MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

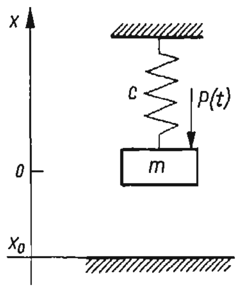
STATYSTYCZNA ANALIZA UKŁADU WIBROUDERZENIOWEGO

WŁODZIMIERZ GAWROŃSKI (GDAŃSK)

Ważniejsze oznaczenia

$\frac{\partial(\ldots\ldots)}{\partial(\ldots\ldots)}$ jakobian (wyznacznik funkcyjny),
M_x wartość średnia zmiennej x,
E symbol uśredniania,
σ_x^2 wariancja zmiennej x,
K_{xx} moment korelacyjny zmiennej x,
K_{xy} moment korelacji wzajemnej zmiennych x i y.

Schemat układu pokazano na rys. 1. Na masę m podwieszoną na sprężynie o sztywności c działa siła okresowa $P(t) = P_0 \sin(\omega t+\varphi)$. Masa m w czasie ruchu uderza o zderzak. Przy analizie ruchu układu zakładamy, że masa zderzaka jest nieskończenie duża, a czas



Rys. 1

uderzenia masy o zderzak jest mały w porównaniu z okresem ruchu. Zjawisko uderzenia scharakteryzowane jest współczynnikiem restytucji prędkości R.

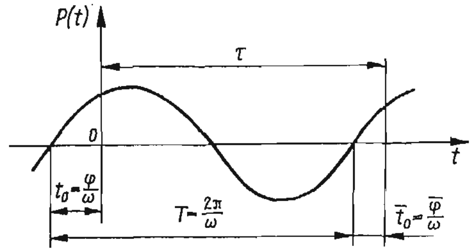
W przyjmowanym najczęściej modelu układu wibrouderzeniowego zakłada się, że położenie zderzaka jest niezmienne w czasie. Zderzakiem tym często bywa pal wbijany w grunt, a zadaniem wibromłota, którego modelem jest układ wibrouderzeniowy, jest zmiana położenia tego zderzaka. Skład i struktura gruntu jest (również w kierunku przesuwu pala) zmienną losową. Parametry statystyczne tej zmiennej dla danego typu gleb, warunków otoczenia itp. można wyznaczyć doświadczalnie. Położenie zderzaka x_0 jest więc zmienną losową.

Dalej przyjmujemy założenie, że zarówno wartość średnia tej zmiennej, jak i jej wariancja są wielkościami stałymi

(1) $$M_{x_0} = \text{const}, \quad \sigma_{x_0}^2 = \text{const}.$$

Ruch układu rozpatrywać będziemy między dwoma kolejnymi uderzeniami masy o zderzak. Przy tego typu analizie ruchu układu zjawisko uderzenia masy o zderzak wpływa na warunki początkowe ruchu. Ponieważ położenie zderzaka x_0 jest zmienną losową, więc i warunki początkowe ruchu są zmienną losową. Ruch masy, tj. stan dynamiczny układu należy więc rozpatrywać w aspekcie probabilistycznym.

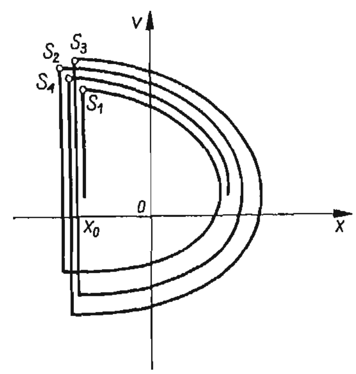
Położenie układu $x(t)$ i jego prędkość $v(t)$ można przedstawić w zależności od losowych warunków początkowych w postaci rozwiązania różniczkowego równania ruchu układu.



Rys. 2

W badanym przypadku nie interesuje nas jednak położenie i prędkość masy w chwili bieżącej t, lecz czas w jakim masa m wychodząc z położenia $x = x_0$ wróci do tego położenia oraz jej prędkość w tym momencie. Czas ten oznaczymy przez τ, a prędkość przez v_1. Obie te wielkości są zmiennymi losowymi. Zakładamy, że w chwili $t = 0$ nastąpiło i-te uderzenie masy o zderzak. Wielkość fazy siły wymuszającej w tym momencie oznaczamy przez φ. Przez $\bar{\varphi}$ oznaczamy wielkość fazy siły wymuszającej po $i+1$–szym uderzeniu. Z rys. 2 odczytujemy zależność między $\bar{\varphi}$, φ i τ. Analogicznie oznaczamy wielkości prędkości początkowej po i-tym uderzeniu przez v_0, a po $i+1$-szym uderzeniu przez $\bar{v}_0$.

