \varepsilon_j/\varepsilon_p$	względne odkształcenia główne,
$\varepsilon_j = \varepsilon_{j0}/\varepsilon_p, k_j = \kappa_j h/\varepsilon_p$	uogólnione odkształcenia płaszczyzny środkowej,
E_{jr}	macierz transformacji w związkach fizycznych,
E, ν	stałe sprężyste warstw zewnętrznych,
G_c	moduł odkształcenia postaciowego wypełniacza,
$f_s = E_s/E, f_t = E_t/E$	bezwymiarowe moduły: sieczny i styczny,
$n_j = \frac{N_j}{2d\sigma_p}, m_j = \frac{M_j}{dh\sigma_p}$	bezwymiarowe siły podłużne i momenty zginające,
$p = \frac{P}{2d\sigma_p}$	bezwymiarowa intensywność zewnętrznego ciśnienia radialnego,
$s_j = s_j/\sigma_p, s_i = s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2$	bezwymiarowe naprężenia główne i intensywność odkształceń,
τ	współczynnik kątowy stycznej w punkcie bifurkacji stanów równowagi,
$u = \bar{u}/h, w = \bar{w}/h, \varphi$	bezwymiarowe przemieszczenie radialne i normalne oraz kąt obrotu normalnej do płaszczyzny środkowej płyty,
$\xi = r/h$	bezwymiarowa zmienna niezależna,
$x = \beta\xi$	argument funkcji Bessela.

2. Podstawowe równania

W równaniach będziemy posługiwali się wariacjami odpowiednich wielkości statycznych i kinematycznych, odpowiadających przejściu od stanu tarczowego do bliskiego stanu giętnego, spełniającego narzucone warunki brzegowe.

2.1. Równania równowagi. Dla symetrycznej postaci wybozczenia równania równowagi elementu płyty (rys. 1a) można doprowadzić, zgodnie z teorią małych ugięć (por. [6]), do postaci

$$(2.1) \quad \frac{d}{dr}(r\delta N_1) - \delta N_2 = 0, \quad \frac{d}{dr}(r\delta M_1) - \delta M_2 = rN_1 \delta\varphi.$$



Rys. 1

Równania te przekształcimy do postaci bezwymiarowej korzystając z podanych na wstępie oznaczeń,

$$(2.2) \quad \delta n_1' - \frac{1}{\xi}(\delta n_2 - \delta n_1) = 0,$$

$$\delta m_1' - \frac{1}{\xi}(\delta m_2 - \delta m_1) = 2n_1 \delta\varphi,$$

gdzie kreską oznaczono różniczkowanie względem zmiennej niezależnej $\xi = r/h$.

Zgodnie z przyjętym modelem płyty o idealnym przekroju «sandwich», siły podłużne i momenty obliczamy ze wzorów (rys. 1b)

$$(2.3) \quad N_j = d(\sigma_j^+ + \sigma_j^-), \quad M_j = \frac{dh}{2}(\sigma_j^+ - \sigma_j^-), \quad \text{dla } j = 1, 2.$$

Wzory te obowiązują również w odniesieniu do wariacji odpowiednich wielkości i w postaci bezwymiarowej przyjmują one postać

$$(2.4) \quad \delta n_j = \frac{1}{2}(\delta s_j^+ + \delta s_j^-), \quad \delta m_j = \frac{1}{2}(\delta s_j^+ - \delta s_j^-) \quad \text{dla } j = 1, 2.$$

2.2. Związki geometryczne. Zgodnie z przyjętym założeniem Kirchhoffa, w płycie będzie obowiązywała hipoteza odcinka normalnego

$$(2.5) \quad \delta\epsilon_j = \delta\epsilon_{j0} + z\delta\kappa_j,$$

dzięki czemu można obliczyć wariacje odkształceń $\delta e_j = \delta \varepsilon_j / \varepsilon_p$ w zewnętrznych warstwach płyty

$$(2.6) \quad \delta e_j^\pm = \delta \varepsilon_j \pm \frac{1}{2} \delta k_j,$$

gdzie znaki +, - należy przypisać warstwom zgodnie z rys. 1b.

Wielkości n_j i m_j będziemy dalej nazywali uogólnionymi siłami wewnętrznymi, a odpowiednio ε_j i k_j — uogólnionymi odkształceniami. Związki geometryczne pomiędzy wariacjami uogólnionych odkształceń i przemieszczeniami płaszczyzny środkowej piszemy od razu w postaci bezwymiarowej

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_1 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \delta u', & \delta \varepsilon_2 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\delta u}{\xi}, \\ \delta k_1 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \delta \varphi', & \delta k_2 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\delta \varphi}{\xi}. \end{aligned}$$

2.3 Równania fizyczne. Związek fizyczny pomiędzy wariacjami głównych naprężeń i odkształceń został wyprowadzony w [28] i ma postać

$$(2.8) \quad \delta s_j = E_{jr} \delta e_r, \quad j, r = 1, 2,$$

gdzie obowiązuje konwencja sumacyjna dla powtarzającego się wskaźnika. Elementy macierzy E_{jr} zależą od typu procesu i stopnia uplastycznienia materiału w rozpatrywanym punkcie ustroju. W pracy [28] wyprowadzono wzory na E_{jr} dla materiału sprężysto-plastycznego, ściśliwego, izotropowego lub ortotropowego oraz dla różnych teorii plastyczności.

W obecnej pracy ograniczymy się do materiału izotropowego, lecz ściśliwego, oraz do przypadku równomiernego dwuwymiarowego ciśnienia

$$(2.9) \quad s_1 = s_2 = -p, \quad s_3 = 0,$$

jakie będzie występowało w stanie tarczowym rozpatrywanej płyty.

Typ procesu określimy według znaku wariacji intensywności naprężeń; po uwzględnieniu (2.9) otrzymujemy

$$(2.10) \quad \delta s_i = \frac{1}{s_i} \left[\left(s_1 - \frac{1}{2} s_2 \right) \delta s_1 + \left(s_2 - \frac{1}{2} s_1 \right) \delta s_2 \right] = -\frac{1}{2} (\delta s_1 + \delta s_2).$$

W przypadku procesów czynnych, a więc takich, gdy $\delta s_i \geq 0$, będziemy korzystali z następujących wzorów, odpowiadających wzmocnieniu izotropowemu:

a) teoria odkształceniowa

$$(2.11a) \quad \begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= \frac{1}{M} (f_s + 3f_t), & E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{M} [3f_t - f_s - 2(1-2\nu)f_s f_t], \\ M &= [3 - (1-2\nu)f_s][1 + (1-2\nu)f_t]; \end{aligned}$$

b) teoria płynięcia

$$(2.11b) \quad \begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= \frac{1}{M} (1 + 3f_t), & E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{M} [-1 + (1+4\nu)f_t], \\ M &= 2(1+\nu)[1 + (1-2\nu)f_t]. \end{aligned}$$

We wzorach tych bezwymiarowe moduły: sieczny $f_s = E_s/E$ i styczny $f_t = E_t/E$, należy przyjąć na podstawie próby jednoosiowego ściskania.

Dla procesów biernych, a więc takich, gdy $\delta s_i < 0$, w odniesieniu do przyrostów obowiązuje prawo Hooke'a i należy przyjąć

$$(2.12) \quad E_{11} = E_{22} = \frac{1}{1-\nu^2}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{\nu}{1-\nu^2}.$$

Przy posługiwaniu się wzorami teorii odkształceniowej na granicy strefy procesów czynnych i biernych mogą wystąpić nieciągłości w wartościach przyrostów naprężeń. Wynika to z braku ciągłego przejścia od (2.11a) do (2.12), gdy $f_t = 1$. Przejście takie istnieje¹⁾ dla $f_s = 1$. Sprzeczności takiej nie wykazuje teoria płynięcia plastycznego, gdyż wzory (2.11b) są niezależne od wartości f_s modułu siecznego.

