

OBCIĄŻENIE LOSOWE KONSTRUKCJI JAKO FUNKCJA STOCHASTYCZNA  
Z NIEZALEŻNYMI PRZYROSTAMI

JANUSZ MURZEWSKI, ADAM WINIARZ (KRAKÓW)

Probabilistyczna teoria obciążeń konstrukcji jest dziedziną, która dopiero zaczyna się formować. Stosunkowo najczęściej jest prac dotyczących statystycznej analizy obciążeń żywiołowych: parcia wiatru [4], falowania morskiego [8], wstrząsów sejsmicznych [3]. Prac dotyczących użytkowych obciążeń konstrukcji, w ujęciu probabilistycznym, jest niewiele. Znane nam prace [1], [6] dotyczą koncentracji obciążeń ruchomych na mostach i korzystają z modeli stochastycznych ruchu drogowego lub kolejowego, które rozwija się raczej dla potrzeb teorii transportu. Obciążenia ruchome rozpatrywane z punktu widzenia teorii bezpieczeństwa konstrukcji [9] mają swoją odrębną specyfikę i prowadzą do wielu szczególnych problemów, jak np. kojarzenie obciążeń losowych, współczynniki przeciążenia itd. Te szczególne zagadnienia próbuje się rozwiązywać za pomocą metod probabilistycznych, mimo że dotąd brak adekwatnego modelu teoretycznego losowych obciążeń konstrukcji. W tej pracy próbujemy zbudować model dla obciążeń użytkowych mostów i budynków, oparty na teorii procesów stochastycznych o przyrostach niezależnych.

Pod pojęciem funkcji stochastycznej o przyrostach niezależnych rozumiemy rodzinę zmiennych losowych  $Q(x)$ , dla których przyrosty  $Q(x_{i+1}) - Q(x_i)$  są niezależnymi zmiennymi losowymi dla każdego skończonego układu  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  [5]. Teoria funkcji stochastycznych o przyrostach niezależnych jest ściśle związana z teorią funkcji stochastycznych Markowa, których własności probabilistyczne w dowolnym punkcie  $x_{i+1}$  są całkowicie określone przez wartości funkcji w punktach  $x_{i+1}$  i  $x_i$ , i nie zależą od wartości funkcji w punktach poprzedzających  $x_i$ , czyli

$$(1) \quad \text{Prob} \{Q(x_{i+1}) < Q_{i+1} | Q(x_i) = Q_i, Q(x_{i-1}) = Q_{i-1}, \dots, Q(x_1) = Q_1\} = \\ = \text{Prob} \{Q(x_{i+1}) < Q_{i+1} | Q(x_{i-1}) = Q_{i-1}\}.$$

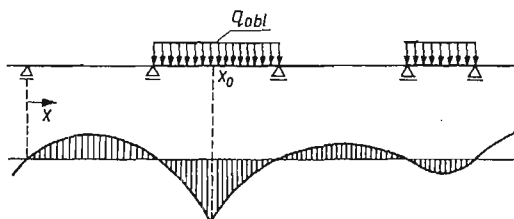
Obciążenie użytkowe konstrukcji potraktujemy jako funkcję stochastyczną o argumentie dyskretnym, wartościach niezależnych, jednorodną. Własność jednorodności polega na tym, że funkcja rozkładu dla przyrostu  $Q(x+x_0) - Q(x_0)$  nie zależy od  $x_0$ . Każde obciążenie użytkowe konstrukcji traktujemy jako sekwencję ciężarów skupionych działających w punktach  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , i to mamy na myśli mówiąc o argumentie dyskretnym.

Dotychczasowe metody wyznaczania najbardziej niekorzystnych oddziaływań w konstrukcjach statycznie wyznaczalnych i statycznie niewyznaczalnych polegają na założeniu, że obciążenie użytkowe działa na te elementy konstrukcji, dla których linie wpływowe są tego samego znaku (rys. 1).

Według wprowadzonej ostatnio do norm projektowania metody stanów granicznych obciążenie nominalne (obliczeniowe) jest iloczynem obciążenia normowego, które w zasadzie przyjmuje się równe średniej  $\bar{g}$  i współczynnika przeciążenia  $\alpha$  według wzorów

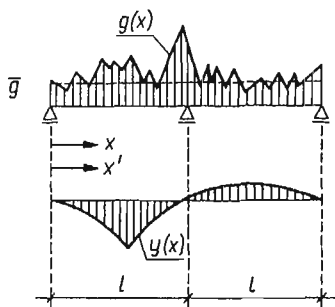
$$(2) \quad g_{\text{nom}} = \bar{g} \cdot \alpha = \bar{g}(1 + t_{\omega} v_g) = \bar{g} + t_{\omega} \mu_g,$$

gdzie  $\alpha$  — współczynnik przeciążenia,  $v_g$  — współczynnik zmienności,  $\mu_g$  — odchylenie standardowe,  $t_{\omega}$  — współczynnik tolerancji.



Rys. 1

Jeśli obciążenie losowe  $g$  ma rozkład normalny, to współczynnik tolerancji  $t_{\omega}$  jest kwantylem standaryzowanym rozkładu Gaussa, czyli wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty Gaussa dla danego prawdopodobieństwa  $\omega$ .