Dla rozpatrywanego układu szukamy rozwiązania ograniczonego. Pod pojęciem ograniczoności rozumiemy tutaj prawdopodobieństwo zdarzenia, że trajektoria fazowa



Rys. 3

układu wyjdzie poza obszar A o skończonej średnicy, jest równa zeru dla $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Oznacza to, że wszystkie momenty wektora fazowego układu muszą przyjmować wartości skończone.

Rozpatrzmy w tym aspekcie ciąg punktów $S_1, S_2, S_3, \ldots$, na prostej $x = x_0$ w przestrzeni fazowej (rys. 3), jednoznacznie scharakteryzowanych przez trójwymiarową zmienną losową $y = \{\varphi, v_0, x_0\}$ (rys. 3 przedstawia rzut trajektorii fazowych na płaszczyznę $\varphi = \varphi_0$). Zależność między i-tym i $i+1$-szym wyrazem tego ciągu wyznaczona jest za pomocą funkcji, którą otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego ruchu. Funkcję tę oznaczamy literą Ω, współrzędne i-tego wyrazu ciągu przez $y = \{\varphi, v_0, x_0\}$, a współrzędne $i+1$-szego wyrazu ciągu przez $\bar{y} = \{\bar{\varphi}, \bar{v}_0, \bar{x}_0\}$. Mamy zatem

$$\bar{y} = \Omega(y). \tag{2}$$

Niech zmienne losowe y i $\bar{y}$ mają wartości średnie oznaczone odpowiednio przez $M_y = \{M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}\}$, $\overline{M}_y = \{\overline{M}_\varphi, \overline{M}_{v_0}, \overline{M}_{x_0}\}$ oraz momenty drugiego rzędu oznaczone przez

$$\mu_2 = \{K_{\varphi\varphi}, K_{v_0 v_0}, K_{x_0 x_0}, K_{\varphi v_0}, K_{\varphi x_0}, K_{v_0 x_0}\},$$

$$\bar{\mu}_2 = \{\overline{K}_{\varphi\varphi}, \overline{K}_{v_0 v_0}, \overline{K}_{x_0 x_0}, \overline{K}_{\varphi v_0}, \overline{K}_{\varphi x_0}, \overline{K}_{v_0 x_0}\}.$$

Zależności między tymi wielkościami dane są w postaci

$$\overline{M}_y = \Omega_1(M_y), \tag{3}$$

$$\bar{\mu}_2 = \Omega_2(\mu_2). \tag{4}$$

Funkcje Ω_1 i Ω_2 nazywamy odpowiednio funkcjami następstwa rzędu pierwszego i drugiego.

Jeśli istnieje rozwiązanie ograniczone, tzn. o skończonych wartościach momentów zmiennej y, to znajdziemy takie punkty M_{yi}^* i μ_2^* (patrz Aneks 1), że

$$M_{yi}^* = \Omega_1(M_y^*), \tag{5}$$

$$\mu_2^* = \Omega_2(\mu_2^*). \tag{6}$$

Punkty M_y^* i μ_2^* nazywamy punktami stałego odwzorowania odpowiednio funkcji Ω_1 i Ω_2.

W przypadku układu zdeterminowanego (występuje tylko funkcja następstwa rzędu pierwszego) związek (5) wyznacza warunki okresowości ruchu układu (czas między uderzeniami jest stały) [1]. W przypadku układu probabilistycznego czas między uderzeniami jest zmienną losową, chociaż zarówno jego wartość średnia, jak i momenty wyższego rzędu są stałe [wynika to ze związków (5) i (6)]. Ruch taki nazwiemy ruchem quasi-okresowym.

Wyznaczymy funkcje Ω_1 i Ω_2 dla badanego układu oraz ich punkty stałego odwzorowania. Charakterystyki probabilistyczne przemieszczenia masy zależą tylko od warunków początkowych, wymuszenie jest wielkością zdeterminowaną, a więc związek między $\bar{\varphi}$, $\bar{v}_0$, $\bar{x}_0$ i φ, v_0, x_0 możemy przedstawić za pomocą zależności funkcjyjnej $\bar{\varphi} = f(\varphi, v_0, x_0)$, $\bar{v}_0 = g(\varphi, v_0, x_0)$, $\bar{x}_0 = x_0$. Ostatni związek wynika, z dokładnością do momentów rzędu drugiego, z założenia (1), pozostałe wyznaczamy następująco: najpierw znajdujemy zależności między prędkością układu $\bar{v}_0$ i kątem przesunięcia fazowego siły wymuszającej $\bar{\varphi}$ tuż po $i+1$-szym uderzeniu, a prędkością układu v_1 tuż przed $i+1$-szym uderzeniem i czasem przebywania układu między uderzeniami τ. Te ostatnie zaś wielkości zależą funkcyjnie od prędkości v_0, położenia zderzaka x_0 i fazy siły wymuszającej φ tuż po i-tym uderzeniu:

$$\tau = f_1(v_0, \varphi, x_0),$$
$$v_1 = f_2(v_0, \varphi, x_0).$$

Funkcje te otrzymamy z rozwiązania równania różniczkowego ruchu, w postaci uwikłanej

$$\begin{aligned} F_1(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) &= 0, \\ F_2(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Zależność między $\bar{\varphi}$, τ i φ wynika z rys. 2 (przyjęliśmy, że czas uderzenia jest pomijalnie mały)

$$\bar{\varphi} = \omega\tau + \varphi - 2\pi, \tag{8}$$

a między $\bar{v}_0$ i v_1 określona jest związkiem

$$\bar{v}_0 = -Rv_1. \tag{9}$$

Wartości średnie M_{v_1}, M_τ i odpowiednie momenty korelacyjne wyznaczymy w sposób przybliżony, przy pomocy linearyzacji funkcji zmiennych losowych (patrz Aneks 2). Zgodnie z tą metodą wartości średnie wyznaczamy ze związków

$$\begin{aligned} F_1(M_\tau, M_{v_1}, M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}) &= 0, \\ F_2(M_\tau, M_{v_1}, M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}) &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

momenty zaś korelacyjne wyznaczamy na podstawie zależności:

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau} &= \delta_1^2 K_{\varphi\varphi} + 2\delta_1\delta_3 K_{\varphi_0} + \delta_3^2 K_{v_0v_0} + \delta_5^2 K_{x_0x_0} + 2\delta_1\delta_5 K_{\varphi x_0} + 2\delta_3\delta_5 K_{v_0x_0}, \\ K_{\tau v_1} &= \delta_1\delta_2 K_{\varphi\varphi} + (\delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3) K_{\varphi v_0} + \delta_3\delta_4 K_{v_0v_0} + \delta_5\delta_6 K_{x_0x_0} + \\ &\quad + (\delta_1\delta_6 + \delta_2\delta_5) K_{\varphi x_0} + (\delta_3\delta_6 + \delta_4\delta_5) K_{v_0x_0}, \\ K_{v_1v_1} &= \delta_2^2 K_{\varphi\varphi} + 2\delta_2\delta_4 K_{\varphi v_0} + \delta_4^2 K_{v_0v_0} + \delta_6^2 K_{x_0x_0} + 2\delta_2\delta_6 K_{\varphi x_0} + 2\delta_4\delta_6 K_{v_0x_0} \end{aligned} \tag{11}$$

oraz

$$\begin{aligned} K_{\tau\varphi} &= \delta_1 K_{\varphi\varphi} + \delta_3 K_{\varphi v_0} + \delta_5 K_{\varphi x_0}, \\ K_{\tau v_0} &= \delta_1 K_{\varphi v_0} + \delta_3 K_{v_0v_0} + \delta_5 K_{v_0x_0}, \\ K_{\tau x_0} &= \delta_1 K_{\varphi x_0} + \delta_3 K_{v_0x_0} + \delta_5 K_{x_0x_0}, \\ K_{v_1\varphi} &= \delta_2 K_{\varphi\varphi} + \delta_4 K_{\varphi v_0} + \delta_6 K_{\varphi x_0}, \\ K_{v_1v_0} &= \delta_2 K_{\varphi v_0} + \delta_4 K_{v_0v_0} + \delta_6 K_{v_0x_0}, \\ K_{v_1x_0} &= \delta_2 K_{\varphi x_0} + \delta_4 K_{vx_0} + \delta_6 K_{x_0x_0}. \end{aligned} \tag{12}$$

W związkach (11) i (12) oznaczyliśmy

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{\Delta_{11}}{\Delta_0}, \quad \delta_2 = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_0}, \quad \delta_3 = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_0}, \quad \delta_4 = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_0}, \\ \delta_5 &= -\frac{\Delta_{31}}{\Delta_0}, \quad \delta_6 = -\frac{\Delta_{32}}{\Delta_0}, \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0 = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_\tau,M_{v_1})}, \quad \Delta_{11} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_\varphi,M_{v_1})}, \quad \Delta_{12} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_\tau,M_\varphi)},\\
&\Delta_{21} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_{v_0},M_{v_1})}, \quad \Delta_{22} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_\tau,M_{v_0})}, \quad \Delta_{31} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_{x_0},M_{v_1})},\\
&\Delta_{32} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(M_\tau,M_{x_0})}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Ze związków (8) i (9) mamy

