

## O ZŁOŻONYCH MODELACH WZMOCNIENIA PLASTYCZNEGO

ZENON MRÓZ, CZESŁAW GOSS (WARSZAWA)

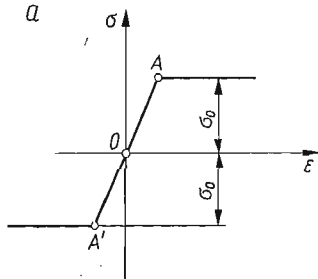
### 1. Wstęp

W niniejszej pracy rozpatrzemy możliwości opisu wzmocnienia plastycznego metali przy uwzględnieniu efektów anizotropii. Nasze rozważania dotyczyć będą małego zakresu odkształceń (rzędu kilku procent), przy którym efekty zmiany struktury wskutek obrotów ziaren i tworzenia się mikropęknięć mogą być pominięte. Anizotropia wzmocnienia jest zatem wynikiem naprężeń resztkowych, powstałych w wyniku niejednorodności odkształceń plastycznych, koncentrujących się głównie wzdłuż określonych płaszczyzn poślizgu. W jednoosiowym stanie naprężenia uwidacznia się ona jako tzw. efekt Bauschingera; w złożonym stanie naprężenia (dla teorii opartej na istnieniu powierzchni plastyczności) anizotropia prowadzi do zmiany początkowej powierzchni płynięcia. Uwidacznia się to kierunkową zmianą sztywności elementu po wstępnym odkształceniu plastycznym. Zatem gdy chcemy opisać proces deformacji plastycznej dla złożonych dróg obciążenia, a w szczególności dla obciążeń cyklicznych, musimy uwzględnić efekty anizotropii wzmocnienia.

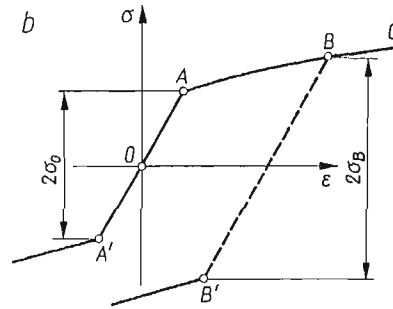
Ponieważ naszym celem jest przedstawienie i omówienie dostatecznie prostych związków fizycznych, tak aby można było efektywnie określać stany naprężenia lub odkształcenia dla złożonych procesów deformacji, nie będziemy rozpatrywali mechanizmów dyslokacyjnych ani procesów zachodzących w pojedynczych kryształach. Rozpatrywany makroelement ciała potraktujemy jako zbiór podelementów o jednorodnych lecz różnych stanach naprężenia lub odkształcenia i różnych własnościach plastycznych. Do podobnego opisu wzmocnienia dojdziemy również przyjmując pewne hipotezy o zmianie pola modułów wzmocnienia lub o złożonym charakterze zmiany mikronaprężeń resztkowych. Przedstawimy opis poszczególnych modeli oraz sposoby całkowania różniczkowych równań płynięcia wzdłuż zadanych trajektorii naprężenia czy odkształcenia. Ograniczymy się do szczegółowego rozpatrzenia płaskiego stanu naprężenia, gdyż większość badań doświadczalnych przeprowadza się w tym stanie na próbkach płaskich lub rurkowych; dlatego też przedstawiona analiza może być przydatna przy opracowywaniu programów badań doświadczalnych oraz przy interpretacji ich wyników. W rozdziale 4 przedstawimy wyniki obliczeń porównawczych dla kilku modeli wzmocnienia i dla trzech złożonych programów obciążenia.

## 2. Proste modele wzmocnienia

Ciało idealnie plastyczne określone jest warunkiem plastyczności zależnym tylko od stanu naprężenia,  $f = f(\sigma_{ij}) = 0$ . W czasie deformacji warunek ten nie ulega zmianie; geometrycznie oznacza to, że w przestrzeni naprężeń powierzchnia oddzielająca stany sprężyste od plastycznych jest ustalona. W przypadku jednoosiowego stanu naprężenia otrzymamy krzywą odkształcenia przedstawioną na rys. 1a.



Rys. 1a



Rys. 1b

Bardziej realistyczny opis otrzymamy, zakładając, że

$$(2.1) \quad f = f(\sigma_{ij}, \lambda) = 0;$$

to znaczy warunek plastyczności zależy od skalarne go parametru  $\lambda$ , rosnącego monotonicznie wraz ze wzrostem deformacji plastycznej. Jako miarę parametru  $\lambda$  możemy przyjąć

$$(2.2) \quad \lambda_1 = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dt, \quad \text{lub} \quad \lambda_2 = \int_0^t (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2} dt,$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  oznacza prędkość odkształceń plastycznych. W szczególnym przypadku, gdy

$$(2.3) \quad f = f(\sigma_{ij}) - F(\lambda) = 0,$$

początkowa powierzchnia płynięcia nie zmienia swego kształtu, lecz rozszerza się (lub kurczy) równomiernie w miarę wzrostu odkształceń plastycznych. Mówimy, że równanie (2.3) opisuje *wzmocnienie izotropowe* materiału, bowiem nie zależy ono od kierunku trajektorii obciążenia. Na rys. 1b przedstawiona jest krzywa jednoosiowego obciążenia odpowiadająca temu modelowi wzmocnienia. Początkowy obszar sprężysty ograniczony punktami A i A' rozszerza się i po obciążeniu do punktu B oraz zmianie znaku naprężenia, odkształcenie plastyczne pojawi się po dojściu do punktu B', symetrycznie położonego względem osi odkształcenia. Krzywa obciążenia B'C' jest symetrycznym odbiciem odcinka AC krzywej pierwotnego obciążenia.

Aby uwzględnić efekt Bauschingera przyjmujemy, że równanie powierzchni uplastycznienia ma postać

$$(2.4) \quad f = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - F(\lambda) = 0.$$

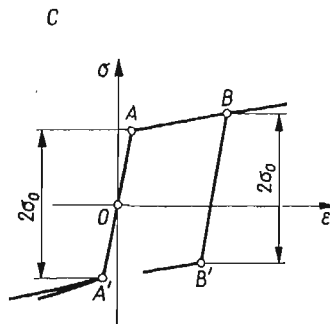
W szczególnym przypadku, gdy  $F(\lambda) = \text{const}$  otrzymujemy tak zwany *model wzmocnienia kinematycznego*. Początkowa powierzchnia uplastycznienia doznaje jedynie szywnego

przesunięcia, bez zmiany kształtu początkowego. Odpowiadająca temu modelowi krzywa umocnienia w przypadku jednoosiowym pokazana jest na rys. 1c.<sup>1)</sup> Dla pełności opisu podajemy jeszcze prawo płynięcia. Zakładając, że wektor przyrostu odkształceń plastycznych jest skierowany wzdłuż zewnętrznej normalnej do powierzchni płynięcia, możemy napisać

$$(2.5) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right),$$

lub w notacji wektorowej

$$(2.6) \quad d\varepsilon^p = \frac{1}{K} n_f d\sigma_f, \quad K \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{1/2} = H,$$



Rys. 1c

gdzie  $n_f$  jest wektorem jednostkowym, normalnym do powierzchni płynięcia, to znaczy

$$(2.7) \quad n_f = \frac{\partial f / \partial \underline{\sigma}}{|\partial f / \partial \underline{\sigma}|} = \frac{\underline{f}_\sigma}{|f_\sigma|},$$

a  $d\sigma_f = d\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_f$  jest rzutem wektora przyrostu naprężenia na kierunek  $\underline{n}_f$  (kropka pomiędzy dwoma wektorami oznaczać będzie ich iloczyn skalarny,  $|\underline{a}| = a = (\underline{a} \cdot \underline{a})^{1/2}$  oznacza moduł wektora, zaś  $f_x = \partial f / \partial x$ ). Skalar  $K$  nazywać będziemy *modułem wzmocnienia*, gdyż zgodnie ze związkem (2.6) określony on jest stosunkiem  $K = \partial \sigma_f / \partial \varepsilon^p$ , to znaczy składowej normalnej przyrostu naprężenia do modułu wektora przyrostu odkształceń plastycznych. Moduł wzmocnienia  $K$  jest zatem uogólnieniem modułu stycznego krzywej obciążenia w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia. Związany on jest z funkcjami  $\alpha_{ij}$  i  $F(\lambda)$  występującymi w zależności (2.4). Aby określić tę zależność rozpatrzmy dwie hipotezy o przesuwaniu się początkowej powierzchni płynięcia. Zgodnie z propozycją wysuniętą przez MELANA [1], a później PRAGERA [2] i ISZLIŃSKIEGO [3], chwilowe przesunięcie powierzchni zachodzi wzdłuż zewnętrznej normalnej, to znaczy

$$(2.8) \quad d\underline{\sigma} = c d\varepsilon^p.$$

<sup>1)</sup> Opis prostych modeli wzmocnienia można znaleźć w książkach [30, 31].