Rys. 2

Są próby zastosowania teorii stacjonarnych funkcji stochastycznych do analizy obciążeń. Pierwszy z autorów [9] założył następującą postać funkcji autokorelacyjnej obciążenia

$$(3) \quad K(x-x') = \mu_g^2 e^{-c|x-x'|}$$

i obliczył moment zginający jako całkę stochastyczną

$$(4) \quad M = \int_0^{2l} g(x)y(x)dx,$$

której wagami są rzędne linii wpływowej momentu zginającego dla belki ciągłej według rys. 2. Całka stochastyczna (4) jest stosowana w sensie Ito [11].

Parametr  $c$  ma wymiar odwrotny do długości i może być zapisany jako  $\frac{\gamma}{l}$ , gdzie  $\gamma$  jest

bezwymiarowym współczynnikiem, a  $l$  — rozpiętością przęsła. W skrajnych przypadkach  $\gamma \rightarrow \infty$  i  $\gamma \rightarrow 0$ , funkcja autokorelacyjna obciążenia degeneruje się. Gdy  $\gamma \rightarrow \infty$ , to obciążenie stabilizuje się na poziomie  $\bar{g}\Delta l$  dla każdego skończonego odcinka  $\Delta l$ , wobec czego intensywność obciążenia można przyjmować jako w pełni określoną wielkość, stałą na całej długości belki. Gdy  $\gamma \rightarrow 0$ , to intensywność obciążenia  $g$  jest również jednostajna na całej długości belki, ale jest zmienną losową dla różnych belek, o wartości oczekiwanej  $\bar{g}$  i wariancji  $\mu_g^2$ . Przy podejściu tradycyjnym zakłada się, że obciążenia są w pełni skorelowane (czyli  $\gamma \rightarrow 0$ ), ale tylko na długości jednego przęsła  $l$ , a ściślej na długości gałęzi linii wpływowej jednego znaku, a poza tym są niezależne. Tak więc zarówno w tradycyjnym ujęciu, jak również w proponowanym analitycznym sformułowaniu autokorelacji obciążenia (3) tkwi przypuszczenie o jej względnym charakterze, tzn. o zależności autokorelacji od rozpiętości  $l$ .

Przykładowo dla  $c = 1/l$ , korzystając z równań linii wpływowej dla belki dwuprzęsłowej liniowo-sprężystej

$$(5) \quad y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{x}{8l^2}(l^2 - x^2) & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{1}{2}(l-x) - \frac{x}{8l^2}(l^2 - x^2) & \text{dla } \frac{l}{2} \leq x \leq l, \\ -\frac{2l-x}{8l^2}[l^2 - (2l-x)^2] & l \leq x \leq 2l, \end{cases}$$

wyznacza się parametry rozkładu prawdopodobieństw i wartość obliczeniową momentu zginającego, jak następuje:

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{M} &= \bar{g} \int_0^{2l} y(x) dx = 0,070 \bar{g} l^2, \\ \mu_M^2 &= \int_0^{2l} \int_0^{2l} y(x) y(x') K(x-x') dx dx', \\ \mu_M &= 0,061 \mu_g l^2, \\ M_{\text{obl}} &= 0,070 \bar{g} l^2 + 0,061 t_{\omega} \mu_g l^2. \end{aligned}$$

W przypadkach granicznych, gdy  $c \rightarrow \infty$  i  $c \rightarrow 0$ , otrzymujemy dla  $c \rightarrow \infty$

$$(7) \quad \begin{aligned} \mu'_M &\rightarrow 0, \quad M'_{\text{obl}} = 0,070 \bar{g} l^2, \\ \text{dla } c &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\mu'_{M1} \rightarrow 0,070 \mu_g l^2, \quad M''_{\text{obl}} = 0,070 g_{\text{obl}} l^2.$$

Przy zastosowaniu metody konwencjonalnej wartość  $M_{\text{nom}} = 0,096 g_{\text{obl}} l^2$  znacznie wybiega poza omawiany przedział.

Rozbieżności te budzą zastrzeżenia odnośnie do stosowania omawianej metody, dlatego w obecnej pracy proponujemy nowy model probabilistyczny dla wyznaczania maksymalnych obciążeń, który by dał wyniki bardziej zbliżone do konwencjonalnych rozwiązań.

Rozważamy najpierw sekwencję ciężarów losowych  $G$  (rys. 3), stochastycznie niezależnych, działających na konstrukcję w odstępach stałych  $\Delta x = \text{const}$ , przy czym oczywiście może być  $G = 0$ .

Ponieważ założyliśmy, że obciążenia  $G_i$  są niezależne, a ponadto spełniają pozostałe założenia centralnego twierdzenia granicznego rachunku prawdopodobieństwa (skończona wartość średnia i skończona wariancja) [5], wobec tego moment zginający

$$(8) \quad M = \sum_{i=1}^n G_i y_i$$

ma rozkład asymptotycznie normalny o parametrach

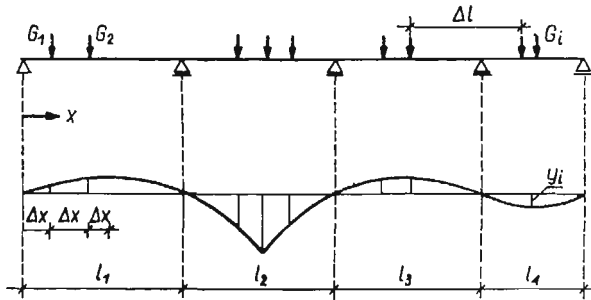
$$(9) \quad \bar{M} = \frac{\bar{G}}{\Delta x} \sum_{i=1}^n y_i \Delta x \approx \bar{g} \int_0^{el} y(x) dx,$$

$$\mu_M = \frac{\mu_G}{\Delta x} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 (\Delta x)^2} \approx \mu_g \sqrt{\int y^2(x) dx / \lambda},$$

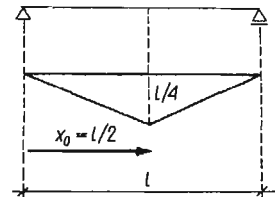
gdzie

$$\bar{g} = \lambda \bar{G}, \quad \mu_g = \lambda \mu_G, \quad \lambda = \frac{1}{\Delta x}.$$

Obliczenia oparte na rozkładach asymptotycznych dają dokładne wyniki wówczas, gdy rozpiętość belki  $l$  jest bardzo duża w porównaniu z elementarnym odstępem  $\Delta x$ .