Po podstawieniu (2.8) do (2.4) i wykorzystaniu (2.6) otrzymujemy potrzebne równania fizyczne, które napiszemy w postaci macierzowej

$$(2.13) \quad \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & B_2 & A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 & B_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \kappa_1/2 \\ \delta \kappa_2/2 \end{bmatrix},$$

gdzie elementy macierzy sztywności wynoszą

$$(2.14) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (E_{11}^+ + E_{11}^-), & B_1 &= \frac{1}{2} (E_{12}^+ + E_{12}^-), \\ A_2 &= \frac{1}{2} (E_{11}^+ - E_{11}^-), & B_2 &= \frac{1}{2} (E_{12}^+ - E_{12}^-). \end{aligned}$$

Przy posługiwaniu się wzorami (2.11b) teorii płynięcia plastycznego równanie (2.13) upraszcza się, gdyż wtedy $A_2 = B_2$.

2.4. Podstawowy układ równań i jego rozwiązanie. Pełny układ równań (2.1), (2.7) i (2.13) można w drodze eliminacji doprowadzić do dwóch równań różniczkowych z nieznanymi funkcjami $\delta\varphi$ i δu ,

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \delta\varphi'' + \frac{\delta\varphi'}{\xi} + \left(\beta^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \delta\varphi &= 0, \\ \delta u'' + \frac{\delta u}{\xi} - \frac{\delta u}{\xi^2} &= \alpha \delta\varphi, \end{aligned}$$

gdzie użyto różnych oznaczeń na bezwymiarową promieniową siłę podłużną

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \beta^2 &= -\frac{4A_1}{A_1^2 - A_2^2} \varepsilon_p n_1 = \frac{2\varepsilon_p}{C_{11}} p, & C_{11} &= \frac{A_1}{2} - \frac{A_2^2}{2A_1}, \\ \alpha &= -\frac{2A_2}{A_1^2 - A_2^2} \varepsilon_p n_1 = \frac{A_2}{2A_1} \beta^2. \end{aligned}$$

¹⁾ A. A. Iljuszyn [6] wyprowadził równania stateczności dla słabo rozwiniętych odkształceń plastycznych, tj. przyjął we wzorach teorii odkształceniowej $f_s = 1$. Jak wynika z (2.11a) otrzymujemy wtedy wzory na E_{jk} zgodne ze wzorami (2.11b) teorii płynięcia plastycznego.

Przy ustalonych wartościach α i β^2 równania (2.15) są równaniami różniczkowymi liniowymi odpowiednio Bessela oraz Eulera. Można je kolejno rozwiązać ze względu na poszukiwane funkcje $\delta\varphi$ i δu , otrzymując

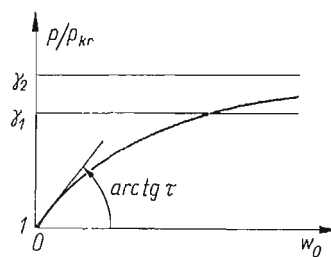
$$(2.17) \quad \begin{aligned} \delta\varphi &= C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x), \\ \delta u &= -\frac{\alpha}{\beta^2} \delta\varphi + D_1 \xi + \frac{D_2}{\xi}, \end{aligned}$$

gdzie $J_1(x)$ i $Y_1(x)$ są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju o argumentcie $x = \beta\xi$. Stałe całkowania C_1 , C_2 , D_1 i D_2 wyznaczymy z odpowiednich warunków brzegowych. Przy formułowaniu statycznych warunków brzegowych będziemy posługiwali się wzorami na wariacje uogólnionych sił promieniowych; wynikają one bezpośrednio z (2.13) i (2.7) po podstawieniu do nich rozwiązania (2.17)

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \varepsilon_p \delta n_1 &= -\frac{\beta}{2A_1 x} (A_1 B_2 - B_1 A_2) (C_1 J_1 + C_2 Y_1) + (A_1 + B_1) D_1 - (A_1 - B_1) \frac{D_2}{\xi^2}, \\ \varepsilon_p \delta m_1 &= \frac{\beta}{2} \left(A_1 - \frac{A_2^2}{A_1} \right) (C_1 J_0 + C_2 Y_0) + \\ &+ \frac{\beta}{x} \left[\frac{A_2}{A_1} (A_2 - B_2) - (A_1 - B_1) \right] (C_1 J_2 + C_2 Y_2) + (A_2 + B_2) D_1 - (A_2 - B_2) \frac{D_2}{\xi^2}. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie według koncepcji wzrastającego obciążenia

Jeśli przyjmiemy, że w chwili utraty stateczności cała płyta jest uplastyczniona, a strefy lokalnych odciążen powstają dopiero w wyniku ugięć płyty, to dochodzimy do koncepcji wzrastającego obciążenia. Przy takim podejściu rozwijaniu się stref procesów biernych towarzyszy wzrost obciążenia ponad wartość krytyczną, a kąt nachylenia krzywej $p(w)$ w punkcie bifurkacji jest na ogół różny od zera (rys. 2). Koncepcja ta była zaproponowa-



Rys. 2

na przez SHANLEY'A do analizy wyboczenia prętów i zastosowana przez STOWELLA [22] do obliczania obciążenia krytycznego płyt prostokątnych.

Zasadniczą cechą tej koncepcji jest jej duża prostota. Pozwala ona na znaczne uproszczenie równań i ich rozwiązań, a jeśli połączymy ją z teorią odkształceniową, to otrzymujemy dobrą zgodność z eksperymentami wykonanymi na płytach prostokątnych (por. [29]).

Należy tutaj podkreślić różnicę między wzorami na obciążenia krytyczne dla prętów i płyt. Jeśli w prętach podejście SHANLEYA sprowadza się do zamiany modułu sprężystości modułem stycznym, to w płytach rozwiązania oparte na teorii odkształceniowej zależą zarówno od modułu stycznego, jak też siecznego. Wynika to ze wzorów (2.11a), a zgodnie z pracą STOWELLA [22] udział poszczególnych modułów silnie zależy od warunków brzegowych.

W przypadku płyty «sandwiczowej» wystąpią procesy czynne²⁾ w całej płycie w chwili wyboczenia. Prowadzi to do zależności $E_{jr}^+ = E_{jr}^- = E_{jr}^a$, skąd wynika

$$(3.1) \quad A_2 = B_2 = 0.$$

Dzięki temu równania fizyczne rozprzegają się — przyrosty sił podłużnych i momentów zależą odpowiednio tylko od przyrostów odkształceń płaszczyzny środkowej lub tylko od przyrostów krzywizn

$$(3.2) \quad \delta n_j = 2C_{jr}\delta\vartheta_r, \quad \delta m_j = C_{jr}\delta k_r,$$

gdzie elementy macierzy C_{jr} wynoszą

$$(3.3) \quad C_{11} = C_{22} = \frac{A_1}{2} = E_{11}^a, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{B_1}{2} = E_{12}^a.$$

Rozprężenie równań fizycznych umożliwia korzystanie ze znanych rozwiązań sprężystych, jedynie ze zmienionymi współczynnikami, zależnymi od A_1 i B_1 . Pokażemy to na przykładach najczęściej przyjmowanych warunków brzegowych.

3.1. Obciążenie krytyczne płyty utwierdzonej i przegubowo podpartej. Przy stosowaniu podejścia wzrastającego obciążenia w całej płycie będzie obowiązywało rozwiązanie (2.17). Z warunku istnienia skończonych wartości przemieszczeń w środku płyty wynika $C_2 = D_2 = 0$ i rozwiązanie przyjmuje prostą postać

$$(3.4) \quad \delta\varphi = C_1 J_1(x), \quad \delta u = D_1 \xi.$$

W płycie utwierdzonej warunek brzegowy $\delta\varphi(\xi_l) = 0$ będzie spełniony po wyboczeniu, jeśli

$$(3.5) \quad J_1(x_l) \equiv J_1(\beta\xi_l) = 0.$$

Odpowiednie równanie charakterystyczne dla płyty przegubowo podpartej uzyskamy z warunku $\delta m_1(\xi_l) = 0$; po elementarnych przekształceniach (2.18) otrzymujemy

$$(3.6) \quad x_l J_0(x_l) - \left(1 - \frac{C_{12}}{C_{22}}\right) J_1(x_l) = 0.$$

Rozwiązanie $x_l = \beta\xi_l$ równań (3.5) lub (3.6) pozwala obliczyć obciążenie krytyczne $p_{kr} = -n_1$ według (2.16)

$$(3.7) \quad p_{kr} = \frac{x_l^2 C_{11}}{2\varepsilon_p \xi_l^2}.$$

²⁾ Jeśli w przekroju trójwarstwowym w jednej z warstw nośnych będzie zachodził proces bierny, a w drugiej czynny, to będziemy mówili o procesie czynno-biernym. Część płyty, w której zachodzi taki proces nazwiemy obszarem lub strefą czynno-bierną. Podobnie definiujemy obszary czynne i bierne.