Zgodnie z propozycją ZIEGLERA [4] powierzchnia płynięcia przemieszcza się w kierunku wektora  $\underline{\sigma} - \underline{\alpha}$ , a zatem

$$(2.9) \quad d\underline{\alpha} = d\mu(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}), \quad \text{gdzie} \quad d\mu = c_1 d\varepsilon^p.$$

Różniczkując związek (2.4) i pamiętając, że  $\underline{f}_\sigma = -\underline{f}_\alpha = \underline{f}_{\sigma-\alpha}$ , mamy

$$(2.10) \quad \underline{f}_\sigma \cdot d\underline{\sigma} - \underline{f}_\sigma \cdot d\underline{\alpha} - F'(\lambda) d\lambda = 0,$$

gdzie  $F'(\lambda) = dF/d\lambda$ . Przyjmując zgodnie z (2.2)  $d\lambda = d\lambda_2 = d\varepsilon^p = (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$  oraz pamiętając, że  $\underline{f}_\sigma = \underline{n}_f |\underline{f}_\sigma|$  dla hipotezy (2.8) otrzymujemy ze związku (2.10) następujące wyrażenie określające moduł  $K$

$$(2.11) \quad K = c + \frac{F'(\lambda)}{|\underline{f}_\sigma|} = c + F'(\lambda) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1/2},$$

zaś dla hipotezy (2.9) mamy

$$(2.12) \quad K = c_1(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) \cdot \underline{n}_f + \frac{F'(\lambda)}{|\underline{f}_\sigma|}.$$

Wzory (2.11) i (2.12) umożliwiają przeprowadzenie ogólnej dyskusji praw wzmocnienia i ich możliwości opisu procesu odkształcenia plastycznego. Rozpatrzmy dla przykładu związek (2.11). Gdy  $F'(\lambda) = 0$ , wzmocnienie ma charakter kinematyczny i  $K = c$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że  $c = \text{const}$  i wtedy model teoretyczny opisuje wzmocnienie liniowe, dla którego moduł wzmocnienia ma stałą wartość. Bardziej ogólnie możemy przyjąć, że

$$(2.13) \quad c = c(I_2^p) \quad \text{lub} \quad c = c(\lambda_2),$$

gdzie  $I_2^p = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p$  jest drugim niezmiennikiem tensora odkształceń plastycznych, zaś parametr  $\lambda_2$  jest określony przez związek (2.2). Moduł wzmocnienia zmienia się teraz wraz z odkształceniem plastycznym i zmienność tę możemy opisać opierając się na krzywej umocnienia dla jednoosiowego stanu naprężenia. Model kinematycznego wzmocnienia przy nieliniowej krzywej obciążenia rozpatrywany był szczegółowo w pracy EISENBERGA i PHILIPSA [5], którzy przyjęli, że tensor przemieszczenia  $\alpha_{ij}$  początkowej powierzchni płynięcia wyraża się wzorem

$$(2.14) \quad \alpha_{ij} = c(\lambda_2) \varepsilon_{ij}^p.$$

Przy przyjęciu zależności (2.14), chwilowe przemieszczenie powierzchni nie zachodzi wzdłuż zewnętrznej normalnej, gdyż

$$(2.15) \quad d\alpha_{ij} = c(\lambda_2) d\varepsilon_{ij}^p + c'(\lambda_2) d\lambda_2 \varepsilon_{ij}^p.$$

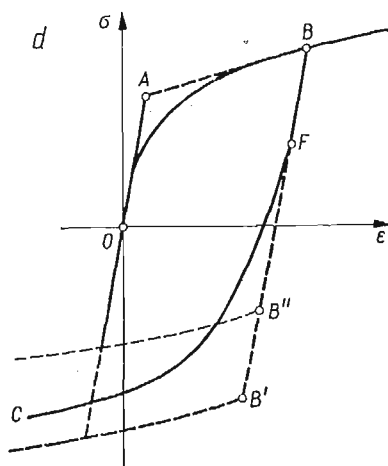
Dlatego też wydaje się, że prostsza jest propozycja wprowadzenia nieliniowości w związku przyrostowym (2.8), zgodnie z założeniem (2.13). Gdy do opisu wprowadzimy dwie funkcje  $c = c(\lambda)$  i  $F = F(\lambda)$ , otrzymamy nie tylko nieliniową krzywą umocnienia, ale i zmienny obszar sprężysty, bowiem początkowa powierzchnia płynięcia nie tylko przesuwa się, ale i rozszerza przy wzroście odkształceń plastycznych.

Zmianę kształtu początkowej powierzchni płynięcia, jej obrót i przesunięcie możemy opisać przyjmując warunek plastyczności w postaci

$$(2.16) \quad F(\sigma_{ij}) = K_{ijkl}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) - 1 = 0,$$

gdzie tensory  $K_{ijkl}$  i  $\alpha_{ij}$  są funkcjami odkształcenia plastycznego. Bardziej szczegółową dyskusję tego warunku można znaleźć w pracach BAŁTOWA i SAWCZUKA [6] oraz BACKHAUSA [7].

Wzory (2.11) i (2.12) wskazują jednak, że model wzmocnienia przy użyciu jednej powierzchni plastyczności ma ograniczone możliwości opisu w przypadku, gdy będziemy rozpatrywali procesy odciążania i następnego obciążenia w przeciwnym kierunku. Istotnie moduł wzmocnienia  $K$  przy poruszaniu się po powierzchni płynięcia przyjmuje albo stałą



Rys. 1d

wartość, albo wartość zmienną, zależną od kształtu tej powierzchni, ale nie od procesu obciążenia. Tak na przykład, jeśli chwilowa powierzchnia płynięcia określona jest warunkiem Hubera-Misesa, to równanie (2.4) przyjmie postać

$$(2.17) \quad f = \frac{1}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - F(\lambda) = 0.$$

Ponieważ  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 2F(\lambda)$ , to wyrażenie (2.11) przyjmie postać

$$(2.18) \quad K = c + \frac{F^2(\lambda)}{[2F(\lambda)]^{1/2}},$$

i oczywiście moduł  $K$  ma stałą wartość na chwilowej powierzchni płynięcia, osiągniętej po określonej drodze obciążenia.

Różnice, jakie powstają pomiędzy wskazaniem modelu teoretycznego a rzeczywistym zachowaniem się materiału ilustruje rys. 1d. Po obciążeniu do punktu  $B$  i następnym zmianie znaku obciążenia, pierwsze odkształcenia plastyczne pojawiają się w punkcie  $F$  i krzywa odwrotnego obciążenia  $FC$  posiada moduł styczny zmieniający się w sposób ciągły, po-

czynając od wartości modułu sprężystego. Stosując model wzmocnienia izotropowego, kinematycznego lub model bardziej złożony (2.4), otrzymać możemy dość dobrą aproksymację pierwotnej krzywej obciążenia  $OB$ , natomiast duże rozbieżności powstają, jeśli chodzi o krzywą obciążenia odwrotnego  $FC$ , bowiem moduły styczne w punktach  $B'$  i  $B''$ , zgodnie z (2.18) muszą być takie same, jak w punkcie  $B$ . Podobna sytuacja powstanie dla innego rodzaju złożonych dróg obciążenia, a w szczególności dla obciążeń cyklicznych, gdzie proces obciążania i odciążania występuje przy każdym cyklu. Aby móc dostatecznie dokładnie opisać tego rodzaju procesy, musimy się uciec do bardziej złożonych modeli, przez wprowadzenie dodatkowych parametrów opisujących stan materiału. Tego rodzaju modele rozpatrzmy w następnym paragrafie.