Rys. 3



Rys. 4

Przykładowo dla belki jednoprzęsłowej (rys. 4) parametry (9) rozkładu dla momentu zginającego wynoszą odpowiednio

$$(10) \quad \bar{M} = \frac{\bar{g} l^2}{8}, \quad \mu_M = \frac{\mu_g l}{4} \sqrt{\frac{l}{3\lambda}}.$$

Przyjmując współczynnik tolerancji  $t_w = 3$  oraz współczynnik zmienności  $v = 0,067$  porównujemy obliczenia uzyskane przy zastosowaniu omawianej metody i metody konwencjonalnej

$$(11) \quad M_{\text{ob1}} = \frac{\bar{g} l^2}{8} \left( 1 + \frac{0,231}{\sqrt{\lambda l}} \right), \quad M_{\text{nom}} = 1,2 \frac{\bar{g} l^2}{8}.$$

Traktując parametr  $\lambda$  jako stałą cechę otrzymujemy następujący wniosek:

$$(12) \quad M_{\text{ob1}} \leq M_{\text{nom}} \quad \text{dla} \quad l \geq l_0 = \frac{1,32}{\lambda} = 1,32 \Delta x.$$

W przypadku belki dwuprzęsłowej (rys. 5) rozkład przęsłowego momentu zginającego ma parametry

$$(13) \quad \bar{M} = 0,070\bar{g}l^2, \quad \mu_M = 0,11\mu_g l \sqrt{\frac{l}{\lambda}},$$

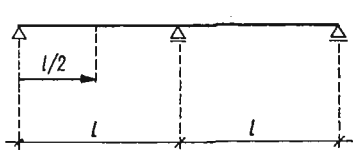
a wartości momentów obliczeniowych i «rozpiętość przelomowa»  $l_0$  wynoszą

$$(14) \quad M_{obl} = 0,070\bar{g}l^2 \left( 1 + \frac{0,33}{\sqrt{\lambda l}} \right), \quad M_{nom} = 1,2 \cdot 0,070\bar{g}l^2, \quad l_0 = \frac{2,72}{\lambda}.$$

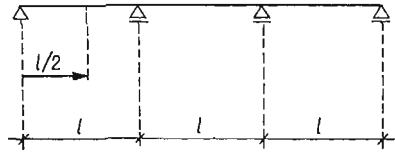
Podobnie w przypadku belki trójprzędłowej (rys. 6) mamy

$$(15) \quad M_{obl} = 0,078\bar{g}l^2 \left( 1 + \frac{0,28}{\sqrt{\lambda l}} \right), \quad M_{nom} = 1,2 \cdot 0,078\bar{g}l^2, \quad l_0 = \frac{1,96}{\lambda}.$$

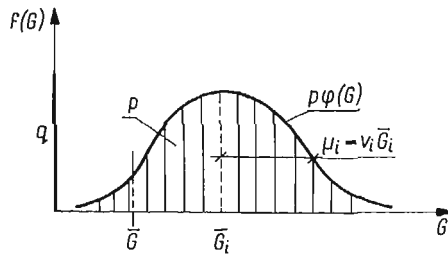
Rozkład prawdopodobieństw ciężarów losowych  $G$  nie jest ciągły gdyż nie można pominąć, realistycznie rzecz biorąc, skończonego prawdopodobieństwa  $q$  braku obciążenia (tzn.  $G = 0$ ) (rys. 7).



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Gęstość rozkładu wyraża się więc wzorem

$$(16) \quad f(G) = q\delta(G) + p\varphi(G),$$

gdzie  $\delta(G)$  — dystrybucja Diraca,  $p + q = 1$ ,  $\varphi(G_i)$  — gęstość warunkowa dla  $G_i \neq 0$ , a parametry rozkładu wynoszą

$$\bar{G} = p\bar{G}_i = \bar{g}\Delta x, \quad \mu = \sqrt{p(q+v_i^2)} \bar{G}_i, \quad v = \sqrt{\frac{q+v_i^2}{p}},$$

gdzie  $\bar{G}_i, v_i$  — parametry rozkładu realnych (niezerowych) ciężarów.

Gęstość rozkładu  $\varphi(G)$  niekoniecznie musi być normalna. Może być to np. funkcja rozkładu gamma lub inna — niesymetryczna, a nawet funkcja rozkładu wielomodalna. Ta ostatnia występuje np. w przypadku obciążenia niezbyt długich mostów samochodami osobowymi lub ciężarówkami o bardzo różnych ciężarach.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że  $\Delta x = \text{const}$ . Obecnie potraktujemy odstęp między ciężarami  $\Delta x = t$  jako losowy i wyprowadzimy rozkład prawdopodobieństw dla zastępczego obciążenia  $= G/t$ , korzystając z niezależności zmiennych losowych  $G$  i  $t$ . Na mocy twierdzeń dotyczących rozkładu ilorazu zmiennych losowych niezależnych [7] mamy

$$(17) \quad f(g) = q\delta(g) + p \int_0^{\infty} \varphi(gt)f(t)tdt,$$

gdzie  $f(t)$  — gęstość prawdopodobieństw odstępów pojedynczych obciążeń,  $t = x_{i+t} - x_i$ .