W przypadku płyty utwardzonej pierwiastki równania przestępnego (3.5) nie zależą od współczynników C_{jr} (najniższy pierwiastek $x_1 = 3,8317$).

W zakresie sprężystym otrzymujemy taką samą postać równań charakterystycznych. W przypadku płyty przegubowo podparte $1 - C_{12}/C_{11} = 1 - \nu$, a $p_{kr} = x_1^2/2(1 - \nu^2)\varepsilon_p \xi_1^2$, co po uwzględnieniu użytych wielkości bezwymiarowych daje wyniki znane z teorii stateczności sprężystej (por. [25]).

3.2. Obliczenie kąta nachylenia stycznej w punkcie bifurkacji. Nachylenie stycznej do krzywej «obciążenie–ugięcie» w punkcie rozdzielenia stanów równowagi (rys. 2) opiszemy wielkością (por. [10])

$$(3.8) \quad \tau = \frac{d(p/p_{kr})}{dw} \Big|_{w_0=0} = \frac{1}{p_{kr}} \frac{\delta p}{\delta w_0} \Big|_{w_0=0},$$

gdzie w_0 oznacza ugięcie w środku płyty.

Przyrost ugięcia w środku płyty obliczymy przez scałkowanie (3.4)₁

$$(3.9) \quad \delta w_0 = \int_0^{\xi_1} \delta \varphi d\xi = \frac{C_1}{\beta} \int_0^{\xi_1} J_1(x) dx = \frac{C_1}{\beta} [1 - J_0(x_1)],$$

a przyrost obciążenia obliczymy według (3.2)₁

$$(3.10) \quad \delta p = -\delta n_1(\xi_1) = -\frac{D_1}{\varepsilon_p} (A_1 + B_1).$$

Dalsze postępowanie będzie podobne do tego, jakie zaproponował LEPIK [10]. Warunek występowania procesu czynnego w jednej z warstw $\delta s_i^\pm \geq 0$, po uwzględnieniu (2.6), (2.8) i (2.9), można łącznie napisać

$$(3.11) \quad -\frac{\delta \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2}{|\delta k_1 + \delta k_2|} \geq \frac{1}{2}.$$

Dla rozwiązania (3.4) powyższą nierówność można doprowadzić do postaci

$$(3.12) \quad -\frac{D_1}{C_1} \geq \frac{1}{4} \beta |J_0(x)|.$$

W przedziale $0 \leq x \leq 3,8317$ funkcja $|J_0(x)| \leq 1$ i jako stosunek D_1/C_1 można przyjąć

$$(3.13) \quad \frac{D_1}{C_1} = -\frac{\beta}{4};$$

fizycznie odpowiada to przejściu jednej z warstw w środku płyty od procesu aktywnego do biernego.

Po podstawieniu wyprowadzonych zależności do (3.8) otrzymujemy poszukiwany wzór na współczynnik kątowy stycznej w punkcie bifurkacji stanów równowagi

$$(3.14) \quad \tau = \frac{1 + C_{12}/C_{11}}{1 - J_0(x_1)},$$

gdzie C_{12} i C_{11} liczymy według wzorów (3.3).

4. Koncepcja ustalonego obciążenia

W płytach, podobnie jak w prętach, można obliczyć asymptotyczną wartość obciążenia jakie może powstać w wyniku powstania stref lokalnych odciążeń przy nieograniczonym wzroście ugięć (opieramy się na geometrycznie liniowej teorii małych ugięć). Zamiast rozpatrywać pozakrytyczne stany równowagi można od razu obliczyć odpowiednią wartość obciążenia krytycznego zakładając, że w płycie natychmiast po wyboczeniu wystąpią rozwinięte strefy czynno-bierne, a wartość obciążenia nie ulegnie zmianie.

W prętach takie podejście Engessera-Kármána sprowadza się do obliczenia odpowiedniego modułu zredukowanego. W płytach problem jest znacznie bardziej skomplikowany ze względu na złożony stan naprężeń. Główną trudnością jest tu wyznaczenie granicy występowania obszarów czynno-biernych. Odpowiednie równania, wyprowadzone dla teorii odkształceniowej przez ILIUSZYNA [6], a dla teorii płynięcia plastycznego przez HANDELMANA i PRAGERA [4] oraz HOPKINSA [5], można scałkować jedynie w nielicznych przypadkach. Wynika stąd zainteresowanie metodami przybliżonymi rozwiązywania poszczególnych zadań.

Przy obliczaniu płyt kołowych LEPIK [9] zastosował metodę Bubnowa-Galerkina, a TOŁOKONNIKOW [26] i POPOW [16] otrzymują przybliżone wartości obciążeń krytycznych dzięki założeniu rozkładu stref lokalnych odciążeń. Proste rozwiązania można otrzymać przez połączenie metod wariacyjnych z założeniem ILIUSZYNA o zerowaniu się wariacji sił podłużnych wewnątrz płyty (por. [6, 17]).

Najpierw zajmiemy się rozwiązaniem przybliżonym metodą Iliuszyna, gdyż w płycie trójwarstwowej jest ono podobne do rozwiązywania otrzymanego według koncepcji wzrastającego obciążenia.

4.1. Metoda przybliżona Iliuszyna. Aby uprościć obliczenia ILIUSZYNA [6] założył, że w koncepcji stałego obciążenia wariacje sił podłużnych są równe zeru nie tylko przy brzegu, ale też wewnątrz całej płyty,

$$(4.1) \quad \delta n_1(\xi) = \delta n_2(\xi) \equiv 0.$$

Dzięki temu można z dwóch pierwszych równań fizycznych (2.13) obliczyć δs_j , a po podstawieniu do równań na δm_j wyrazić je tylko poprzez krzywizny. Otrzymamy w ten sposób wzory (3.2)₂ na wariacje momentów δm_j , gdzie współczynniki C_j , wyniosą

$$(4.2) \quad \begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{A_1}{2} - \frac{1}{2(A_1^2 - B_1^2)} [(A_1 A_2 - B_1 B_2) A_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) B_2], \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{B_1}{2} - \frac{1}{2(A_1^2 - B_1^2)} [(A_1 A_2 - B_1 B_2) B_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) A_2]. \end{aligned}$$

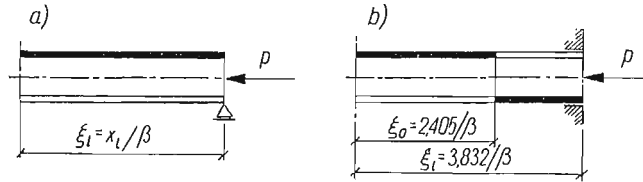
Przy posługiwaniu się teorią płynięcia plastycznego $A_1 = B_2$ i wzory (4.2) znacznie upraszczają się,

$$(4.2a) \quad C_{11} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2^2}{A_1 + B_1}, \quad C_{12} = \frac{B_1}{2} - \frac{A_2^2}{A_1 + B_1}.$$

Rozprzężenie układu równań fizycznych umożliwia posługiwanie się rozwiązaniami (3.5) i (3.6) ze współczynnikami (4.2) liczonymi dla procesów czynno-biernych. W każdym

punkcie płyty jedna z warstw będzie dociążana, a w drugiej wystąpi proces bierny; zaznaczono to na rys. 3, gdzie nie zaczerznięta część odpowiada procesowi biernemu.

4.2. Rozwiązanie ściśle dla płyty przegubowo podpartej. Zajmiemy się teraz rozwiązaniem ścisłym, polegającym na odrzuceniu założenia Iliuszyna (4.1). Przyjmujemy, że



Rys. 3

w przypadku przegubowego podparcia rozkład stref różnych typów procesów będzie taki, jak na rys. 3a (w całej płycie zachodzą procesy czynno-bierne — w warstwie zaczerzniętej czynne, a w dolnej nie zaczerzniętej — bierne).