$$
\overline{M}_\varphi = \omega M_\tau + M_\varphi - 2\pi, \tag{15}
$$

$$
\overline{M}_{v_0} = -RM_{v_1}. \tag{16}
$$

Na podstawie (8) i (9) wyznaczamy także zależności między momentami korelacyjnymi zmiennych τ i v_1 i momentami korelacyjnymi zmiennych $\bar\varphi$, $\bar v_0$, $\bar x_0$:

$$
\begin{aligned}
\overline{K}_{\varphi\varphi} &= E[(\bar\varphi-\overline{M}_\varphi)^2] = E[\bar\varphi^2]-\overline{M}^2_\varphi = E[(\omega\tau+\varphi-2\pi)^2]-\\
&\quad -(\omega M_\tau+M_\varphi-2\pi)^2 = \omega^2K_{\tau\tau}+2\omega K_{\tau\varphi}+K_{\varphi\varphi},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{K}_{\varphi v_0} &= E[(\bar\varphi-\overline{M}_\varphi)(\bar v_0-\overline{M}_{v_0})] = E[\bar\varphi\bar v_0]-\overline{M}_\varphi\overline{M}_{v_0} =\\
&= E[(\omega\tau+\varphi-2\pi)(-Rv_1)]+(\omega M_\tau+M_\varphi-2\pi)RM_{v_1} = -R(\omega K_{\tau v_1}+K_{\varphi v_1}),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\overline{K}_{v_0v_0} = E[(\bar v_0-\overline{M}_{v_0})^2] = E[\bar v_0^2]-\overline{M}^2_{v_0} = E[R^2v_1^2]-R^2\overline{M}_{v_1}^2 = R^2K_{v_1v_1}, \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{K}_{\varphi x_0} &= E[\bar\varphi\bar x_0]-\overline{M}_\varphi\overline{M}_{x_0} = E[(\omega\tau+\varphi-2\pi)x_0]-\\
&\quad -(\omega M_\tau+M_\varphi-2\pi)M_{x_0} = \omega K_{\tau x_0}+K_{\varphi x_0},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
K_{v_0x_0} = E[\bar v_0\bar x_0]-\overline{M}_{v_0}\overline{M}_{x_0} = E[-Rv_1x_0]+RM_{v_1}M_{x_0} = -RK_{v_1x_0}. \tag{21}
$$

We wzorach (17)$\div$(21) skorzystaliśmy z następującej zależności:

$$
E[(x-M_x)^2] = E[x^2]-M_x^2.
$$

Zależności między v_0, φ, x_0 po i-tym i $i+1$-szym uderzeniu mają postać:

a) dla wartości średniej (funkcja następstwa rzędu pierwszego), po uwzględnieniu (1), (8), (9), (10)

$$
\begin{aligned}
&\overline{M}_{x_0} = M_{x_0},\\
&\overline{M}_\varphi = \omega M_\tau+M_\varphi-2\pi,\\
&\overline{M}_{v_0} = -RM_{v_1},\\
&F_1(M_\tau,\ M_{v_1},\ M_\varphi,\ M_{v_0},\ M_{x_0}) = 0,\\
&F_2(M_\tau,\ M_{v_1},\ M_\varphi,\ M_{v_0},\ M_{x_0}) = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

b) dla momentów korelacyjnych (funkcja następstwa rzędu drugiego), po uwzględnieniu (1), (11), (12), (17)$\div$(21), przy oznaczeniu $K_{x_0x_0} = \sigma^2_{x_0}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{K}_{\varphi\varphi} &= (\omega\delta_1+1)^2K_{\varphi\varphi}+2\omega\delta_3(\omega\delta_1+1)K_{\varphi v_0}+\omega^2\delta_3^2K_{v_0v_0}+\\
&\quad +2\omega\delta_5(\omega\delta_1+1)K_{\varphi x_0}+2\omega^2\delta_3\delta_5K_{v_0x_0}+\omega^2\delta_5^2\sigma^2_{x_0},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$\overline{K}_{\varphi v_0} = -R[\delta_2(\omega\delta_1+1)K_{\varphi\varphi}+(\omega\delta_1\delta_4+\omega\delta_2\delta_3+\delta_4)K_{\varphi v_0}+ \tag{23}$$

[c.d.]
$$+\omega\delta_3\delta_4 K_{v_0 v_0}+(\omega\delta_1\delta_6+\omega\delta_2\delta_5+\delta_6)K_{\varphi x_0}+(\delta_3\delta_6+\delta_4\delta_5)K_{v_0 x_0}+\delta_5\delta_6\sigma^2_{x_0}],$$

$$\overline{K}_{v_0 v_0} = R^2[\delta_2^2 K_{\varphi\varphi}+2\delta_2\delta_4 K_{\varphi v_0}+\delta_4^2 K_{v_0 v_0}+2\delta_2\delta_6 K_{\varphi x_0}+2\delta_4\delta_6 K_{v_0 x_0}+\delta_6^2\sigma^2_{x_0}],$$

$$\overline{K}_{\varphi x_0} = \omega\left[\left(\delta_1+\frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi x_0}+\delta_3 K_{v_0 x_0}+\delta_5\sigma^2_{x_0}\right],$$

$$K_{v_0 x_0} = -R[\delta_2 K_{\varphi x_0}+\delta_4 K_{v_0 x_0}+\delta_6\sigma^2_{x_0}].$$