Ogólnie możemy tu rozróżnić 3 typy strumieni obciążeń:

$$(18) \quad \begin{aligned} 1) f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} && \text{— Poissona,} \\ 2) f(t) &= \frac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda k t} && \text{— Erlanga,} \\ 3) f(t) &= \delta(t - \Delta x) && \text{— Palma (rozważany poprzednio),} \end{aligned}$$

gdzie obecnie  $\lambda = \frac{1}{t}$ .

Pierwszy i trzeci typ strumienia są to szczególne przypadki strumienia Erlanga, a to odpowiednio dla  $k = 1$  i  $k = \infty$ .

W przypadku strumienia poissonowskiego otrzymujemy

$$(19) \quad f(g) = q\delta(g) + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \varphi(gt)tdt,$$

w czym rozpoznajemy transformację Laplace'a funkcji  $\varphi(gt)t$  [10]. Postać wzoru (19) pozwala na szerokie jego stosowanie ze względu na rozpowszechnione tablice transformat Laplace'a [2]. I tak, w przypadku gdy rozkład warunkowy  $\varphi(G_i)$  jest normalny o parametrach  $N(\bar{G}_i, \mu_i)$  mamy

$$(20) \quad f(g) = q\delta(g) + \frac{p\lambda}{g^2} e^{-\frac{\bar{G}_i}{2\mu_i^2}} \left[ \frac{\mu_i}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\mu_i^2}{2} se^{\frac{\mu_i^2 s^2}{2}} \text{Erfc} \left( \frac{\mu_i}{\sqrt{2}} s \right) \right],$$

gdzie

$$s = \frac{\lambda}{g} - \frac{\bar{G}_i}{\mu_i^2}, \quad \text{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Prostszy rozkład otrzymujemy w przypadku, gdy rozkład  $\varphi(G_i)$  jest typu gamma

$$(21) \quad \varphi(G) = \frac{1}{G\Gamma(v_i^{-2})} \sqrt{\frac{G}{v_i^2 \bar{G}_i}} \exp\left(\frac{-G}{v_i^2 \bar{G}_i}\right).$$

Mamy wówczas

$$(22) \quad f(g) = q\delta(g) + \frac{p\lambda \bar{G}_i}{g^2} \left( \frac{g}{\lambda v_i^2 \bar{G}_i + g} \right)^{v_i^{-2} + 1}.$$

W celu wyznaczenia występującego we wzorze (16) prawdopodobieństwa  $p$  zanalizujemy bliżej zagadnienie przerw między sekwencjami obciążeń.

Losowa liczba brakujących sił w przerwie między grupami ciężarów podlega rozkładowi geometrycznemu

$$(23) \quad P(n) = q^{n-1}p, \quad \bar{n} = \frac{1}{p}.$$

Wyprowadzimy rozkład prawdopodobieństw  $f(\Delta l)$  przerwy w obciążeniu korzystając z zależności

$$(24) \quad f(\Delta l) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\Delta l/n)P(n)$$

i z faktu, że w przypadku strumienia poissonowskiego  $f(t)$  rozkład warunkowy  $f(\Delta l/n)$  jest typu gamma.

Mamy więc

$$(25) \quad f(\Delta l/n) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} (\Delta l)^{n-1} e^{-\lambda \Delta l}.$$

Stąd i z (24) wynika

$$(26) \quad f(\Delta l) = p \lambda e^{-p \lambda \Delta l}.$$

Rozkład (26) jest typu wykładniczego o wartości średniej  $\bar{\Delta l} = \frac{1}{p\lambda}$ , co pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo  $p = \frac{1}{\lambda \bar{\Delta l}} = \frac{\bar{t}}{\bar{\Delta l}}$  z pomiarów średniego gabarytu pojedynczego obciążenia i średniej przerwy między obciążeniami. Podobnie w przypadku strumienia Erlanga mamy

$$(27) \quad f(\Delta l/n) = \frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)} (\Delta l)^{nk-1} e^{-\lambda \Delta l},$$

stąd warunkowa wartość średnia

$$\bar{\Delta l}_n = \frac{nk}{\lambda}.$$

Tym razem na mocy relacji między wartością średnią warunkową i bezwarunkową otrzymujemy

$$(28) \quad \bar{\Delta l} = \frac{k}{p\lambda},$$

a więc

$$(29) \quad p = \frac{k}{\lambda \bar{\Delta l}} = \frac{\bar{t}}{v_t^2 \bar{\Delta l}},$$

bowiem dla rozkładu Erlanga

$$k = v_t^{-2}, \quad \lambda = \bar{t}^{-1}.$$

Powyższe rozważania wskazują, że znajomość statystyk:  $\bar{G}_i, v_i; \bar{t}, v_t; \bar{\Delta l}$  w pełni pozwala wyznaczyć wszystkie parametry omawianego modelu probabilistycznego.