W przypadku płyty kołowej $C_2 = D_2$ i wariacje uogólnionych odkształceń powierzchni środkowej (2.7) zgodnie z (2.17) wynoszą

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \delta \vartheta_1 &= -\frac{\alpha}{\beta^2} \delta k_1 + \frac{D_1}{\varepsilon_p}, & \delta \vartheta_2 &= -\frac{\alpha}{\beta^2} \delta k_2 + \frac{D_1}{\varepsilon_p}, \\ \delta k_1 &= C_1 \frac{\beta}{\varepsilon_p} \left(J_0 - \frac{J_1}{x} \right), & \delta k_2 &= C_1 \frac{\beta}{\varepsilon_p} \frac{J_1}{x}. \end{aligned}$$

Wariacje uogólnionych sił promieniowych (2.18) można doprowadzić do następującej postaci:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \delta n_1 &= \left(\frac{B_2}{2} - \frac{B_1 A_2}{2A_1} \right) \delta k_2 + \frac{D_1}{\varepsilon_p} (A_1 + B_1), \\ \delta m_1 &= C_{11} \delta k_1 + C_{12} \delta k_2 + \frac{D_1}{\varepsilon_p} (A_2 + B_2), \end{aligned}$$

gdzie przez analogię do (3.2) użyto oznaczeń

$$(4.5) \quad C_{11} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2^2}{2A_1}, \quad C_{12} = \frac{B_1}{2} - \frac{A_2 B_2}{2A_1}.$$

Warunki brzegowe

$$(4.6) \quad \delta n_1(\xi_1) = \delta m_1(\xi_1) = 0$$

będą spełnione, jeśli wyznacznik główny ze współczynników przy C_1 i D_1 w (4.4) będzie zerował się. Otrzymujemy stąd równanie charakterystyczne o postaci analogicznej do (3.6),

$$(4.7) \quad x_1 J_0(x_1) - \left[1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} + \frac{(A_2 + B_2)(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1^2 - A_2^2)(A_1 + B_1)} \right] J_1(x_1) = 0.$$

W teorii płynięcia plastycznego $A_2 = B_2$ i będziemy posługiwali się równaniem

$$(4.7a) \quad x_1 J_0(x_1) - \left[1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} + \frac{A_2^2}{A_1 C_{11}} \frac{A_1 - B_1}{A_1 + B_1} \right] J_1(x_1) = 0.$$

Po rozwiązaniu równania (4.6) obciążenie krytyczne obliczymy z (3.7), przyjmując C_{11} według (4.5)₁.

Należy jeszcze sprawdzić, czy dobrze został przyjęty typ procesów zachodzących przy wyboczeniu się płyty. Jeśli będzie występował proces bierny w dolnej warstwie (rys. 3a), to powinna być w niej spełniona nierówność (3.11), w której ze względu na pierwszą (podstawową) formę wyboczenia można opuścić znak bezwzględnej wartości. Po podstawieniu (4.3) można (3.11) przekształcić do postaci

$$(4.8) \quad J_0(x) \geq \frac{2(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1 - A_2)(A_1 + B_1)} \frac{J_1(x)}{x}.$$

Przy wzrastającej wartości argumentu $0 \leq x \leq 3,832$ funkcja $J_0(x)$ maleje, natomiast $J_1(x)/x$ wzrasta. Wystarczy więc zbadać czy zachodzi nierówność przy podporze dla wartości $x = x_1$, która jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (4.7). Możemy stąd obliczyć $J_0(x_1)$ i zamiast (4.8) zbadać czy

$$1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} + \frac{(A_2 + B_2)(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1^2 - A_2^2)(A_1 + B_1)} \geq \frac{2(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1 - A_2)(A_1 + B_1)}.$$

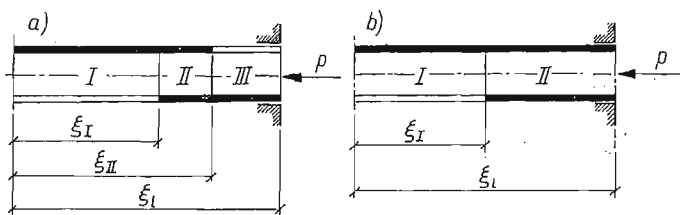
W drodze elementarnych przekształceń można doprowadzić tę nierówność do postaci

$$(4.9) \quad f_i[3 - (1 - 2\nu)f_s] \geq 0,$$

która jest zawsze spełniona. Przy stosowaniu wzorów (2.11b) teorii płynięcia plastycznego należy przyjąć $f_s = 1$.

W ten sposób wykazaliśmy, że poprawnie przyjęliśmy obszar czynno-bierny w całej płycie trójwarstwowej. Do podobnego wniosku doszedł LEPIK [9] określając rozkład stref w płycie pełnościennej. Natomiast TOŁOKONNIKOW [26] i POPOW [16] zakładali występowanie strefy procesów czynnych w całych przekrojach przypodporowych, co nie wydaje się być uzasadnione.

4.3. Rozwiązanie ściśle dla płyty utwierdzonej. Zajmiemy się drugim skrajnym przypadkiem podparcia brzegu. W płycie utwierdzonej mogą wystąpić dwa przypadki roz-



Rys. 4

kładu obszarów różnych typów procesów. Rozważamy najpierw przypadek ogólniejszy, któremu odpowiada rys. 4a.

W płycie obok obszarów czynno-biernych może wystąpić obszar bierny, którego nie było przy stosowaniu założenia IIuszyzna (por. rys. 3b). W obszarze tym, wobec jednakowego typu procesów zachodzących w zewnętrznych warstwach, będzie

$$A_2^{II} = B_2^{II} = \alpha_{II} = 0,$$

co nieco uprości dalsze równania. Aby skrócić zapis, wielkości odnoszące się do poszczególnych obszarów opatrzymy odpowiednimi indeksami. W punktach styku obszarów argument x będzie miał dwa indeksy, z których dolny oznacza punkt, a górny obszar:

$$(4.10) \quad x_r^s = \beta_s \xi_r, \quad r = \text{I, II}; \quad s = \text{I, II, III}.$$

Punkty ξ_{I} i ξ_{II} rozgraniczają różne obszary i jeśli umówimy się, że warstwa „+” będzie warstwą dolną na rys. 4a, to będą obowiązywały równania wynikające z warunku $\delta s_i^s = 0$:

$$(4.11) \quad \left. \frac{\delta \beta_1 + \delta \beta_2}{\delta k_1 + \delta k_2} \right|_{\xi_{\text{I}}} = -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\delta \beta_1 + \delta \beta_2}{\delta k_1 + \delta k_2} \right|_{\xi_{\text{II}}} = \frac{1}{2}.$$

W punktach tych muszą być spełnione warunki ciągłości

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \delta \varphi_r^s &= \delta \varphi_r^{s+1}, & (\delta \varphi_r^s)' &= (\delta \varphi_r^{s+1})', \\ \delta u_r^s &= \delta u_r^{s+1}, & (\delta u_r^s)' &= (\delta u_r^{s+1})', \end{aligned} \quad r, s = \text{I, II},$$