Funkcje F_1 i F_2 otrzymujemy z równania ruchu układu, które ma postać

$$\ddot{x}+b^2x = p\sin(\omega t+\varphi); \quad 0 \leqslant t < \tau, \tag{24}$$

gdzie

$$b = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad p = \frac{P_0}{m}.$$

Przyjmując warunki początkowe $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ (stan układu po uderzeniu) otrzymujemy rozwiązanie równania (24) w postaci

$$x(t) = \left(x_0-\frac{p}{b^2-\omega^2}\sin\varphi\right)\cos bt+\frac{\sin bt}{b}\left(v_0-\frac{p\omega}{b^2-\omega^2}\cos\varphi\right)+\frac{p}{b^2-\omega^2}\sin(\omega t+\varphi),$$

$$\dot{x}(t) = b\sin bt\left(\frac{p}{b^2-\omega^2}\sin\varphi-x_0\right)+\left(v_0-\frac{p}{b^2-\omega^2}\omega\cos\varphi\right)\cos bt+ \tag{25}$$

$$+\frac{p\omega}{b^2-\omega^2}\cos(\omega t+\varphi).$$

Następne uderzenie w układzie nastąpi w chwili $t = \tau$, gdy $x = x_0$ i:

$$x(\tau) = x_0, \quad \dot{x}(\tau) = v_1. \tag{26}$$

Z warunków (26), na podstawie (25) otrzymujemy funkcje F_1 i F_2 w postaci

$$F_1(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) = -x_0+(x_0+C\sin\varphi)\cos b\tau+\frac{\sin b\tau}{b}\times$$

$$\times(v_0-C\omega\cos\varphi)+C\sin(\omega\tau+\varphi) = 0, \tag{27}$$

$$F_2(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) = -v_1+b\sin b\tau(C\sin\varphi-x_0)+$$

$$+\cos b\tau(v_0-C\omega\cos\varphi)+C\omega\cos(\omega\tau+\varphi) = 0,$$

gdzie

$$C = \frac{p}{b^2-\omega^2}.$$

Na podstawie zależności (22) i (27) znajdujemy punkt stałego odwzorowania dla funkcji następstwa rzędu pierwszego. Zadanie to sprowadza się do wyznaczenia warunków okresowości ruchu dla układu zdeterminowanego i zostało przeanalizowane np. w [1, 2]. Z analizy tej otrzymujemy m.in., że $M_\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Na podstawie (14) i (27) wyznaczamy wielkości $\Delta_0, \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{31}, \Delta_{32}$;

$$\Delta_0 = (C\sin M_\varphi - M_{x_0})b\sin\lambda + (M_{v_0} + C\omega\cos M_\varphi)\cos\lambda + C\omega\cos M_\varphi,$$

$$\Delta_{11} = C\left[\frac{\omega}{b}\sin M_\varphi \sin\lambda - \cos M_\varphi(1-\cos\lambda)\right],$$

$$\Delta_{12} = C\left\{\left[\cos M_\varphi(\cos\lambda - 1) + \frac{\omega}{b}\sin M_\varphi \sin\lambda\right][b^2\cos\lambda(C\cos M_\varphi - M_{x_0}) + \right.$$
$$+ b(C\omega\cos M_\varphi - M_{v_0})\sin\lambda - C\omega^2\sin M_\varphi] + [b\sin\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) +$$
$$+ (M_{v_0} + C\omega\cos M_\varphi)\cos\lambda + C\omega\cos M_\varphi][b\cos M_\varphi \sin\lambda + \omega\sin M_\varphi(\cos\lambda - 1)],$$

$$\Delta_{21} = -\frac{\sin\lambda}{b}, \tag{28}$$

$$\Delta_{22} = \frac{\sin\lambda}{b}[b^2\cos\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) + b\sin\lambda(C\omega\cos M_\varphi - M_{v_0}) - C\omega^2\sin M_\varphi] +$$
$$+ \cos\lambda[b\sin\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) + \cos\lambda(M_{v_0} + C\omega\cos M_\varphi) + C\omega\cos M_\varphi],$$