Możliwość skonstruowania teorii plastyczności przy użyciu parametrów wewnętrznych rozpatrywana była w pracach wielu autorów. Celem obecnej pracy będzie przedstawienie konkretnych form związków, możliwych do wykorzystania przy opisie własności plastycznych metali. Wprowadzimy przy tym nową strukturę matematyczną związków, nie rozpatrywaną do tej pory w literaturze naukowej.

### 3. Złożone modele wzmocnienia

Załóżmy teraz, że dla opisanego zachowania się materiału przy zmiennych obciążeniach wprowadzimy większą ilość parametrów określających stan materiału. Nasuwają się tu dwa sposoby podejścia do zagadnienia: parametry te można traktować jako wewnętrzne, to znaczy nie wchodzące do równań równowagi ani do związków geometrycznych; występują one jedynie w związkach fizycznych, a tym samym w wyrażeniach na dysypację, czy energię wewnętrzną. Drugi sposób polegałby na potraktowaniu ciała jako zbioru elementów o prostych własnościach sprężysto-plastycznych czy lepkich i określeniu związków fizycznych dla makroskopowo jednorodnego zbioru takich elementów. Podejście tego rodzaju stosuje się np. przy próbach określania własności mechanicznych polikryształów, wychodząc z własności pojedynczych kryształów. Nazywać je będziemy podejściem *strukturalnym*. Istnieje podobieństwo między obydwojma podejściami bowiem stany naprężenia w poszczególnych fazach możemy traktować jako parametry wewnętrzne. Jednak przy podejściu strukturalnym, naprężenie i odkształcenie makroskopowe otrzymujemy przez odpowiednie uśrednianie po wszystkich podelementach, które powinny spełniać warunki równowagi i zgodności odkształceń. Wprowadzając pojęcie parametrów wewnętrznych omijamy trudny problem uśredniania.

**3.1. Opis wzmocnienia przy pomocy wewnętrznych parametrów stanu.** Załóżmy, że stan materiału określony jest przez stan naprężenia  $\sigma$ , odkształcenia  $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$ , gdzie  $\underline{\varepsilon}^e$  i  $\underline{\varepsilon}^p$  oznaczają część odwracalną i nieodwracalną odkształcenia, oraz przez  $N+M$  parametrów wewnętrznych, które w naszym przypadku będą skalarami  $\gamma^{(r)}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) i tensorami drugiego rzędu  $\alpha_{ij}^{(s)}$  ( $s = 1, 2, \dots, M$ ). Niech warunek plastyczności będzie funkcją stanu naprężenia, pewnej liczby parametrów wewnętrznych, oraz temperatury  $\theta$ , to znaczy

$$(3.1) \quad f^{(0)}(\sigma, \alpha^{(s)}, \gamma^{(r)}, \theta) = 0.$$

Przy odkształcaniu materiału w zakresie sprężystym parametry wewnętrznie nie ulegają zmianie, to znaczy

$$(3.2) \quad d\underline{\varepsilon}^p = 0, \quad d\alpha^{(s)} = 0, \quad d\gamma^{(r)} = 0, \quad \text{gdy} \quad f^o < 0.$$

Zakładamy, że oprócz związku skalarnego (3.1), parametry wewnętrzne spełniają  $K+L$  dodatkowych związków skalarnych, określających obszary wewnętrznej nieodwracalności

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f_{\alpha}^{(q)}(\sigma, \underline{\alpha}^{(s)}, \gamma^{(r)}, \theta) &= 0, & q &= 1, 2, \dots, K, \\ f_{\gamma}^{(v)}(\sigma, \underline{\alpha}^{(s)}, \gamma^{(r)}, \theta) &= 0, & v &= 1, 2, \dots, L, \end{aligned}$$

przy czym pierwsza grupa równości skalarnych (3.3) odnosi się do parametrów  $\underline{\alpha}^{(s)}$ , zaś druga do parametrów  $\gamma^{(r)}$ . Na przykład, gdy zachodzi równość  $f_{\alpha}^{(q)} = 0$ , to parametr  $\underline{\alpha}^{(q)}$  ulega zmianie w czasie procesu według określonego prawa; natomiast, gdy  $f_{\alpha}^{(q)} < 0$ , to  $d\underline{\alpha}^{(q)} = 0$ , podczas gdy pozostałe parametry mogą się zmieniać. Założymy następnie, że przyrost parametrów wewnętrznych jest liniowo zależny od przyrostu odkształceń plastycznych, to znaczy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} d\underline{\alpha}_{ij}^{(s)} &= A_{ijkl}^{(s)} d\varepsilon_{kl}^p = b_{ij}^{(s)} d\lambda, & \text{gdy } f_{\alpha}^{(s)} &= 0, \\ d\underline{\alpha}_{ij}^{(s)} &= 0, & \text{gdy } f_{\alpha}^{(s)} &< 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(3.5) \quad \begin{aligned} d\gamma^{(r)} &= C_{ij}^{(r)} d\varepsilon_{ij}^p = d^{(r)} d\lambda, & \text{gdy } f_{\gamma}^{(r)} &= 0, \\ d\gamma^{(r)} &= 0, & \text{gdy } f_{\gamma}^{(r)} &< 0, \end{aligned}$$

gdzie  $A_{ijkl}^{(s)}$ ,  $b_{ij}^{(s)}$ ,  $C_{ij}^{(r)}$ ,  $d^{(r)}$  są funkcjami naprężenia oraz parametrów stanu. Wykorzystując prawo płynięcia (2.6) możemy napisać

$$(3.5a) \quad A_{ijkl}^{(s)} n_{ij}^{(0)} = b_{kl}^{(s)}, \quad C_{ij}^{(r)} n_{ij}^{(0)} = d^{(r)}.$$

Na ogół ilość związków skalarnych  $f_{\alpha}^{(q)} = 0$  i  $f_{\gamma}^{(v)} = 0$  może być mniejsza aniżeli ilość parametrów wewnętrznych.

Założmy, że spełniony jest warunek plastyczności (3.1) oraz niektóre z warunków (3.3); odpowiadające tym warunkom parametry wewnętrzne ulegają zatem zmianie w czasie procesu odkształcenia. Różniczkując równania (3.1) i (3.3) i rozpatrując jedynie proces izotermiczny, otrzymujemy

$$(3.6a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot d\underline{\alpha}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \gamma^{(r)}} d\gamma^{(r)} &= 0, \\ \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot d\underline{\alpha}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \gamma^{(r)}} d\gamma^{(r)} &= 0. \end{aligned}$$

Wykorzystując prawo płynięcia (2.6) i związki (3.4), (3.5) możemy równości (3.6a) przedstawić w postaci

$$(3.6b) \quad \begin{aligned} K|f_{\sigma}^{(0)}| + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot \underline{b}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \gamma^{(r)}} d^{(r)} &= 0, \\ K|f_{\gamma}^{(v)}| + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot \underline{b}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \gamma^{(r)}} d^{(r)} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym sumowanie dotyczy tych  $s$  i  $r$ , dla których spełnione są równości (3.3).

Związki (3.6) będziemy nazywali równaniami zgodności. Nakładają one ograniczenia na współczynniki  $K, \underline{b}^{(s)}, d^{(r)}$ , występujące we wzorach (2.6), (3.4) i (3.5).

Możemy również alternatywnie założyć, że równości skalarne (3.3) określają obszary, w których obowiązują różne prawa zmienności parametrów wewnętrznych. Wtedy zamiast (3.4) możemy napisać

$$(3.7) \quad \begin{aligned} d\alpha_{ij}^{(s)} &= b_{ij}^{(s)} d\lambda, & \text{gdy } f_a^{(s)} &= 0, \\ d\alpha_{ij}^{(s)} &= \beta_{ij}^{(s)} d\lambda, & \text{gdy } f_a^{(s)} &< 0 \end{aligned}$$

i podobne zależności w miejsce związków (3.5). Ogólna postać warunków zgodności (3.6) nie ulega zmianie.