a w punkcie końcowym ξ_{I} warunki brzegowe

$$(4.13) \quad \delta \varphi_{\text{I}} = 0, \quad \delta n_1(\xi_{\text{I}}) = 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób komplet dwunastu równań na wyznaczenie stałych C_j^s , D_j^s dla $s = \text{I, II, III}$ i $j = 1, 2$ (przyjmujemy $C_2^{\text{I}} = D_2^{\text{I}} = 0$) oraz współrzędnych ξ_{I} , ξ_{II} i ξ_{I} . Ponieważ równania są liniowe względem stałych C_j i D_j , to można te stałe wyeliminować i zamiast jednego równania charakterystycznego otrzymać następujący układ równań:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} b_1 J_0^{\text{II}}(x_{\text{II}}^{\text{II}}) + b_2 Y_0^{\text{II}}(x_{\text{II}}^{\text{II}}) + \frac{x_{\text{I}}^{\text{I}}}{x_{\text{I}}^{\text{II}}} J_0^{\text{I}}(x_{\text{I}}^{\text{I}}) &= 0, \\ d_1 J_1^{\text{II}}(x_{\text{I}}) + d_2 Y_1^{\text{II}}(x_{\text{I}}) &= 0, \\ f \equiv [K_a(x_{\text{I}})^2 J_0(x_{\text{I}}^{\text{I}}) - (x_{\text{I}}^{\text{I}})^2 J_2(x_{\text{I}}^{\text{I}})] + [k(x_{\text{I}})^2 J_0(x_{\text{II}}^{\text{II}}) - (x_{\text{II}}^{\text{II}})^2 J_2(x_{\text{II}}^{\text{II}})] d_1 + \\ &+ [(k x_{\text{I}})^2 Y_0(x_{\text{II}}^{\text{II}}) - (x_{\text{II}}^{\text{II}})^2 Y_2(x_{\text{II}}^{\text{II}})] d_2 = 0, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(4.15) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{\pi}{2} (x_{\text{I}}^{\text{II}} J_1^{\text{I}} Y_0^{\text{II}} - x_{\text{I}}^{\text{I}} J_0^{\text{I}} Y_1^{\text{II}})_{\xi_{\text{I}}}, \\ b_2 &= \frac{\pi}{2} (-x_{\text{I}}^{\text{II}} J_1^{\text{I}} J_0^{\text{II}} + x_{\text{I}}^{\text{I}} J_0^{\text{I}} J_1^{\text{II}})_{\xi_{\text{I}}}, \\ d_1 &= \frac{\pi}{2} [(x_{\text{II}}^{\text{II}} J_1^{\text{II}} Y_0^{\text{III}} - x_{\text{II}}^{\text{I}} J_0^{\text{II}} Y_1^{\text{III}}) b_1 + (x_{\text{II}}^{\text{III}} Y_1^{\text{II}} Y_0^{\text{III}} - x_{\text{II}}^{\text{II}} Y_0^{\text{II}} Y_1^{\text{III}}) b_2]_{\xi_{\text{II}}}, \\ d_2 &= \frac{\pi}{2} [(-x_{\text{II}}^{\text{III}} J_1^{\text{II}} J_0^{\text{III}} + x_{\text{II}}^{\text{II}} J_0^{\text{II}} J_1^{\text{III}}) b_1 + (-x_{\text{II}}^{\text{III}} Y_1^{\text{II}} J_0^{\text{III}} + x_{\text{II}}^{\text{II}} Y_0^{\text{II}} J_1^{\text{III}}) b_2]_{\xi_{\text{II}}}, \\ \frac{x_{\text{I}}^{\text{I}}}{x_{\text{I}}^{\text{II}}} &= \frac{x_{\text{II}}^{\text{II}}}{x_{\text{II}}^{\text{I}}} = \left[\frac{A_1^{\text{I}} A_1^{\text{II}}}{(A_1^{\text{I}})^2 - (A_2^{\text{I}})^2} \right]^{1/2}, \quad k = \frac{A_1^{\text{I}} + B_1^{\text{I}}}{A_1^{\text{I}} - B_1^{\text{I}}}, \quad K_a = \frac{A_1^{\text{I}}}{A_2^{\text{I}}} k. \end{aligned}$$

W podanych współczynnikach użyto skróconych oznaczeń wartości funkcji Bessela, zgodnie z przyjętymi indeksami, np. $J_1^{III}|_{\xi_{11}} = J_1(x_{11}^{III})$. Jako mnożnik po prawej stronie tych współczynników występuje $\pi/2$, co wynika ze związku (por. [12]),

$$[J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)]x = \frac{2}{\pi}.$$

Układ (4.14) zastępuje równanie charakterystyczne (3.5) z koncepcji wzrastającego obciążenia i może być łatwo rozwiązany w drodze kolejnych prób. Postać układu narzuca metodę rozwiązywania. Jeśli mianowicie będziemy ustalali wartości x_1^I , to można wtedy obliczyć b_1 oraz b_2 i rozwiązać równanie (4.14)₁ ze względu na x_{11}^{II} . Z kolei można obliczyć współczynniki d_1 oraz d_2 i rozwiązać (4.14)₂ ze względu na x_1 . Wartość x_1^I należy tak dobrać, aby było spełnione równanie (4.14)₃, tj. $f = 0$.

Jeśli podczas rozwiązywania będzie $x_{11}^{III} > x_1$ to oznacza, że strefa bierna dochodzi do podpory i należy rozpatrzyć rozkład obszarów, jak na rys. 4b. W tym przypadku liczba równań (4.11) i (4.12) maleje i zamiast (4.14) otrzymujemy następujący układ równań:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} b_1 J_1^{II}(x_1) + b_2 Y_1^{II}(x_1) &= 0, \\ f \equiv K_b x_1^2 J_0(x_1^I) - (x_1^I)^2 J_2(x_1^I) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki b_1 i b_2 zostały określone w (4.15), a K_b wynosi

$$(4.17) \quad K_b = \frac{(A_1^I)^2 A_1^{II} (A_1^{II} + B_1^{II})}{A_2^I [(A_1^I)^2 - (A_2^I)^2] (A_1^{II} - B_1^{II})}.$$

Użyte w równaniach (4.14) i (4.16) współczynniki b_j i d_j wynikają z równań ciągłości i są stosunkami odpowiednich stałych,

$$(4.18) \quad C_j^{II}/C_j^I = b_j, \quad C_j^{III}/C_j^I = d_j \quad \text{dla } j = 1, 2.$$

Tak więc typ stref przy brzegu płyty utwierdzonej będzie ustalony w trakcie obliczeń i nie jest zakładany *a priori*, jak to uczyniono w pracach [26] i [16].

5. Materiał idealnie plastyczny

Rozważając modele materiału ze wzmocnieniem należy pamiętać, że moduły styczny f_t i sieczny f_s nie są niezależne, lecz powiązane charakterystyką materiału $\sigma(\epsilon)$. Przy przejściu do materiału idealnie plastycznego we wzorach (2.11) należy przyjąć $f_t = 0$, natomiast $1 \geq f_s \geq 0$. Taka niejednoznaczność będzie miała wpływ na wyniki obliczeń, toteż zajmujemy się dokładniej tym przypadkiem (por. też [8], [10]).

Wszystkie wzory podamy dla teorii odkształceniowej, gdyż jak wskazaliśmy w p. 2.3 przejście do teorii płynięcia uzyskamy przyjmując $f_s = 1$. Potrzebne współczynniki podamy dla różnych koncepcji:

a) wzrastające obciążenie

$$(5.1a) \quad C_{11} = -C_{12} = \frac{f_s}{2[3 - (1 - 2\nu)f_s]},$$

b) ustalone obciężenie, przybliżona metoda Iliuszyna

$$(5.1b) \quad C_{11} = -C_{12} = \frac{f_s}{3 + (1 + 4\nu)f_s},$$

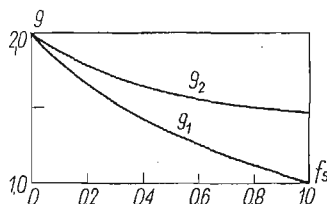
c) ustalone obciężenie, rozwiązanie ściśle (dla procesu czynno-biernego przy podporze)

$$(5.1c) \quad C_{11} = \frac{f_s}{3 + \nu(2 - \nu)f_s}, \quad C_{12} = -\frac{f_s(1 - \nu)}{2[3 + \nu(2 - \nu)f_s]}.$$

Tak samo jak w p. 5 rozpatrzymy dwa przypadki warunków brzegowych.