$$\Delta_{31} = 1 - \cos\lambda,$$

$$\Delta_{32} = (1-\cos\lambda)[b^2(C\sin M_\varphi - M_{x_0})\cos\lambda + b\sin\lambda(C\omega\cos M_\varphi - M_{v_0}) -$$
$$- C\omega^2\sin M_\varphi] - b\sin\lambda[b\sin\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) + \cos\lambda(M_{v_0} - C\omega\cos M_\varphi) +$$
$$+ C\omega\cos M_\varphi],$$

gdzie:

$$\lambda = 2\pi\frac{b}{\omega}.$$

Z powyższych zależności i z równań (13) wyznaczone są współczynniki $\delta_1 \div \delta_6$. Wyznaczamy stąd, na podstawie (6) i (23), punkt stałego odwzorowania dla funkcji następstwa rzędu drugiego. Otrzymujemy układ równań

$$\delta_1\left(\delta_1 + \frac{2}{\omega}\right)K_{\varphi\varphi} + 2\delta_3\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi v_0} + \delta_3^2 K_{v_0 v_0} + 2\delta_5\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi x_0} +$$
$$+ 2\delta_3\delta_5 K_{v_0 x_0} = -\delta_5^2\sigma_{x_0}^2,$$

$$\delta_2\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi\varphi} + \left(\delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3 + \frac{\delta_4}{\omega} + \frac{1}{R\omega}\right)K_{\varphi v_0} + \delta_3\delta_4 K_{v_0 v_0} +$$
$$+ \left(\delta_1\delta_6 + \delta_2\delta_5 + \frac{\delta_6}{\omega}\right)K_{\varphi x_0} + (\delta_3\delta_6 + \delta_4\delta_5)K_{v_0 x_0} = -\delta_5\delta_6\sigma_{x_0}^2,$$

$$\delta_2^2 K_{\varphi\varphi} + 2\delta_2\delta_4 K_{\varphi v_0} + \left(\delta_4^2 - \frac{1}{R^2}\right)K_{v_0 v_0} + 2\delta_2\delta_6 K_{\varphi x_0} + 2\delta_4\delta_6 K_{v_0 x_0} = -\delta_6^2\sigma_{x_0}^2, \tag{29}$$

$$\delta_1 K_{\varphi x_0} + \delta_3 K_{v_0 x_0} = -\delta_5\sigma_{x_0}^2,$$

$$\delta_2 K_{\varphi x_0} + \left(\delta_1 + \frac{1}{R}\right)K_{v_0 x_0} = -\delta_6\sigma_{x_0}^2,$$

Powyższy układ równań ma następujące rozwiązanie

$$K_{\varphi\varphi} = \frac{W_1}{W_0}\sigma_{x_0}^2, \quad K_{\varphi v_0} = \frac{W_2}{W_0}\sigma_{x_0}^2, \quad K_{v_0 v_0} = \frac{W_3}{W_0}\sigma_{x_0}^2, \tag{30}$$

$$K_{\varphi x_0} = \frac{R\alpha_2 - \delta_5}{R\alpha_1 + \delta_1}\sigma_{x_0}^2, \quad K_{v_0 x_0} = \frac{-R\alpha_3}{R\alpha_1 + \delta_1}\sigma_{x_0}^2,$$

gdzie

$$W_0 = a_1(a_5 a_9 - a_6 a_8) + a_2(a_6 a_7 - a_4 a_9) + a_3(a_4 a_8 - a_5 a_7),$$

$$W_1 = b_1(a_5 a_9 - a_6 a_8) + b_2(a_3 a_8 - a_2 a_9) + b_3(a_2 a_6 - a_3 a_5),$$

$$W_2 = b_1(a_6 a_7 - a_4 a_9) + b_2(a_1 a_9 - a_3 a_7) + b_3(a_3 a_4 - a_1 a_6),$$

$$W_3 = b_1(a_4 a_8 - a_5 a_7) + b_2(a_2 a_7 - a_1 a_8) + b_3(a_1 a_5 - a_2 a_4),$$

oraz

$$\alpha_1 = \delta_1\delta_4 - \delta_2\delta_3, \quad \alpha_2 = \delta_3\delta_6 - \delta_4\delta_5, \quad \alpha_3 = \delta_1\delta_6 - \delta_2\delta_5,$$

$$a_1 = \delta_1\left(\delta_1 + \frac{2}{\omega}\right), \quad a_2 = 2\delta_3\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right), \quad a_3 = \delta_3^2,$$

$$a_4 = \delta_2\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right), \quad a_5 = \delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3 + \frac{\delta_4}{\omega} + \frac{1}{R\omega}, \quad a_6 = \delta_3\delta_4,$$

$$a_7 = \delta_2^2, \quad a_8 = 2\delta_2\delta_4, \quad a_9 = \delta_4^2 - \frac{1}{R^2},$$

$$b_1 = \frac{\delta_5}{\omega(R\alpha_1 + \delta_1)}(R\omega\alpha_1\delta_5 + \omega\delta_1\delta_5 + 2\delta_5 - 2R\alpha_2\delta_5^2),$$

$$b_2 = \frac{1}{R\alpha_1 + \delta_1}\left[R\delta_6\left(\delta_5\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\omega}\right) + \delta_5\left(\delta_2\delta_5 + \frac{\delta_6}{\omega}\right)\right],$$

$$b_3 = \frac{\delta_6}{R\alpha_1 + \delta_1}(R\delta_6\alpha_1 + \delta_2\delta_5 - \alpha_3).$$