Układ równań (2.6), (3.1), (3.3–3.5), (3.6) przedstawia *matematyczną strukturę teorii plastyczności* przy istnieniu większej ilości parametrów stanu. Wychodząc z tych równań, możemy prześledzić dowolny proces odkształceń plastycznych, gdyż mając zadany program obciążenia możemy, całkując równania przyrostowe, określić zmiany wielkości makroskopowych oraz parametrów wewnętrznych, a tym samym stan materiału. Otwartym problemem pozostaje określenie funkcji materiałowych w (2.6), (3.4) i (3.5) oraz samych parametrów stanu. Poniżej rozpatrzmy kilka modeli wzmocnienia, dla których parametry wewnętrzne mają prostą interpretację mechaniczną, zaś stan materiału opisany jest podaniem gęstości rozkładu wielkości tensorowych lub skalarnych. W ogólnym przypadku wybór parametrów wewnętrznych powinien opierać się o statystyczny opis rozkładu dyslokacji i mikronaprężeń w elemencie makroskopowym.

**M o d e l 1.** Niech parametrami stanu będzie  $n+1$  wielkości tensorowych  $\alpha_{ij}^{(0)}, \dots, \alpha_{ij}^{(n)}$  oraz  $n+1$  wielkości skalarnych  $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ . Warunek plastyczności ma postać

$$(3.8) \quad f^{(0)}(\sigma - \underline{\alpha}^{(0)}) - \gamma^{(0)} = 0,$$

zaś równania skalarne określające obszary nieodwracalnych zmian parametrów wewnętrznych wyrazimy następująco:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} f_a^{(1)}(\underline{\alpha}^{(0)} - \underline{\alpha}^{(1)}) - \gamma^{(1)} &= 0, \\ \dots \\ f_a^{(k)}(\underline{\alpha}^{(k-1)} - \underline{\alpha}^{(k)}) - \gamma^{(k)} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym dla prostoty założymy, że parametry  $\gamma^{(r)}$  są stałe, zaś w czasie procesu ulega zmianie jedynie  $k+1$  kolejnych parametrów  $\underline{\alpha}^{(s)}$ . Prawo zmiany tych parametrów możemy zapisać w postaci

$$(3.10) \quad d\underline{\alpha}^{(0)} = \underline{b}^{(0)} d\lambda, \dots, d\underline{\alpha}^{(k)} = \underline{b}^{(k)} d\lambda, \quad d\underline{\alpha}^{(k+1)} = 0,$$

o ile spełnione są równości (3.9). Różniczkując związki skalarne (3.8), (3.9) i stosując prawo płynięcia (2.5), otrzymamy warunki zgodności w postaci

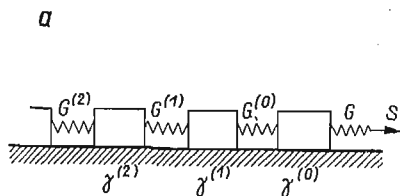
$$(3.11) \quad K_0 = \underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(0)}, \quad \underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(0)} = \underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(1)}, \dots, \underline{n}^{(k)} \cdot \underline{n}^{(k-1)} = \underline{n}^{(k)} \cdot \underline{n}^{(k)},$$

gdzie  $\underline{n}_f = \underline{n}^{(0)}, \underline{n}^{(1)}, \dots, \underline{n}^{(k)}$  są jednostkowymi wektorami normalnymi odpowiednio do powierzchni płynięcia (3.8) oraz do powierzchni (3.9), w punktach określonych stanem naprężenia  $\underline{\sigma}$  oraz odpowiednio parametrami  $\underline{\alpha}^{(0)}, \underline{\alpha}^{(1)}, \dots, \underline{\alpha}^{(k-1)}$ . Układ równań (3.8)–(3.11) przedstawia pełny opis modelu wzmocnienia. Z równań zgodności (3.11) wynika, że moduł styczny będzie się zmniejszał, w miarę jak ilość spełnionych warunków skalarnych (3.3) będzie rosła. Istotnie, założymy, że w chwili początkowej  $\underline{\alpha}^{(0)} = \underline{\alpha}^{(1)} = \dots = \underline{\alpha}^{(n)} = 0$ . Gdy



spełniony jest warunek plastyczności (3.8), zmieniać się zaczyna parametr  $\alpha^{(0)}$  i moduł styczny krzywej umocnienia określony jest pierwszą zależnością (3.11). Gdy z kolei spełniony zostanie pierwszy warunek (3.9), zmieniać się zacznie parametr  $\alpha^{(1)}$  i spełnione będą dwie równości (3.11). Przyjmując, że parametr  $b^{(1)}$  jest zadany, wartość  $b^{(0)}$  musi ulec zmianie, aby spełniony był drugi związek (3.11). W szczególnym przypadku, gdy  $\underline{n}^{(0)} = \underline{n}^{(1)} \dots \underline{n}^{(k)}$  mamy  $b^{(0)} = b^{(1)} = b^{(k)}$ . Zatem spełnienie kolejnego warunku (3.9), np.:  $f^{(l)} = 0$ , prowadzi do zmiany parametrów  $b^{(i)}$  dla  $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ .

Możemy parametrom  $b^{(i)}$  nadawać pewną interpretację mechaniczną, rozpatrując model przedstawiony na rys 2a. Omawiany on już był przez IWLEWA [21] i PRAGERA [10] i jest uogólnieniem modelu wprowadzonego przez KADASZEWICZA i NOWOŻYŁOWA [12]. Rozważ-



Rys. 2a

my układ złożony z szeregu sztywnych bloków połączonych elementami sprężystymi i spoczywających na sztywnym podłożu o zadanej granicznej sile tarcia  $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ . Przeszczenie bloku  $O$  i siła nań działająca odpowiadają plastycznemu odkształceniu i naprężeniu makroskopowemu. Natomiast siły w elementach sprężystych  $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$  oraz przeszczenia trwałe bloków  $1, 2, \dots, n$  odpowiadają mikronaprężeniom i trwałym mikroodkształceniom, które oznaczać będziemy przez  $d\varepsilon^{(1)}, d\varepsilon^{(2)}, \dots, d\varepsilon^{(n)}$ . Załóżmy, że układ pod działaniem siły zewnętrznej osiągnął taki stan, w którym warunek plastyczności (3.8) oraz dwa pierwsze warunki (3.9) są spełnione. Przyrosty mikroodkształceń plastycznych odpowiadające przeszczeniu bloków 1 i 2 wyniosą:

$$(3.12) \quad d\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{K^{(1)}} \underline{n}^{(1)} (d\alpha^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)}), \quad d\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{K^{(2)}} \underline{n}^{(2)} (d\alpha^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)}),$$

zaś przyrosty mikronaprężeń modelowane jako zmiana sił w elementach sprężystych wyrażą się następująco:

$$(3.13) \quad d\alpha^{(0)} = G^{(0)} (d\varepsilon^{(0)} - d\varepsilon^{(1)}), \quad d\alpha^{(1)} = G^{(1)} (d\varepsilon^{(1)} - d\varepsilon^{(2)}), \quad d\alpha^{(2)} = G^{(2)} d\varepsilon^{(2)},$$

gdzie  $G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}$  oznaczają sztywności elementów sprężystych. Wykorzystując warunki zgodności w postaci

$$(3.14) \quad \underline{n}_f \cdot d\sigma = \underline{n}_f \cdot d\alpha^{(0)}, \quad \underline{n}^{(1)} \cdot d\alpha^{(0)} = \underline{n}^{(1)} \cdot d\alpha^{(1)}, \quad \underline{n}^{(2)} \cdot d\alpha^{(1)} = \underline{n}^{(2)} \cdot d\alpha^{(2)}$$

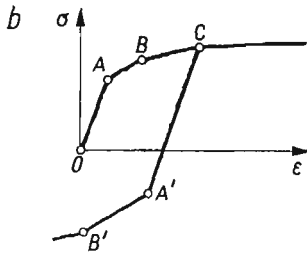
oraz równania (2.5), (3.12) i (3.13) możemy otrzymać zależności pomiędzy współczynnikami  $G^{(i)}$  i  $K^{(i)}$ , mianowicie:

$$(3.15) \quad K^{(2)} = G^{(2)}, \quad K^{(1)} = G^{(1)} - G^{(1)2} \frac{(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)})}{G^{(1)} + G^{(2)}}, \quad K^{(0)} = G^{(0)} - G^{(0)2} \frac{(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(0)})}{G^{(0)} + G^{(1)}},$$