5.1. Płyta przegubowo podparta. Współczynnik $1 - C_{12}/C_{11}$ w równaniu (3.6) będzie równy 2, jak wynika ze wzorów (5.1a) lub (5.1b) i rozwiązanie $x_i = 0$ będzie niezależne od f_s . Można w tym przypadku określić granicę stosunku obciężań krytycznych liczonych według (3.7) dla przypadków a) i b), określonych wzorami (5.1a) i (5.1b),

$$(5.2.1) \quad g_1 = \lim_{f_i \rightarrow 0} \gamma_1 = \lim_{f_i \rightarrow 0} \frac{p_b}{p_a} = \frac{2[3 - (1 - 2\nu)f_s]}{3 + (1 + 4\nu)f_s}.$$



Rys. 5

Współczynnik $g_1(f_s)$, określający względną wartość obciężenia liczonego według metody Iliuszyna w stosunku do koncepcji wzrastającego obciężenia, wynosi dla skrajnych wartości f_s (rys. 5)

$$g_1(0) = 2, \quad g_1(1) = 1.$$

Jeśli posługujemy się rozwiązaniem ściślym w koncepcji ustalonego obciężenia, to współczynnik przy $J_1(x_i)$ w równaniu (4.7) wynosi też 2. Współczynnik g_2 obliczymy jako granicę stosunku obciężań krytycznych liczonych według koncepcji ustalonego i wzrastającego obciężenia przy użyciu wzorów (5.1a) i (5.1c),

$$(5.2.2) \quad g_2 = \lim_{f_i \rightarrow 0} \gamma_2 = \lim_{f_i \rightarrow 0} \frac{p_c}{p_a} = \frac{2[3 - (1 - 2\nu)f]}{3 + \nu(2 - \nu)f_s}.$$

Wartość tego współczynnika dla $f_s = 0$ wynosi $g_1(0) = 2$, natomiast dla $f_s = 1$ wartość $g(1) = 1$ i zależy od współczynnika Poissona ν . Na rys. 5 pokazano wykresy tych współczynników dla ustalonej wartości $\nu = 0,3$.

W rozpatrzonym przypadku graniczna wartość współczynnika kąтового τ stycznej w punkcie bifurkacji wynosi

$$(5.3) \quad \lim_{f_i \rightarrow 0, x_i \rightarrow 0} \tau = 2.$$

Wyniki otrzymane dla płyty przegubowo podpartej mają znaczenie czysto teoretyczne, gdyż odpowiadają przypadkowi granicznemu $x_1 \rightarrow 0$. Z (3.7) wynika, że $\varepsilon_p \xi_1^2 p_{kr} \rightarrow 0$, co dla $p_{kr} \rightarrow 1$ prowadzi do wniosku, że promień płyty $\xi_1 \rightarrow 0$. W takim przypadku przestają obowiązywać założenia płyt cienkich, na których oparliśmy całą analizę.

5.2. Płyta utwierdzona. Pierwiastek równania (3.5) obowiązującego w koncepcjach a) i b) jest niezależny od własności materiału i wynosi $x_1 = 3,832$. Analiza równań (4.14) wskazuje, że przy $f_t \rightarrow 0$ przy podporze pojawia się obszar procesów czynnych i należy się posługiwać układem (4.16).

Jeśli $f_t = 0$ to $K_b = 0$ i równanie (4.16)₂ jest spełnione dla $x_1^i = 0$. Oznacza to, że w całej płycie zachodzi proces czynny i należy posługiwać się wzorem (5.1a) dla C_{11}^a . Ponieważ w tym przypadku $b_1 = 1$ i $b_2 = 0$, równanie (4.16)₁ przechodzi w (3.5). Tak więc obciążenie krytyczne obliczane metodą ścisłą według koncepcji ustalonego i wzrastającego obciążenia przyjmuje w płycie utwierdzonej tę samą wartość ($g_2 \equiv 1$)

$$(5.4) \quad \lim_{f_t \rightarrow 0} p_{kr} = \frac{3,832^2 C_{11}^a}{2 \xi_1^2 \varepsilon_p} = \frac{3,670 f_s}{\xi_1^2 \varepsilon_p [3 - (1 - 2\nu) f_s]}.$$

Graniczna wartość współczynnika kąтового τ w punkcie bifurkacji wynosi zgodnie z (3.14)

$$(5.5) \quad \lim_{\substack{f_t \rightarrow 0 \\ x_1 \rightarrow 3,832}} \tau = 0.$$

Ponieważ wartości g_1 należy liczyć według wzoru (5.2.1), więc wynika stąd wniosek, że obciążenie krytyczne liczone według metody Iliuszyna będzie dla $f_s \rightarrow 0$ wyższe od obciążenia wyznaczonego metodą ścisłą. W granicznym przypadku $f_s = 0$ posługiwanie się metodą Iliuszyna może prowadzić do znacznych błędów.

W pracy [17] przeprowadzono obliczenia dla płyty kołowej, wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego, o zależności $\sigma - \varepsilon$ aproksymowanej wzorem Ylinena: $\varepsilon/\sigma = E^{-1}(1 - c|\sigma/\sigma_p|)/(1 - |\sigma/\sigma_p|)$. Obliczenia prowadzono metodą odwrotną, czyli że dla ustalonych wartości p_{kr} określano f_s i f_t i obliczano ξ_1 . W takim postępowaniu otrzymywano duże różnice wyników przy stosowaniu metody Iliuszyna, gdyż dla $f_t \rightarrow 0$ wartości $g_1 \rightarrow 2$.

Przeprowadzona analiza materiału idealnie plastycznego rozszerza wnioski podane w pracach LEPIKA [8, 10], gdyż została dokonana w oparciu o rozwiązanie ściśle koncepcji ustalonego obciążenia. Z drugiej strony została ona wykonana dla płyty trójwarstwowej, którą zastąpiliśmy płytą pełnościenną.

6. Przykład numeryczny

Aby uniezależnić się od charakterystyki materiału $\sigma - \varepsilon$, obliczenia numeryczne wykonano w oparciu o wzory teorii plastycznego płynięcia. Obliczenia prowadzono metodą odwrotną, która polegała na obliczaniu obciążeń krytycznych $\bar{p} = p_{kr} \varepsilon_p \xi_1^2$ dla ustalonych wartości modułów stycznych $f_t = E_t/E$. Wszystkie obliczenia wykonano dla materiału ściśliwego, gdy współczynnik Poissona $\nu = 0,3$.

Wartości funkcji Bessela wzięto z tablic [20, 23], w których przyrost argumentu $\Delta x = 0,01$. Wartości pośrednie otrzymywano z interpolacji liniowej, zachowując 5 cyfr znaczących.

W tabl. 1 podano wartości \bar{p} dla płyty przegubowo podpartej, obliczone według koncepcji wzrastającego obciążenia oraz współczynniki γ_1 i γ_2 dla metody przybliżonej Iliuszyna i rozwiązania ścisłego według koncepcji ustalonego obciążenia.

Tablica 1. Płyta przegubowa podparta, teoria plastycznego płynięcia, $\nu = 0,3$

f_i	\bar{p}_{wzr}	γ_1	γ_2	γ_2/γ_1	τ
0	0	1	1,440	1,440	2
0,005	0,00861	2,277	2,324	1,021	1,180
0,01	0,01975	2,622	2,646	1,009	1,021
0,02	0,04026	1,859	1,877	1,010	1,011
0,05	0,09437	1,823	1,851	1,015	1,097
0,1	0,17978	1,704	1,733	1,017	1,175
0,2	0,33259	1,532	1,552	1,013	1,290
0,5	0,70200	1,239	1,244	1,004	1,482

$$\bar{p}_{wzr} = p_{kr} \xi_i^2 \varepsilon_p = \frac{1}{2} x_i^2 C_{11}^a$$

$$\gamma_1 = \bar{p}_{ust.II} / \bar{p}_{wzr}, \quad \gamma_2 = \bar{p}_{ust.śc.} / \bar{p}_{wzr}$$

Tablica 2. Płyta utwierdzona, teoria plastycznego płynięcia, $\nu = 0,3$

f_i	\bar{p}_{wzr}	γ_1	γ_2	γ_2/γ_1	τ	Pierwiastki równań (4.14) lub (4.16)		
						$\frac{x_I^I}{x_I^{II}}$	$\frac{x_{II}^{II}}{x_{II}^{III}}$	x_I
0	1,4117	1	1	1	0	0	—	3,832
0,005	1,4300	1,013	1,043	1,030	0,0061	$\frac{1,152}{1,400}$	—	3,913
0,01	1,4483	1,034	1,068	1,034	0,0360	$\frac{1,344}{1,630}$	—	3,960
0,02	1,4846	1,046	1,102	1,053	0,0727	$\frac{1,550}{1,874}$	$\frac{3,780}{3,126}$	3,326
0,05	1,5917	1,099	1,160	1,056	0,1612	$\frac{1,770}{2,120}$	$\frac{3,328}{2,779}$	3,446
0,1	1,7647	1,153	1,205	1,049	0,2852	$\frac{1,952}{2,302}$	$\frac{3,130}{2,653}$	3,566
0,2	2,0915	1,191	1,223	1,027	0,4634	$\frac{2,133}{2,448}$	$\frac{2,940}{2,562}$	3,693
0,5	2,9411	1,137	1,142	1,004	0,6844	$\frac{3,320}{2,495}$	$\frac{2,655}{2,469}$	3,807

$$\bar{p}_{wzr} = p_{kr} \xi_i^2 \varepsilon_p = \frac{1}{2} x_{i,wzr}^2 C_{11}^a$$

$$\gamma_1 = \bar{p}_{ust.II} / \bar{p}_{wzr}, \quad \gamma_2 = \bar{p}_{ust.śc.} / \bar{p}_{wzr}$$

Wyniki obliczeń dla płyty utwardzonej zestawiono w tabl. 2. Podano tutaj wartości x_I^I , x_{II}^{II} i x_I rozgraniczające obszary czynne od czynno-biernych. Widać, że dla małych modułów $f_i \leq 0,01$ obszar czynny dochodzi do utwardzenia.