Przyпускаjąc, że przedstawiona teoria probabilistyczna pozwoli wytłumaczyć efekty takie, jak redukcja maksymalnych obciążeń szkieletów wielokondygnacyjnych, specjalne reguły obciążenia mostów wieloprzęsłowych itd., które w tradycyjnej metodzie wymiarowania uwzględniano w sposób intuicyjny, umownymi przepisami.

#### Literatura cytowana w tekście

1. O. ASPLUND, *Probabilities of traffic loads on bridges*, ASCE Proc., Vol. 81, Sep. 585, Jan. 1955.
2. H. BATEMAN, *Tables of integral transforms*, vol. 1, N. York 1954, (tłum. ros., wyd. Nauka, Moskwa 1969).
3. В. В. БОЛОТИН, *Применение статистических методов для оценки прочности конструкции при сейсмических воздействиях*, Инж. Сборник, т. 27, Изд. АН СССР, 1959.
4. E. COMELLINI, C. MANUZIO, *Rational determination of design loadings for overhead line towers*, International Conference on Large High Tension Electric Systems, No 23-08, June 1968.
5. W. FELLER, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I i II, PWN, Warszawa 1969.
6. J. FERRY BORGES, *Dynamic loads*, General Report on theme VI, VIII Congress International Association for Bridge and Structural Engineering, N. York 1968.
7. I. KOTLARSKI, *Rachunek prawdopodobieństwa dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1966.
8. E. V. LEWIS, *Predicting long-term distributions of wave induced bending moment on ship hulls*, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, No 6, July 1967.
9. J. MURZEWSKI, *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*, Arkady, Warszawa 1970.
10. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
11. Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, *Условные марковские процессы и их применения к теории оптимального управления*, Изд. Московского Университета, Москва 1966.

#### Резюме

#### СЛУЧАЙНАЯ НАГРУЗКА СООРУЖЕНИЙ КАК СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Изгибающие моменты для упругих балок [8] зависят линейно от последовательности случайных нагрузок  $G_i$  на балке, причём вполне определёнными коэффициентами  $y_i$  являются ординаты линии влияния изгибающего момента. Для эквивалентных распределённых нагрузок  $g(x)$  определяются параметры распределения вероятностей изгибающего момента. При выводе распределения вероятности нагрузки  $g(x)$  сперва предполагается постоянные расстояния  $\Delta x$ , между стохастически независимыми нагрузками  $G$ , а затем случайные расстояния  $t$ . Учитывается также конечная вероятность, отсутствия нагрузки ( $G = 0$ ).

#### Summary

#### RANDOM LOAD OF STRUCTURES AS A STOCHASTIC FUNCTION WITH INDEPENDENT INCREMENTS

The bending moments for elastic beams (8) depend linearly on the sequence of random gravity loads  $G_i$  acting on the beam, and the deterministic factors  $y_i$  are the ordinates of an influence line for the bending moment. The parameters of probability distribution for the bending moment are defined for an equivalent uniformly distributed load  $g(x)$ . Constant distance  $\Delta x$  for stochastically independent loads  $G$  are initially assumed, and then — a random variable distance  $t$  is prescribed for the derivation of the probability distribution of the load  $g(x)$ . A finite probability  $q$  of no loading ( $G = 0$ ) is taken under consideration.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lipca 1971 r.



OPTIMALIZACJA WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH  
NAPĘDU GŁÓWNEGO OBRABIARKI

JANUSZ BARAN, KRZYSZTOF MARCHELEK (SZCZECIN)

Procesy dynamiczne zachodzące w napędzie głównym obrabiarki w czasie jego rozruchu i hamowania, a także podczas skrawania, wywierają istotny wpływ na trwałość i żywotność elementów obrabiarki oraz na takie wskaźniki technologiczne, jak chropowatość powierzchni obrobionej i trwałość ostrza narzędzia skrawającego. Na podstawie obserwacji pracy napędów obrabiarek w warunkach przemysłowych stwierdzono, że najczęstszymi uszkodzeniami ulegają podczas rozruchu i hamowania napędy nie zawierające sprzęgieł. Zachodzące w takich napędach procesy przejściowe, wywołane włączeniem silnika napędzającego, charakteryzują się dużym przeregulowaniem odpowiedzi skokowej i znacznym czasem trwania.

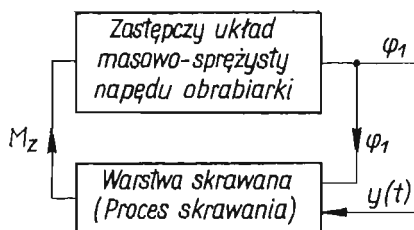
Przeprowadzone przez WEJCA [1] na matematycznej maszynie analogowej badania procesów przejściowych zachodzących w napędzie głównym wykazały, że jednym z podstawowych wskaźników jakości dynamicznej napędu jest stosunek  $T_E/T_M$ , gdzie:  $T_E$  — elektromagnetyczna stała czasowa silnika,  $T_M$  — elektromechaniczna stała czasowa silnika. Im większa jest wartość  $T_E/T_M$ , tym silniejszy jest wpływ procesów przejściowych przebiegających w silniku elektrycznym na procesy dynamiczne zachodzące w napędzie głównym. RIWIN [2] wykazał, że przebieg procesów przejściowych zachodzących przy rozruchu i hamowaniu zależy od parametrów opisujących model fizyczny napędu głównego.