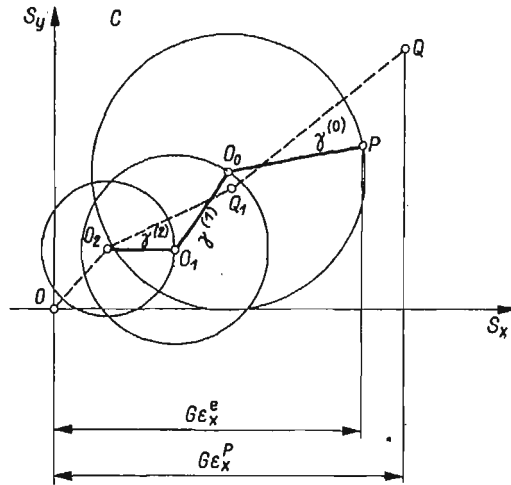
zaś rugując wielkości  $d\varepsilon^{(1)}$ ,  $d\varepsilon^{(2)}$ , otrzymujemy ostatecznie zależności analogiczne do związków (3.10), mianowicie

$$(3.16) \quad \begin{aligned} d\alpha^{(0)} &= \left[ G^{(0)}\underline{n}^{(0)} - \frac{G^{(0)} - K^{(0)}}{(\underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)})} \underline{n}^{(1)} \right] d\lambda = \underline{b}^{(0)} d\lambda, \\ d\alpha^{(1)} &= \left[ G^{(1)}\underline{n}^{(1)} - \frac{G^{(1)} - K^{(1)}}{(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)})} \underline{n}^{(2)} \right] \frac{G^{(0)}(\underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)})}{G^{(0)} + K^{(1)}} d\lambda = \underline{b}^{(1)} d\lambda, \\ d\alpha^{(2)} &= G^{(2)} \frac{G^{(1)} - K^{(1)}}{G^{(1)}(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)})} \cdot \frac{G^{(0)}(\underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)})}{G^{(0)} + K^{(1)}} \underline{n}^{(2)} d\lambda = \underline{b}^{(2)} d\lambda. \end{aligned}$$

Równanie powyższe można uogólnić na dowolnie dużą ilość spełnionych równości (3.9), odpowiadających uplastycznieniu w poszczególnych elementach. Stosując model przedstawiony na rys. 2a, nie musimy już określać parametrów  $\underline{b}^{(i)}$  w związkach (3.10), lecz jedynie znać rozkład wielkości skalarnych  $\gamma^{(i)}$  i  $G^{(i)}$ .



Rys. 2b



Rys. 2c

Rysunek 2b przedstawia odpowiadającą temu modelowi krzywą umocnienia, zaś rys. 2c pokazuje dwuwymiarową reprezentację na płaszczyźnie sił, którą możemy utożsamiać z płaszczyzną naprężeń makroskopowych. Ruch poszczególnych bloków uwarunkowany jest spełnieniem odpowiednich warunków plastyczności, które przyjmujemy w postaci

$$(3.17) \quad \begin{aligned} f^{(0)} &= (s_x - \alpha_x^{(0)})^2 + (s_y - \alpha_y^{(0)})^2 - \gamma^{(0)2} = 0, \\ f^{(1)} &= (\alpha_x^{(0)} - \alpha_x^{(1)})^2 + (\alpha_y^{(0)} - \alpha_y^{(1)})^2 - \gamma^{(1)2} = 0. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają okręgom na płaszczyźnie  $(S_x, S_y)$ . Wektory  $\underline{OO}_2/G^{(2)}$ ,  $\underline{OO}_1/G^{(1)}$ ,  $\underline{OO}_0/G^{(0)}$  przedstawiają względne przemieszczenia bloków; zatem całkowite przemieszczenie bloku  $O$  odpowiadające odkształceniu plastycznemu wyraża się sumą  $\underline{OO}_2/G^{(2)} + \underline{OO}_1/G^{(1)} + \underline{OO}_0/G^{(0)}$ . Całkowitą siłę działającą na blok  $O$  przedstawia wektor  $\underline{OP}$ , zaś wektor  $\underline{OP}/G$  przedstawia makroskopowe odkształcenie sprężyste. Wykorzystując repre-

zentację na płaszczyźnie sił i całkując w sposób graficzny równania przyrostowe, możemy określić odkształcenia plastyczne oraz stan naprężeń wewnętrznych dla dowolnie zadanego programu obciążenia.

**M o d e l 2.** Oznaczamy jak poprzednio parametry wewnętrzne przez  $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$  i  $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(n)}$ . Załóżmy, że warunek plastyczności ma postać

$$(3.18) \quad f^{(0)}(\sigma - \sum \alpha^{(i)}) - \gamma^{(0)} = 0,$$

zaś równania skalarne, które powinny spełniać parametry  $\alpha^{(i)}$  w pewnym zakresie swej zmienności mają postać

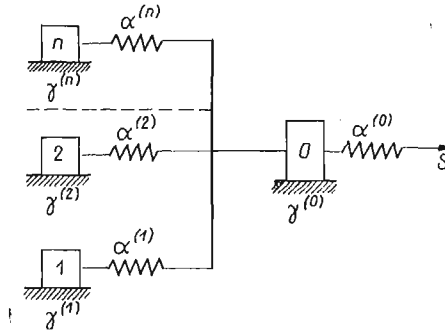
$$(3.19) \quad f^{(i)}(\alpha^{(i)} - \gamma^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Przyjmujemy, że parametry  $\gamma^{(s)}$  są stałe w czasie procesu. Różniczkując (3.19), otrzymujemy

$$(3.20) \quad \underline{n}^{(i)} \cdot d\alpha^{(i)} = 0,$$

gdzie  $\underline{n}^{(i)}$  oznaczają wektory jednostkowe do powierzchni  $f^{(i)} = 0$ . Załóżmy, że spełnionych jest  $l$  pierwszych równości (3.19). Wtedy równanie przyrostowe dla parametrów  $\alpha^{(i)}$ , spełniające warunki zgodności (3.20), możemy zapisać w postaci:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} d\alpha^{(i)} &= G^{(i)}[d\varepsilon^p - (d\varepsilon^p \cdot \underline{n}^{(i)})\underline{n}^{(i)}], & f^{(i)} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, l, \\ d\alpha^{(i)} &= G^{(i)}d\varepsilon^p, & f^{(i)} &\leq 0, & i &= l+1, \dots, n. \end{aligned}$$



Rys. 3

Moduł styczny  $K$  krzywej umocnienia otrzymamy różniczkując (3.18) oraz wykorzystując (2.5) i (3.21). W wyniku otrzymamy:

$$(3.22) \quad K = \frac{\sum_{i=1}^l G^{(i)} \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha^{(i)}} \cdot \underline{n}_f - \frac{\partial f}{\partial \alpha^{(i)}} \cdot \underline{n}^{(i)} (\underline{n}_f \cdot \underline{n}^{(i)}) \right] + \sum_{k=l}^n G^{(k)} \frac{\partial f}{\partial \alpha^{(k)}} \cdot \underline{n}_f}{|f'_\sigma^{(0)}|}.$$

Widzimy, że w naszym przypadku równania skalarne (3.19) mają inny sens, aniżeli dla modelu poprzedniego. Zmiana wszystkich parametrów  $\alpha^{(i)}$  zachodzi, jeśli tylko spełniony jest warunek plastyczności (3.18), zgodnie z drugim równaniem (3.21), gdy  $f^{(i)} < 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Spełnienie związku skalarnego (3.19) dla dowolnego parametru implikuje zmianę jego prawa przyrostowego, gdyż dla  $f^{(i)} = 0$  obowiązuje pierwszy związek (3.21). Mamy zatem przypadek opisany ogólnie równaniem (3.7).

Interpretację mechaniczną tego modelu przedstawia rys. 3. Sztynny blok, którego przemieszczenie odpowiada odkształceniu plastycznemu spoczywa na płaszczyźnie o sile

tarcia granicznego  $\gamma^{(0)}$ . Z blokiem połączone są równoległe elementy sprężyste i bloki o granicznych wartościach siły tarcia  $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(n)}$ . Parametry  $\alpha^{(i)}$  odpowiadają siłom w elementach sprężystych.