Otrzymane wyniki potwierdzają wniosek, jaki często wyciągano w oparciu o znacznie skromniejsze dane numeryczne (por. np. [9, 16]), o dobrej dokładności metody przybliżonej Iliuszyna. W przypadku płyty swobodnie podpartej różnice w odniesieniu do metody ścisłej ustalonego obciążenia (z wyjątkiem $f_i = 0$) nie przekraczają 2%, a dla płyty utwardzonej — 6%.

7. Uogólnienie wyników na rzeczywistą płytę trójwarstwową

Zgodnie z założeniami przyjęliśmy, że przekrój trójwarstwowy ma aproksymować przekrój pełnościenny. Otrzymane wyniki można wykorzystać również do obliczenia sił krytycznych w rzeczywistym przekroju trójwarstwowym. W takich płytach duży wpływ na ugięcia mają odkształcenia postaciowe wypełniacza i stosowana przez nas hipoteza Kirchhoffa (2.5) odcinka normalnego w odniesieniu do całego przekroju może prowadzić do znacznych błędów (por. [21]). Zajmiemy się teraz uogólnieniem rozważań na przypadek ogólnej utraty stateczności płyty trójwarstwowej w oparciu o metodę Bijlaarda rozdzielonych sztywności.

W pracy [2] BIJLAARD zaproponował obliczanie obciążenia krytycznego według wzoru

$$(7.1) \quad p_{kr} = p_0 + \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)^{-1},$$

w którym p_0 jest obciążeniem krytycznym liczonym dla oddzielnych warstw nośnych (zewnątrznych), p_1 — obciążenie krytyczne bez uwzględnienia wpływu odkształceń postaciowych wypełniacza, p_2 — obciążenie krytyczne tylko od odkształceń wypełniacza. Przy liczeniu p_1 i p_2 pomija się sztywności własne na zginanie warstw nośnych.

W naszym przypadku obciążenie p_{kr} liczone wzorem (3.7) odpowiada p_1 w (7.1). Jak wykazano w [2] dla wszechstronnego płaskiego ściskania, siła p_2 jest niezależna od formy wybożenia i wynosi

$$(7.2) \quad p_2 = \frac{h^2}{h-d} G_c,$$

gdzie G_c jest modułem odkształcenia postaciowego wypełniacza.

W zastosowaniach można całkowicie pominąć sztywności własne warstw nośnych, a więc przyjąć $p_0 = 0$. Po połączeniu wzorów (3.6) i (7.2) wzór (7.1) na obciążenie krytyczne napiszemy w postaci

$$(7.3) \quad p_{kr} = \frac{p_1}{1 + \alpha p_1},$$

gdzie, dla skrócenia zapisu, użyto oznaczeń

$$(7.4) \quad p_1 = \frac{x_I^2 C_{11}}{2\varepsilon_p \xi_I^2}, \quad \alpha = 2\varepsilon_p \frac{E}{G_c} \frac{d}{h} \left(1 - \frac{d}{h} \right).$$

Współczynnik α zależy wyłącznie od stałych materiałowych (E i ε_p odnoszą się do warstw nośnych) i wymiarów poprzecznych wypełniacza, natomiast wartość współczynnika C_{11} odpowiada obciążeniu p_{kr} z (7.3). W rozważanym poprzednio przypadku niepodatnego wypełniacza $G_c \rightarrow \infty$ i współczynnik $C_{11} = f(p_1)$.

Wzór (7.3) został wyprowadzony dla wypełniacza typu lekkiego (taki termin jest stosowany w literaturze radzieckiej — por. [29]), który przenosi jedynie naprężenia styczne od sił poprzecznych, a nośne warstwy zewnętrzne są w stanie bezmomentowym (pomijaliśmy dla tych warstw sztywność własną na zginanie).

Ogólniejsze równania stateczności płyt trójwarstwowych uwzględniające również uplastycznienie wypełniacza, wyprowadził GRIGOLUK [3]; występują jednak znaczne trudności przy ich całkowaniu.

8. Uwagi końcowe

W pracy zajęliśmy się tylko symetryczną płytą trójwarstwową. Rozważania można bez trudu uogólnić na płyty o różnej grubości i różnych własnościach warstw nośnych (por. [13]).

W konstrukcjach warstwowych często istotne jest uwzględnienie anizotropowych własności materiału. Odpowiednie równania stateczności dla sprężysto-plastycznej płyty pełnościennej zostały wyprowadzone w [18]. Wszystkie równania i wzory wyprowadzone w obecnej pracy zachowują swoją postać w przypadku cylindrycznej ortotropii. Należy wtedy tylko przyjąć macierz E_j , wyprowadzoną dla materiału ortotropowego w [28] zarówno dla teorii odkształceniowej, jak też plastycznego płynięcia.

W pracy obliczaliśmy obciążenia krytyczne według koncepcji wzrastającego i ustalonego obciążenia. W obliczeniach inżynierskich znaczenie ma przede wszystkim pierwsza koncepcja, która daje bezpieczniejsze (niższe) wartości obciążeń krytycznych i w przypadku płyt prostokątnych jest zgodna z doświadczeniami (por. [29]). Obciążenie krytyczne liczone według koncepcji ustalonego obciążenia jest wyższe i daje oszacowanie od góry obciążeń jakie może przenieść płyta w wyniku rozwinięcia się stref procesów biernych. Należy tutaj podkreślić dobrą dokładność przybliżonej metody Iliuszyna, co wykorzystano w pracy [17] do sporządzenia wykresów zależności pomiędzy krytycznymi wartościami obciążenia i odpowiednimi promieniami płyty $p - \xi_t$.

Należy dodać, że wartości krytyczne liczone według koncepcji ustalonego obciążenia mogą być osiągnięte przy nieograniczonym wroście ugięć (opieramy się na geometrycznej liniowej teorii małych ugięć). Analiza stanu pozakrytycznego wymaga oparcia się na teorii dużych ugięć (por. [28]), przy czym może powstać konieczność rozważania nie tylko procesów biernych, ale też wtórnych odkształceń plastycznych (por. [11, 19]).

Jak wykazaliśmy w p. 5, przy $f_t \rightarrow 0$ i $f_s \rightarrow 0$ również promień płyty $\xi_t \rightarrow 0$. Podkreśliśmy, że takie rozważania mają charakter czysto teoretyczny, gdyż przy krępych płytach przestają obowiązywać przyjęte założenia. W takim przypadku następuje znaczny wzrost odkształceń i zagadnienie utraty stateczności należy rozpatrywać w ujęciu teorii odkształceń skończonych (por. [27]).

W pracy opieraliśmy się na klasycznych teoriach plastyczności. Jak wynika z przyjętych wzorów (2.11), wyniki obliczeń według teorii odkształceniowej i płynięcia plastyczne-

go nie będą się wiele różniły przy małych odkształceniach plastycznych. Przy wzroście tych odkształceń otrzymujemy podwyższenie wyników teorii płynięcia w stosunku do teorii odkształceniowej, przy czym ta ostatnia na ogół lepiej zgadza się z wynikami doświadczeń. Zbliżenie wyników teoretycznych można uzyskać przez odpowiednią modyfikację teorii płynięcia (por. [15]). Należy też wymienić próby stosowania teorii statystycznych (por. [29]), które prowadzą jednak do żmudnych rachunków.