Zależność wskaźników procesu przejściowego od parametrów opisujących model napędu głównego obrabiarki jest bardzo złożona. Trudno jest zatem wprost określić optymalne wartości parametrów opisujących, które gwarantowałyby osiągnięcie eksperymentalnych wartości wskaźników jakości dynamicznej napędu. Dysponując odpowiednio dokładnym modelem matematycznym napędu głównego można, stosując metody optymalizacyjne, wyznaczyć także wartości parametrów opisujących, przy których spełnione będą założone kryteria. Ogólnie biorąc, optymalizacja napędu głównego obrabiarki powinna być optymalizacją wielokryterialną, uwzględniającą zarówno wskaźniki techniczne (sztywność technologiczna, zapas stabilności, ciężar, wymiary itp.), jak i wskaźniki ekonomiczne (wydajność urządzenia, koszty budowy i eksploatacji itp.). W literaturze dotyczącej obrabiarek spotkać można prace na temat optymalizacji konstrukcji, np. w pracy [3] omówiono zagadnienia optymalizacji konstrukcji obrabiarek ze względu na wskaźniki ekonomiczne. Brak jest natomiast opracowań metod optymalizacji właściwości dynamicznych obrabiarek i zespołów obrabiarkowych.

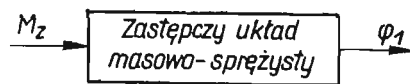
W rozpatrywanym przypadku optymalizacja została przeprowadzona pod kątem polepszenia jakości przebiegu procesów przejściowych w zależności od parametrów opi-

sujących model. Jest to zatem optymalizacja jednokryterialna. Przebieg procesów przejściowych jest związany z takimi wskaźnikami, jak czas jego trwania wartość «przeregulowania» odpowiedzi skokowej układu itp. Wskaźniki te ściśle są związane z innymi wskaźnikami jakości dynamicznej, jak stopień i zapas stabilności, reakcja układu na wymuszenie zewnętrzne.

Optymalizację dynamicznego układu napędu głównego przeprowadzić można dla przypadku biegu jałowego oraz dla skrawania. Układ dynamiczny napędu głównego obrabiarki przedstawić można za pomocą schematu blokowego (rys. 1). Schemat ten opisuje przypadek skrawania. Dla biegu jałowego schemat blokowy układu dynamicznego upraszcza się (rys. 2), nie występuje bowiem człon «proces skrawania» i sprzężenie zwrotne między członami «układ masowo-sprężysty» i «proces skrawania».



Rys. 1. Schemat blokowy zamkniętego układu dynamicznego napędu obrabiarki



Rys. 2. Schemat blokowy układu dynamicznego napędu głównego biegu jałowego

Ponieważ procesy przejściowe odgrywają dominującą rolę przy rozruchu i hamowaniu napędu, optymalizację układu dynamicznego napędu głównego należy przede wszystkim prowadzić pod kątem ich polepszenia. Oczywiście jest, że uzyska się także polepszenie wskaźników procesów dynamicznych zachodzących w czasie skrawania; przede wszystkim wzrośnie stopień i zapas stabilności.

Własności dynamiczne układu dynamicznego pokazanego na rys. 2 opisuje zależność między sygnałem wyjściowym a sygnałem wejściowym [4]

$$(1) \quad \varphi(t) = G[W, M_z(t)],$$

gdzie

$\varphi(t)$  — sygnał wyjściowy,  $M_z(t)$  — sygnał wejściowy,  $W$  — funkcja przejścia członu.

W najogólniejszym przypadku napęd obrabiarki jest układem bardzo złożonym pod względem dynamicznym. Jest to układ nieliniowy, o nieskończonej liczbie stopni swobody, o masach i właściwościach sprężystych rozłożonych w sposób ciągły. W dynamicznym układzie napędu głównego obrabiarki występują sprzężenia wewnętrzne między drganiami skrętnymi i poprzecznymi. Optymalizacja własności dynamicznych tak złożonego układu jest zagadnieniem trudnym.

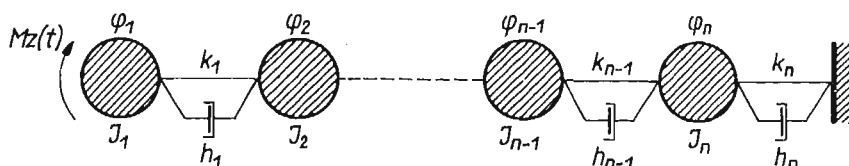
Na podstawie licznych badań [2, 4] wykazano, że z dużym powodzeniem układ dynamiczny napędu głównego obrabiarki aproksymować można modelem liniowym. Liniowe przybliżenie pozwala przeanalizować znaczną część praktycznie ważnych zjawisk i stanowi bazę do dalszego badania układów bardziej złożonych. Liniowy model mechaniczny układu przedstawiono na rys. 3. Model matematyczny napędu głównego frezarki stanowi układ

liniowy równań różniczkowych zwyczajnych następującej postaci:

$$(2) \quad \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + h_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= M(t), \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - h_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ J_n \ddot{\varphi}_n - h_{n-1}(\dot{\varphi}_{n-1} - \dot{\varphi}_n) + h_n \varphi_n - k_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + k_n \varphi_n &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnie z równań układu (2) jest równaniem ruchu silnika napędzającego [4].