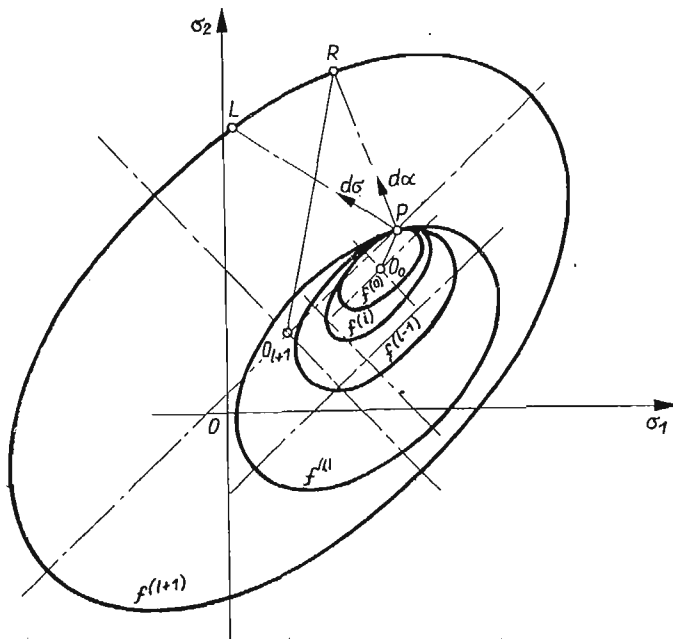
**M o d e l 3.** Załóżmy, że parametrami stanu jest  $n+1$  wielkości tensorowych  $\underline{\alpha}^{(0)}, \underline{\alpha}^{(1)}, \dots, \underline{\alpha}^{(n)}$ , oraz  $2(n+1)$  wielkości skalarnych  $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$  i  $K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)}$ . Warunek plastyczności ma postać

$$(3.23) \quad f^{(0)}(\sigma - \underline{\alpha}^{(0)}) - \gamma^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

zaś warunki skalarne określające obszar zmienności parametrów mają postać

$$(3.24) \quad f^{(i)}(\sigma - \underline{\alpha}^{(i)}) - \gamma^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Jeśli spełniony jest warunek plastyczności oraz  $l$  pierwszych związków (3.24), zakładamy, że wszystkie powierzchnie są styczne do siebie w przestrzeni naprężeń w punkcie określonym przez stan naprężenia  $\sigma$ . Każdej z powierzchni (3.23) i (3.24) odpowiada określony



Rys. 4

moduł wzmocnienia  $K^{(l)}$ ; jeśli w danym punkcie  $P^{(l)}$ ,  $l$  powierzchni jest stycznych do siebie, to moduł wzmocnienia ma wartość  $K = K^{(l)}$  i przyrost odkształceń plastycznych określamy, zgodnie z równaniem (2.5) przy  $K = K^{(l)}$ . W ten sposób konfiguracja powierzchni (3.23), (3.24) określa w przestrzeni naprężeń pole modułów wzmocnienia, którego zmianę możemy śledzić całkując związki przyrostowe wzdłuż programu obciążenia. Tego rodzaju model był rozpatrywany przez MROZA w pracach [16, 17].

Ruch chwilowy powierzchni  $f^{(l)}$  zachodzi w kierunku wektora  $\underline{\sigma}^{(l+1)} - \underline{\sigma}^{(l)}$ , gdzie  $\underline{\sigma}^{(l+1)}$  jest punktem na powierzchni  $f^{(l+1)}$  o tej samej normalnej, co w punkcie  $P^{(l)}$ . Wszystkie

powierzchnie  $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(l-1)}$  poruszają się wraz z powierzchnią  $f^{(l)}$ , zachowując z nią styczność (rys. 4). Możemy te założenia ująć matematycznie pisząc:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} d\alpha^{(l)} &= d\mu(\alpha^{(l+1)} - \alpha^{(l)}) = \frac{d\mu}{\gamma^{(l)}}[(\gamma^{(l+1)} - \gamma^{(l)})(\alpha^{(l)} - \alpha^{(l)}\gamma^{(l+1)} - \alpha^{(l+1)}\gamma^{(l)}), \\ \alpha^{(l-1)} &= \alpha^{(l)} - \frac{\gamma^{(l-1)}}{\gamma^{(l)}}(\alpha^{(l)} - \alpha^{(l)}), \\ d\alpha^{(l+1)} &= \dots = d\alpha^{(n)} = 0, \\ d\gamma^{(i)} &= C^{(i)}(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

przy czym przyjmujemy, że wszystkie powierzchnie posiadają środek symetrii, a więc równania (3.23) i (3.24) są jednorodnymi funkcjami argumentów  $\sigma - \alpha^{(i)}$ . Wykorzystując równania zgodności w postaci:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma - \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \alpha^{(l)}} \cdot d\alpha^{(l)} - d\gamma^{(l)} &= 0, \\ \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma - \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} \cdot d\alpha^{(i)} - d\gamma^{(i)} &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, (l-1), \end{aligned}$$

oraz związku (3.25), otrzymujemy z pierwszego równania (3.26)

$$(3.27) \quad d\mu = \frac{\left| \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \sigma} \right| K^{(l)} - C^{(l)}}{\left| \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \sigma} \right| (\alpha^{(l+1)} - \alpha^{(l)}) \cdot n_f},$$

zaś pozostałe równania (3.26) są spełnione automatycznie przy założeniu jednorodności związków (3.23) i (3.24)<sup>2)</sup>.

Niniejszy model jest skonstruowany bardziej formalnie, aniżeli poprzednie i nie ma bezpośredniej interpretacji mechanicznej. Jest on natomiast wygodniejszy do badania własności materiału, bowiem pole modułów wzmocnienia bezpośrednio ilustruje kierunkowy rozkład sztywności w materiale i jego zmianę pod wpływem odkształcenia plastycznego. Podobną koncepcję przedstawiania własności materiału odkształconego plastycznie omówił również HAYTHORNWAITE [22].

Jest rzeczą jasną, że podobnych modeli możemy konstruować więcej, lecz wszystkie one dadzą się umieścić w jednym schemacie ogólnym omówionym na początku tego rozdziału. Istotną cechą wszystkich modeli jest wprowadzenie obok warunku plastyczności odpowiedniej ilości związków skalarnych określających obszary zmienności parametrów wewnętrznych oraz odpowiadających im przyrostowych równań zgodności.

**3.2. Opis wzmocnienia przy uwzględnieniu niejednorodności struktury.** Załóżmy, że element makroskopowy jest układem utworzonym z podelementów o pewnych, określonych własnościach sprężystoplastycznych, czy lepkich. Powstaje problem, jak określić własności tego makro-

<sup>2)</sup> Istotnie, warunki zgodności (3.26) dla  $i = 0, 1, \dots, l-1$  prowadzą do równań

$$\frac{\partial f^{(i)}}{\partial \sigma^{(i)}} \cdot (\sigma^{(i)} - \alpha^{(i)}) - \gamma^{(i)} = 0,$$

które są spełnione, jeśli  $f^{(i)}$  są funkcjami jednorodnymi rzędu pierwszego.

-elementu, o ile znamy konfigurację geometryczną podelementów i ich własności. Próby matematyczne rozwiązania tego zagadnienia dotyczą w pierwszym rzędzie ciał polikrystalicznych. Spośród dużej ilości prac wymienić tu należy w pierwszym rzędzie prace TAYLORA [23], BATDORFA i BUDIANSKY'EGO [24], HILLA [26] oraz LINA i ITO [25], którzy rozpatrywali problem określenia związków fizycznych i warunku uplastycznienia agregatu polikrystalicznego, wychodząc z własności monokryształów. W rzeczywistości nasza informacja zarówno o własnościach fizycznych monokryształów, jak i ich geometrii jest ograniczona, gdyż do tej pory nie dysponujemy metodami pomiaru własności poszczególnych ziaren krystalicznych, zaś ich geometrię możemy opisać jedynie w sposób statystyczny.