Literatura cytowana w tekście

1. P. P. BIJLAARD, *Theory and tests on the plastic stability of plates and shells*, J. Aero. Sci., 9, **16** (1949), 529–541.
2. P. P. BIJLAARD, *Analysis of the elastic and plastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities*, J. Aero. Sci., P. I, 5, **18** (1951), 339–349; P. II, 12, **18** (1951), 790–796, 835.
3. Е. И. ГРИГОЛЮК, *Об устойчивости трёхслойных оболочек и пластин за пределом упругости*, Изв. АН СССР, ОТН, 6 (1958), 68–72.
4. G. H. HANDELMAN, W. PRAGER, *Plastic buckling of a rectangular plate under edge thrusts*, NACA TR946, 1949.
5. H. G. HOPKINS, *The plastic instability of plates*, Quart. Appl. Math., 2, **11** (1953), 185–200.
6. А. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва—Ленинград 1948.
7. В. Д. КЛЮШНИКОВ, *Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластинки*, Мех. Тв. Тела, 4 (1966), 28–36.
8. Ю. Р. ЛЕПИК, *Потеря устойчивости пластинок из сжимаемого материала на площадке текучести*, Прикл. Мат. и Мех., 5, **15** (1951), 629–634.
9. Ю. Р. ЛЕПИК, *Одна возможность решения задачи об устойчивости упруго-пластических пластинок в точной постановке*, Изв. АН СССР, ОТН, 8, (1957), 13–19.
10. Ю. Р. ЛЕПИК, *К исследованию послекритической стадии пластинок, потерявших устойчивость за пределом упругости*, Уч. Зап. Тартуского Гос. Унив., **73** (1959), 181–192.
11. Ю. Р. ЛЕПИК, Е. Е. СЛККОВ, *Исследование закритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости*, Мех. Полимеров, 5 (1968), 881–886.
12. N. W. MCLACHLAN, *Bessel Functions for Engineers*, Clarendon Press, Oxford 1955 (tłum. polskie, PWN, W-wa 1964)
13. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметричного строения*, Мех. Тв. Тела, 4 (1966), 97–103.
14. С. Е. PEARSON, *Bifurcation criterion and plastic buckling of plates and columns*, J. Aero. Sci., 7, **17** (1950), 417–424, 455.
15. A. PFLÜGER, *Zur plastischen Beulung von Flächenträgern*, ZAMM, Sonderheft **47** (1967), T209–211.
16. С. М. ПОПОВ, *Устойчивость круглых пластинок за пределом упругости*, Инж. Сборник, **27** (1960), 92–100.
17. Е. РУТЕЛ, Z. WASZCZY SZY N, *Przybliżone obliczanie obciążenia krytycznego trójwarstwowej płyty poza zakresem sprężystym*, Arch. Bud. Maszyn (w druku).
18. Ф. И. РУЗАНОВ, *О потере устойчивости тонких анизотропных пластин и пологих оболочек в пластической области*, Сб. „Пластическое течение металлов”, Изд. „Наука”, Москва 1968, 44–52.
19. Е. СЛККОВ, *Исследование послекритической стадии устойчивости*, Уч. Зап. Тартуского Унив., **206** (1967), 160–173.
20. Б. И. СЕГАЛ, К. А. СЕМЕНДЯЕВ, *Пятизначные математические таблицы*, Изд. 3, Физматгиз, Москва 1965.
21. M. SOKOŁOWSKI, *O granicy stosowania hipotezy Kirchhoffa w teorii zginania płyt poprzecznie niejednorodnych i warstwowych*, Arch. Inż. Łąd., 1, **5** (1959), 3–13.
22. E. Z. STOWELL, *A unified theory of plastic buckling of columns and plates*, NACA TR 898, 1948.

23. *Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса*, Библ. Матем. Таблиц, вып. 12, Вычисл. Центр АН СССР, Москва 1960.
24. *Teoria plastycznosci*, праца zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
25. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, Mc Graw-Hill, 1961 (tłum. polskie, „Arkady”, Warszawa 1963).
26. Л. А. Голоконников, *К вопросу об устойчивости круглых пластин, сжатых равномерно распределенным давлением по контуру*, Уч. Зап. Ростовского Гос. Унив., 3, 18 (1953).
27. Л. А. Голоконников, *Критическое давление на круглую пластинку*, Изв. АН СССР, ОТН 10, (1958), 77–86.
28. Z. WASZCZYŹYŹYŹYŹ, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, 3 (1970).
29. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. „Наука”, Москва 1967.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Идеализированная трехслойная пластинка исследуется в рамках гипотезы Кирхгоффа о нормальном сечении, обобщенной на все поперечное сечение, и в предположении однородного распределения напряжений во внешних слоях пластинки. Благодаря этим предположениям становится возможным интегрирование основной системы уравнений (2.15). Точное решение (2.17) сходно по форме с решением для упругой пластинки, однако коэффициенты в этом решении зависят как от типа процесса, так и от величины пластической деформации в несущих слоях.

Исследованы результаты, полученные в рамках принципа постоянной нагрузки (подход Кармана) и в рамках принципа возрастающей нагрузки (подход Шенли). Полученные решения справедливы как для деформационной теории пластичности, так и для теории пластического течения, в зависимости от формы элементов матрицы жесткостей E_{jr} (2.11).

Для случая возрастающей нагрузки выведена формула (3.14), по которой можно рассчитать угол наклона касательной в точке бифуркации.

Приближенное решение в рамках принципа постоянной нагрузки получено на основе метода Ильюшина, т. е. в предположении равенства нулю вариаций продольных усилий внутри пластинки. Точный метод решения приводит к характеристическим уравнениям, которые получаются при удовлетворении соотношениям непрерывности на границах между областями с различного типа процессами и при удовлетворении соответствующим краевым условиям. Для свободноопертой пластинки получается уравнение (4.7), а для заземленной пластинки — системы уравнений (4.14) или (4.16), в зависимости от числа областей. Рассмотрена также пластинка из идеально упруго-пластического материала.

В качестве численного примера в рамках теории пластического течения рассчитана пластинка из сжимаемого материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$.

В таблицах сопоставлены результаты для разных значений коэффициента $f_t = E_t/E$.

Полученные решения обобщены на случай трехслойной пластинки с упругим наполнителем. Формула (7.3) дает величину критической нагрузки для этой пластинки.

Summary

BUCKLING OF A SANDWICH CIRCULAR PLATE BEYOND THE ELASTIC LIMIT

When considering an ideal sandwich plate (the Kirchhoff hypothesis of normal segment is valid for the whole plate cross-section, in external layers act the membrane stresses), the integration of the basic set of Eqs. (2.15) is possible. The exact solution (2.17) is of the same form as in elastic plates but its coeffic-

ients depend both on the type of process and yielding of the zones of the plate considered. Results obtained on the base of the hypothesis of constant loads (Kármán's approach) and increasing loads (Shanley-type approach) are analyzed. These solutions are valid both for the deformation theory and for the plastic flow theory, depending on the form of the stiffness matrix E_{jr} , according to (2.11).

In the case of increasing loads the formula (3.14) for the slope at the bifurcation point is derived.

An approximate solution for the constant load hypothesis is obtained, applying the Ilyushin method of neglecting the membrane forces variation. The exact solution leads to characteristic equations which result from satisfying the continuity relations and the appropriate boundary conditions. Eq. (4.7) for the simply supported plate is obtained, and for the clamped one the set of Eqs. (4.14) or (4.16), depending on the number of zones of different types of processes. A special case of ideally elastic-plastic material is also considered.

Numerical computations for the theory of plastic flow and Poisson's ratio $\nu = 0.3$ are performed. The results are presented in tables for different values of the tangent modulus $f_t = E_t/E$.

The obtained solutions are generalized on the case of the real sandwich cross-section with a determinable core. The formula (7.3) has been derived to calculate the buckling load according to the Bijlaard method of split rigidities.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 grudnia 1971 r.