ANEKS

1. O punkcie stałego odwzorowania dla ciągu zmiennych losowych

Rozpatrzmy w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej ciąg punktów

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, \tag{A1}$$

których współrzędne są zmiennymi losowymi. Oznaczmy współrzędne punktu S_i przez x_1, x_2, x_3, a współrzędne punktu S_{i+1} przez $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Wartości średnie tych współrzędnych oznaczamy odpowiednio przez $M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}$ i $\overline{M}_{x_1}, \overline{M}_{x_2}, \overline{M}_{x_3}$, zaś momenty centralne rzędu n-tego oznaczamy μ_n i $\bar{\mu}_n$:

$$\text{(A2)} \qquad \begin{aligned} \mu_n &= E[(x_1-M_{x_1})^p(x_2-M_{x_2})^q(x_3-M_{x_3})^r], \\ \bar{\mu}_n &= E[(\bar{x}_1-\bar{M}_{x_1})^p(\bar{x}_2-\bar{M}_{x_2})^q(\bar{x}_3-\bar{M}_{x_3})^r], \end{aligned}$$

gdzie $p, q, r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, $p+q+r = n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Mamy więc

$$\mu_n = \{\mu_{n,0,0}, \mu_{n-1,1,0}, \mu_{n-1,0,1}, \ldots, \mu_{1,0,n-1}, \mu_{0,1,n-1}, \mu_{0,0,n}\},$$

$$\bar{\mu}_n = \{\bar{\mu}_{n,0,0}, \bar{\mu}_{n-1,1,0}, \bar{\mu}_{n-1,0,1}, \ldots, \bar{\mu}_{1,0,n-1}, \bar{\mu}_{0,1,n-1}, \bar{\mu}_{0,0,n}\},$$

gdzie

$$\mu_{n-s,s-u,u} = E[(x_1-M_{x_1})^{n-s}(x_2-M_{x_2})^{s-u}(x_3-M_{x_3})^u],$$

$$\bar{\mu}_{n-s,s-u,u} = E[(\bar{x}_1-\bar{M}_{x_1})^{n-s}(\bar{x}_2-\bar{M}_{x_2})^{s-u}(\bar{x}_3-\bar{M}_{x_3})^u],$$

$s, u = 0, 1, 2, \ldots, n$. μ_n i $\bar{\mu}_n$ są więc wektorami k-wymiarowymi, gdzie $k = 1+2+ \ldots +n+ +n+1 = \sum_{i=1}^{n+1} i$.

Załóżmy, że między charakterystykami statystycznymi wyrazów ciągu (A1) zachodzi jednoznaczna zależność:

$$\text{(A3)} \qquad \bar{M}_x = \Omega_1(M_x),$$

$$\text{(A4)} \qquad \bar{\mu}_n = \Omega_n(\mu_n),$$

przy czym $M_x = \{M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}\}$, $\bar{M}_x = \{\bar{M}_{x_1}, \bar{M}_{x_2}, \bar{M}_{x_3}\}$. Zależność (A3) nazywamy funkcją następstwa rzędu pierwszego, a (A4) funkcją następstwa rzędu n-tego.

Oznaczmy przez $\mathscr{E}_k$ k-wymiarową przestrzeń euklidesową, oraz obierzmy w tej przestrzeni podzbiór $\mathscr{B}_k$, ograniczony i domknięty. Ciąg (A1) możemy scharakteryzować ciągami punktów:

$$\text{(A5)} \qquad M_x^{(1)}, M_x^{(2)}, M_x^{(3)}, M_x^{(4)}, \ldots,$$

$$\text{(A6)} \qquad \mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}, \mu_n^{(3)}, \mu_n^{(4)}, \ldots,$$

przy czym dla każdego wyrazu ciągów (A5) i (A6) zachodzi $M_x \in \mathscr{B}_3$ i $\mu_n \in \mathscr{B}_k$. Ponieważ zbiór $\mathscr{B}_k$ jest nieprzeliczalny i ograniczony, więc posiada na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa co najmniej jeden punkt skupienia. Oznacza to, że istnieje taki punkt $\mu_n^* \in \mathscr{B}_k$, że

$$\text{(A7)} \qquad \mu_n^* = \Omega_n(\mu_n^*).$$

Punkt ten nazywamy punktem stałego odwzorowania. Analogiczny związek zachodzi dla wartości średniej.