Dlatego w wielu przypadkach cenna jest możliwość podania *oszacowań* rzeczywistych własności. Możemy to uczynić przyjmując pewne założenia o rozkładzie naprężeń lub odkształceń wewnątrz makroelementu. Najprostszym założeniem będzie przyjęcie, że stan naprężeń jest jednorodny, natomiast niejednorodność występuje jedynie w rozkładzie odkształceń; otrzymamy w ten sposób krzywą umocnienia, która będzie *dolną* oceną rzeczywistej krzywej. Możemy również założyć odwrotnie, że w makroelemente panuje jednorodny stan odkształcenia, a niejednorodność występuje jedynie w rozkładzie naprężeń; odpowiadająca temu założeniu krzywa umocnienia będzie *górną* oceną krzywej rzeczywistej. Podobne podejście stosowane już było od dawna przy szacowaniu własności sprężystych polikryształów (tzw. oceny Reussa i Voigta) przy określaniu modułu Younga dla polikryształów. W teorii BATDORFA i BUDIANSKY'EGO [24] przyjmuje się również, że w każdym monokryształe panuje ten sam stan naprężenia co w elemencie makroskopowym, zatem ich teoria prowadzi do dolnej oceny krzywej umocnienia. Na odwrót TAYLOR [23] oraz LIN i ITO [25] wychodzą z założenia jednorodności stanu odkształcenia. Teorie uwzględniające niejednorodność naprężeń i odkształceń w polikryształe [27, 29] prowadzą do bardzo złożonych związków, które mają charakter bardziej poznawczy aniżeli praktyczny.

Ponieważ warunek plastyczności monokryształu jest powierzchnią odcinkowo regularną, z występującymi na niej krawędziami, analiza teoretyczna prowadzi do wniosku, że na powierzchni uplastycznienia dla makroelementu powstają również naroża. Aby uzyskać bardziej proste związki, które można by stosować w praktycznych zagadnieniach przyjmijmy, że makroelement utworzony jest z podelementów o regularnych powierzchniach płynięcia. Przyjmując hipotezę o jednorodnym stanie naprężenia, możemy ją zilustrować jako model w *szeregowym* uporządkowaniu podelementów; odwrotnie, założenie o jednorodnym stanie odkształcenia będziemy modelować przyjmując *równoległe* ułożenie podelementów. W ten sposób wyniki uzyskane z tych dwóch założeń powinny dać obustronne oszacowanie rzeczywistych własności sprężysto-plastycznych, które wystąpią przy dowolnej konfiguracji podelementów, o tych samych własnościach.

**M o d e l 4.** Założmy, że w elemencie makroskopowym panuje jednorodny stan naprężenia; odpowiada to przyjęciu szeregowego połączenia elementów sprężysto-plastycznych, z których każdy charakteryzuje się powierzchnią plastyczności

$$(3.28) \quad f^{(i)}(\sigma - \underline{\sigma}^{(i)}) - \gamma^{(i)} = 0;$$

zakładamy przy tym, że  $\gamma^{(i)}$  są stałe, zaś

$$(3.29) \quad d\underline{\sigma}^{(i)} = C^{(i)} d\underline{\varepsilon}^{(i)p}.$$

Prawo płynięcia dla każdego elementu przyjmiemy w postaci

$$(3.30) \quad d\underline{\varepsilon}^{(i)p} = \frac{1}{K^{(i)}} \eta_f^{(i)} d\sigma_f^{(i)},$$

gdzie  $K^{(i)} = C^{(i)}$ , zgodnie z równaniem (2.11). Makroskopowy stan odkształcenia otrzymujemy jako średnią wartość odkształceń plastycznych poszczególnych elementów, to znaczy

$$(3.31) \quad d\underline{\varepsilon}^p = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n d\underline{\varepsilon}^{(i)p}, \quad d\underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n d\underline{\varepsilon}^{(i)e}.$$

Powyższy model rozpatrywany był w pracy IWANA [14, 15].

**Model 5.** Załóżmy, że w elemencie mamy jednorodny stan odkształcenia  $\underline{\varepsilon} = \bar{\underline{\varepsilon}}$ . Odpowiada to równoległemu połączeniu elementów sprężysto-plastycznych. Odkształcenie sprężyste dowolnego elementu wynosi  $\underline{\varepsilon}^{(i)p} = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{(i)p}$ , zaś naprężenie  $\underline{\sigma}^{(i)} = \underline{K}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{(i)p})$  gdzie  $\underline{K}$  oznacza tensor modułów sprężystości. Warunek plastyczności dla dowolnego elementu ma zatem postać

$$(3.32) \quad f^{(i)}[\underline{K}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{(i)p}) - \underline{\alpha}^{(i)}] - \gamma^{(i)} = 0,$$

zaś przyrost  $d\underline{\alpha}^{(i)}$  jest związany zależnością (3.29) z przyrostem odkształcenia plastycznego. Równanie (3.32) przyjmuje zatem postać

$$(3.33) \quad f^{(i)}[\underline{K}\underline{\varepsilon} - (\underline{K} + \underline{c})\underline{\varepsilon}^{(i)p}] - \gamma^{(i)} = 0.$$

Naprężenie makroskopowe określimy ze wzoru

$$(3.34) \quad \underline{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \underline{\sigma}^{(i)} = \underline{K}\underline{\varepsilon} - \frac{\underline{K}}{n} \sum_{i=0}^n \underline{\varepsilon}^{(i)p}.$$

W przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa, jedynie naprężenia dewiatorowe  $\underline{S}^{(i)}$  wchodzi do tego warunku, otrzymujemy zatem  $\underline{s}^{(i)} = 2G(\underline{e} - \underline{e}^{(i)p})$ , gdzie  $\underline{e}$  i  $\underline{e}^{(i)p}$  oznaczają odkształcenia dewiatorowe,  $G$  — moduł Kirchhoffa, zaś warunek plastyczności ma postać

$$(3.35) \quad \frac{1}{2}(\underline{s}^{(i)} - \underline{\alpha}^{(i)}) \cdot (\underline{s}^{(i)} - \underline{\alpha}^{(i)}) - \gamma^{(i)2} = 0.$$

Wyrażając ten warunek przez odkształcenia, mamy

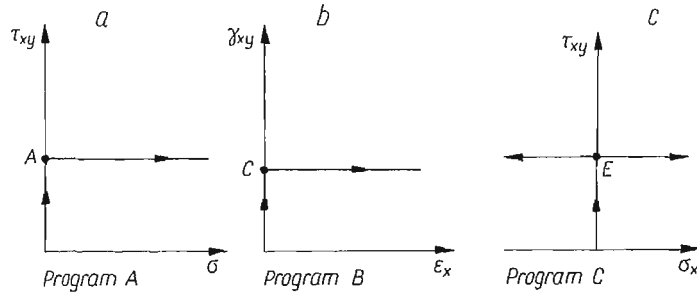
$$(3.36) \quad (\underline{e} - k\underline{e}^{(i)p}) \cdot (\underline{e} - k\underline{e}^{(i)p}) - \frac{\gamma^{(i)2}}{2G^2} = 0,$$

gdzie  $k = 1 + \frac{c}{2G}$ . W danym przypadku wygodniej jest zatem posługiwać się przestrzenią odkształceń.

Tego rodzaju model był rozpatrywany przez BESSELINGA [18,19] oraz WELLSA i PASLAYA [20], do opisu anizotropii wzmocnienia oraz w teorii pełzania.

## 4. Obliczenie porównawcze dla czterech modeli wzmocnienia

Aby uzyskać dane porównawcze o własnościach poszczególnych modeli, przeprowadzimy obliczenia dla trzech różnych programów obciążenia. Ograniczymy się do płaskiego stanu naprężenia, określonego ogólnie przez trzy składowe naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , odniesione do obranego układu kartezjańskiego  $(x, y)$ . Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy materiał poddany jest jednoosiowemu rozciąganiu naprężeniem  $\sigma_x$  i ścinaniu naprężeniem



Rys. 5

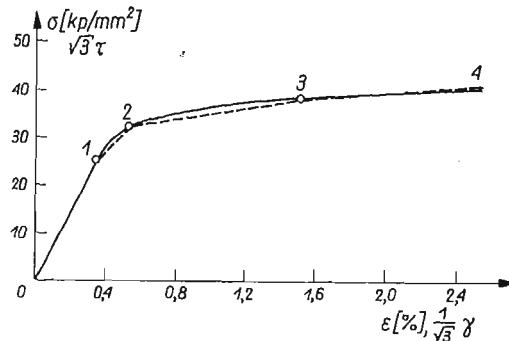
$\tau_{xy}$ . Stan taki uzyskujemy w próbce rurkowej poddanej działaniu siły rozciągającej i momentu skręcającego. Trajektorie naprężenia i odkształcenia można wtedy rozpatrywać na płaszczyźnie  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  i  $\varepsilon_x$ ,  $\gamma_{xy}$ .

Założmy trzy następujące programy obciążenia (rys. 5).