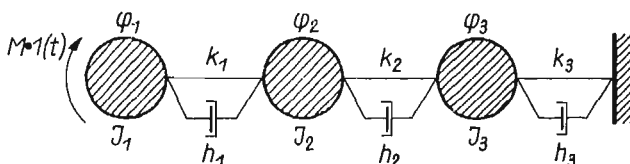
Jako funkcję celu (odległości) w procedurze optymalizacji przebiegu procesu przejściowego w napędzie głównym obrabiarki przyjęto: przeregulowanie odpowiedzi skokowej



Rys. 3. Układ dyskretny napędu głównego frezarki

układu  $\Delta h_1$  i czas trwania procesu przejściowego  $t_{r_1}$  dla współrzędnej  $\varphi_1$  opisującej kąt skręcenia napędu mierzony na wrzecionie. Właściwie są to dwie funkcje celu sprzężone pomiędzy sobą parametrami układu. Wyznaczenie tych funkcji w postaci pewnego związku matematycznego parametrów napędu głównego obrabiarki jest praktycznie niemożliwe, dlatego do badań optymalizacyjnych zastosowano zmodyfikowaną metodę reakcyjną.

W metodzie tej procedurę optymalizacji rozpoczyna się od zmiany tylko jednego parametru, podczas gdy inne są utrzymywane na poziomie stałej wartości. Stosując ją osiąga się ten sam wynik, jak przy innych metodach, jest ona natomiast łatwiejsza do zrealizowania na maszynie analogowej. Parametr ulega zmianie aż do chwili osiągnięcia minimum lokalnego. Operację iteracyjną stosuje się dla każdego z parametrów zmiennych do chwili osiągnięcia przez ten parametr minimum. Proces minimalizacji można ograniczyć do mniejszej liczby kroków, przechodząc do następnego parametru już wówczas, gdy minimum lokalnego nie osiągnięto przy założonej liczbie kroków.



Rys. 4. Układ masowo-sprężysty z tłumieniem wiskotycznym o trzech stopniach swobody

Metody gradientowe mają jedną niekorzystną cechę. Jeżeli istnieje kilka ekstremów (minimum) i jeżeli się osiągnie jedno z minimum, to nie można gwarantować, że rozwiązanie uzyskane na maszynie zbliży się właśnie do tego minimum, ponieważ rozwiązanie zadania rozpoczęła maszyna od dowolnego zbioru wartości parametrów.

Wadę zastosowanej metody usunięto w ten sposób, że na końcu procesu optymalizacji sprawdzono, czy istnieją inne minima lokalne. Wyniki były negatywne, co oznacza, że w założonych granicach zmian parametrów istniało tylko jedno minimum lokalne.

Procedurę optymalizacji napędu głównego obrabiarki przeprowadzono na maszynie analogowej ELWAT-1. Ze względu na ograniczoną pojemność operacyjną użytej maszyny model mechaniczny napędu głównego obrabiarki należy zredukować do trzech stopni swobody. Redukcji stopni swobody dokonano za pomocą zmodyfikowanej metody RIWINA [6]. Model mechaniczny napędu głównego frezarki przedstawiono na rys. 4.

Model ten opisany jest układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(3) \quad \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + h_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= M \cdot 1(t), \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - h_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - h_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + h_3 \dot{\varphi}_3 - k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + k_3 \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jako funkcję wejścia przyjęto skok jednostkowy (funkcja Heaviside'a), Równania (3) przekształcono w postać bezwymiarową

$$(4) \quad \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2\xi_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) &= m \cdot 1(t), \\ n_1^2 \ddot{\varphi}_2 - 2\xi_2 n_1 [\alpha_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)] + [-\beta_1(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3)] &= 0, \\ n_2^2 \ddot{\varphi}_3 - 2\xi_3 n_2 [\alpha_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) - \dot{\varphi}_3] + [-\beta_2(\varphi_2 - \varphi_3) + \varphi_3] &= 0. \end{aligned}$$

W równaniach (4) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(5) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{h_1}{2\sqrt{J_1 k_1}}, & \alpha_1 &= \frac{h_1}{h_2}, & \beta_2 &= \frac{k_2}{k_3}, \\ \xi_2 &= \frac{h_2}{2\sqrt{J_2 k_2}}, & \alpha_2 &= \frac{h_2}{h_3}, & \frac{1}{n_1} &= \frac{T_1}{T_2}, \\ \xi_3 &= \frac{h_3}{2\sqrt{J_3 k_3}}, & \beta_1 &= \frac{k_1}{k_2}, & \frac{1}{n_2} &= \frac{T_1}{T_3}, \end{aligned}$$

przy czym

$$T_1 = \sqrt{\frac{J_1}{k_1}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{J_2}{k_2}}, \quad T_3 = \sqrt{\frac{J_3}{k_3}}$$

oraz przyjęto skalę czasu w postaci tzw. czasu bezwymiarowego

$$(6) \quad \tau = \frac{t}{T_1},$$

gdzie  $\tau$  — czas maszynowy (bezwymiarowy),  $t$  — czas rzeczywisty.

Model analogowy napędu głównego obrabiarki przedstawiono na rys. 5.

Stosując metody analizy wymiarowej stwierdzono, że dwa parametry bezwymiarowe są zależne, tzn. są funkcją pozostałych parametrów.