$$M_x^* = \Omega_1(M_x^*).$$

2. O linearyzacji funkcji zmiennych losowych

PUGACZEW [3] podał metodę wyznaczania wartości średnich i momentów korelacyjnych funkcji zmiennych losowych. Niech dana będzie funkcja

$$\text{(A8)} \qquad \begin{gathered} y = f(x), \\ y = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}, \quad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \end{gathered}$$

Funkcję tę rozwija się w szereg Taylora wokół wartości średniej M_x i po pominięciu wyrazów rzędu drugiego i wyższych otrzymujemy funkcję (A8) w postaci liniowej

$$y_i = f_i(M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} a_{ip}(x_p - M_{x_p}), \tag{A9}$$

gdzie

$$a_{ip} = \frac{\partial f_i(M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_p})}{\partial M_{x_p}}. \tag{A10}$$

Stosując odpowiednie wzory definicyjne otrzymano wartości średnie i momenty korelacyjne zmiennej losowej y w postaci

$$M_{y_i} = f_i(M_x), \tag{A11}$$

$$K_{y_i y_j} = \sum_{p,q=1}^{n} a_{ip} a_{jq} K_{x_p x_q}, \tag{A12}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, r$$

oraz

$$a_{ip} = \frac{\partial f_i(M_x)}{\partial M_{x_p}}, \qquad a_{jq} = \frac{\partial f_j(M_x)}{\partial M_{x_q}}.$$

Metoda ta wymaga uzupełnienia. W celu wyznaczenia pełnych charakterystyk zmiennej y (z dokładnością do momentów rzędu drugiego) należy wyznaczyć funkcje korelacji wzajemnej wartości funkcji i jej argumentów. Wykorzystując zlinearyzowaną funkcję (A9), zgodnie z definicją momentów korelacyjnych znajdujemy

$$K_{y_i x_s} = E[(y_i - M_{y_i})(x_s - M_{x_s})] = E\left[\sum_{p=1}^{n} a_{ip}(x_p - M_{x_p})(x_s - M_{x_s})\right] = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} K_{x_p x_s}, \tag{A13}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r, \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Dalej załóżmy, że dana jest funkcja (A8) w postaci uwikłanej, tj.

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{A14}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r,$$

Postępując podobnie jak w poprzednim przypadku znajdujemy, że wartość średnia zmiennej losowej y wyznaczona jest związkiem

$$F_i(M_{y_1}, M_{y_2}, \ldots, M_{y_r}, M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}) = 0 \tag{A15}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r,$$

momenty zaś korelacyjne tej zmiennej oraz momenty korelacji wzajemnej y i x dane są związkami (A12) i (A13), przy czym współczynniki a_{ip} i a_{jq} wyznaczamy z następujących związków

$$a_{ip} = -\frac{\Delta_{pi}}{\Delta_0}, \quad a_{jq} = -\frac{\Delta_{qj}}{\Delta_0}, \tag{A16}$$

$$i,j = 1,2,\ldots,r, \quad p,q = 1,2,\ldots,n \quad \text{i} \quad \Delta_0 \neq 0.$$

W związkach (A16) oznaczyliśmy

$$\Delta_0 = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{\partial(M_{y_1}, M_{y_2}, \ldots, M_{y_i}, \ldots, M_{y_r})},$$

$$\Delta_{pi} = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{\partial(M_{y_1}, M_{y_2}, \ldots, M_{x_p}, \ldots, M_{y_r})}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. И. И. Быховский, *Основы теории вибрационной техники*, Изд. Машиностроение, Москва 1969.
2. B. Kowalczyk, *Badanie stabilności strukturalnej układu wibrouderzeniowego o jednym stopniu swobody*, Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, Nr 112, Mechanika Nr 9, Gdańsk 1967.
3. В. С. Пугачев, *Теория случайных функции*, Изд. Наука, Москва 1962.

Резюме

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Исследовано поведение виброударной системы при случайном положении ограничителя. Среднее значение и вариация положения ограничителя являются величинами постоянными. Найдено ограниченное решение, основанное на методе точечных отображений, примененном для последовательности точек со случайными координатами. Решением являются корреляционные моменты фазовых координат системы.

Summary

STATISTICAL ANALYSIS OF VIBRO-IMPACT SYSTEM

In the paper the vibro-impact system with random coordinate of the buffer is analyzed. The average value and the variance of this variable are assumed to be constant. The bounded solutions are found by means of the point mappings method, interpreted for points sequence of random coordinates. The correlation moments of state coordinates of the system are determined.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lipca 1971 r.