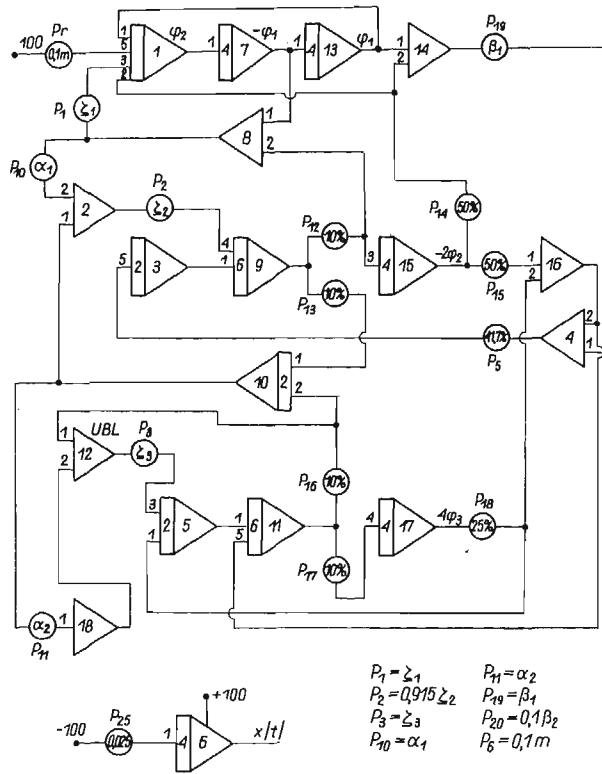
$$(7) \quad \alpha_1 = \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\beta_1}{n_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3} \frac{\beta_2}{n_2} n_1.$$

Współczynniki te charakteryzują sprzężenia dysypacyjne w układzie, a ich wpływ na jakość przebiegu procesów przejściowych jest minimalny (mieści się w granicach błędu pracy maszyny analogowej).

Parametry podlegające optymalizacji, tj.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \beta_1, \beta_2, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}$  nie mogą zmieniać się dowolnie. Nałożone są na nie ograniczenia wynikające z prawidłowego funkcjonowania obiektu. Granice dopuszczalnych zmian przyjęto w sposób następujący:

— dla współczynników względnego tłumienia za maksymalną wartość przyjęto  $\xi_{max} = 0,4-0,5$ . Odpowiada to takiemu stopniowi dysypacji energii mechanicznej, jaki zapewnić mogą tarcie tłumiki drgań [5],

— dla współczynników  $\beta_1, \beta_2, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}$  przyjęto zmianę w dół w zakresie 50% wartości nominalnej i w górę, w zakresie 100% wartości nominalnej.



Rys. 5. Model analogowy napędu głównego obrabiarki

Można przypuszczać, że zmiana parametrów w tak określonych granicach gwarantuje uzyskanie wartości optymalnej, możliwej do praktycznej realizacji. Współczynniki te mają wpływ na modulację przebiegu w zależności od dominacji pierwszej lub kolejnej częstotliwości układu. Podlegające optymalizacji parametry  $J_i, h_i$  oraz  $k_i$  (lub ich kombinacje bezwymiarowe) traktować można jako zmienne losowe. Wynika to stąd, że optymalizacji

podlegają parametry zredukowane np. na wrzeciono. Uzyskane na tej podstawie tzw. parametry bezwzględne mają dla każdej prędkości obrotowej napędu inne wartości optymalne. Ponieważ napęd można zrealizować konstrukcyjnie tylko dla jednego zbioru parametrów bezwzględnych, zastosowano do tego celu prawa rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Wyznaczyć można w ten sposób najbardziej prawdopodobne bezwzględne parametry.

Opierając się na niecentralnej statystyce [7] stwierdzono, że powyżej liczby prób  $n = 5$  dla prawdopodobieństwa  $p = 95\%$  dokładność uzyskanych wyników rośnie bardzo wolno. Z tego względu przyjęto do optymalizacji pięć prędkości obrotowych napędu głównego. Na podstawie uzyskanych danych prędkości obrotowych parametrów optymalnych wyznaczono najbardziej prawdopodobne parametry bezwzględne.

Na podstawie analizy wykresu przełożeń napędu głównego frezarki FWH25 do badań wytypowano następujące łańcuchy kinematyczne:

1.  $n = 45$  obr/min — zakres wolnoobrotowy,
2.  $n = 180$  obr/min } — zakres średnioobrotowy,
3.  $n = 560$  obr/min }
4.  $n = 900$  obr/min } — zakres szybkoobrotowy,
5.  $n = 2240$  obr/min }

Prędkości obrotowe są tak dobrane, że w sposób wystarczający charakteryzują właściwości dynamiczne napędu głównego frezarki. Parametry charakteryzujące układ przed optymalizacją i układ po optymalizacji podano odpowiednio w tabl. 1 i tabl. 2 (jako przy-

Tablica 1. Parametry modelu mechanicznego — układ przed optymalizacją

Frezarka FWH25; $n = 560$ obr/min		
$J_i$ [kGmsek <sup>2</sup> ]	$h_i$ [kGmsek]	$k_i$ [kGm/rad]
$13,204 \cdot 10^{-3}$	0,184	$1,12 \cdot 10^3$
$3,654 \cdot 10^{-3}$	0,051	$0,75 \cdot 10^3$
$23,092 \cdot 10^{-3}$	0,095	$0,171 \cdot 10^3$

Tablica 2. Parametry modelu mechanicznego — układ po optymalizacji

Frezarka FWH25; $n = 560$ obr/min		
$J_i$ [kGmsek <sup>2</sup> ]	$h_i$ [kGmsek]	$k_i$ [kGm/rad]
$13,20 \cdot 10^{-3}$	0,384	$1,12 \cdot 10^3$
$5,4 \cdot 10^{-3}$	0,245	$1,12 \cdot 10^3$
$74,6 \cdot 10^{-3}$	3,66	$0,281 \cdot 10^3$