Program A: po wstępnym obciążeniu naprężeniem  $\tau_{xy}$ , materiał poddajemy rozciąganiu przy zachowaniu stałej wartości  $\tau_{xy}^A$  (rys. 5a),

Program B: po wstępnym odkształceniu ścinającym do wartości  $\gamma_{xy}^C$ , materiał poddajemy rozciąganiu przy zachowaniu stałej wartości  $\gamma_{xy}^C$  (rys. 5b),

Program C: po wstępnym obciążeniu naprężeniem  $\tau_{xy}$  materiał poddajemy cyklicznemu ścisaniu i rozciąganiu przy zachowaniu stałej wartości  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^E$ .



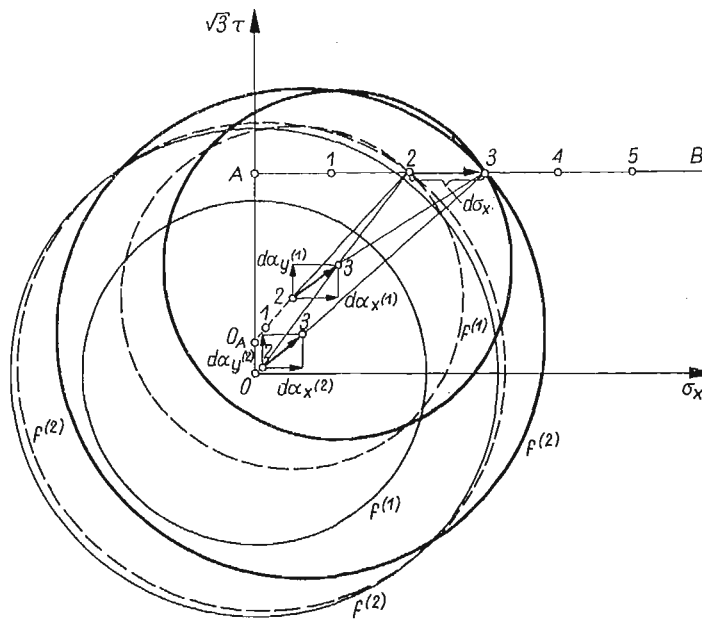
Rys. 6

Założmy, że krzywa wzmocnienia przy jednoosiowym rozciąganiu ma postać przedstawioną na rys. 6 (jest to krzywa rozciągania stopu aluminium). Aproxymujemy ją w zakresie plastycznym trzema odcinkami prostymi 1—2, 2—3, 3—4. W stanie złożonym tego ro-



dzaju aproksymacja odpowiadać będzie wprowadzeniu trzech parametrów tensorowych  $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$  i sześciu parametrów skalarnych  $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}$  dla modelu 1, lub  $K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)}$  dla modelu 3. Założymy, że parametry skalarne są stałe w czasie procesu deformacji, zaś poszczególne powierzchnie ulegają jedynie przemieszczeniu. W przypadku warunku Hubera–Misesa możemy powierzchnie te przedstawić jako okręgi na płaszczyźnie  $t_{xy} = \sqrt{3}\tau_{xy}, t_x = \sigma_x$ , mamy bowiem  $(t_x - \alpha_x^{(0)})^2 + (t_{xy} - \alpha_{xy}^{(0)})^2 - \gamma^{(0)2} = 0$  i analogiczne równania dla pozostałych powierzchni.

Rysunek 7 przedstawia przykładowo sposób całkowania graficznego przyrostowych równań płynięcia dla programu A, przy zastosowaniu szeregowego modelu 4. Dla większej przejrzystości przedstawiono jedynie dwie powierzchnie. Odcinek  $AB$  dzielimy na małe



Rys. 7

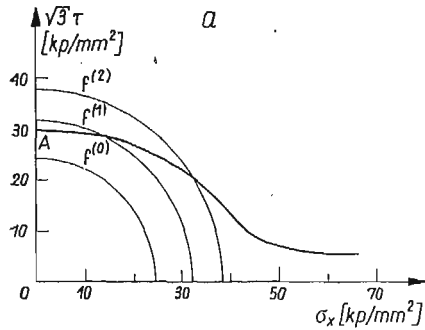
części odpowiadające przyrostom  $d\sigma_x$ . Powierzchnie  $f^{(0)}, f^{(1)} \dots$  przemieszczają się wzdłuż zewnętrznych normalnych w punkcie odpowiadającym stanowi naprężenia, przy czym muszą jednocześnie przejść przez odpowiednie punkty podziału na odcinku  $AB$ . Warunek ten określa chwilowy ruch okręgów, zaś położenie ich środków  $\alpha_{ij}^{(0)}, \alpha_{ij}^{(1)}, \dots$  pozwala na określenie odkształceń plastycznych

$$\varepsilon_{ij}^{(0)p} = \alpha_{ij}^{(0)}/K^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)p} = \alpha_{ij}^{(1)}/K^{(1)}, \quad \dots, \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ij}^{(0)p} + \varepsilon_{ij}^{(1)p} + \varepsilon_{ij}^{(2)p}).$$

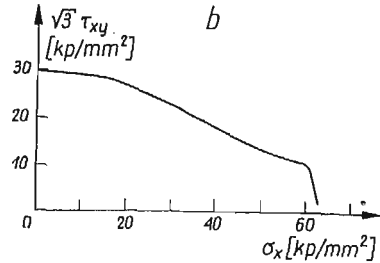
W przypadku zadanego programu w odkształceniach (program B) całkowania dokonujemy drogą kolejnych przybliżeń. Zakładamy najpierw przyrost naprężenia i określamy odpowiadający mu przyrost odkształcenia. Jeśli nie pokrywa się z kierunkiem zadanej trajektorii odkształcenia, poszukujemy rozwiązania dla nowego przyrostu naprężenia aż do uzyskania zgodności. W podobny sposób przeprowadzimy całkowanie dla pozostałych modeli. Dla

modelu 1 wykorzystujemy reprezentację na płaszczyźnie naprężeń przedstawioną na rys. 2, zaś dla modelu 5 posługujemy się płaszczyzną odkształceń.

Rysunki 8a i 8b przedstawiają przebieg zmiany naprężeń  $t_{xy} = \sqrt{3}\tau_{xy}$  i  $t_x = \sigma_x$  dla programu B obliczony przy użyciu szeregowego modelu 4 i równoległego modelu 5. Przebieg

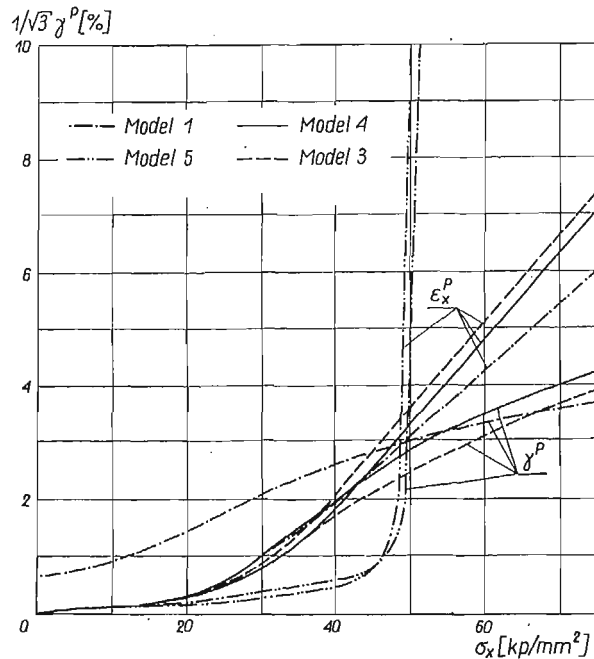


Rys. 8a



Rys. 8b

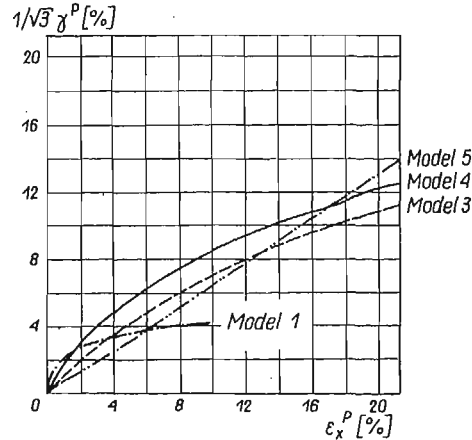
zmian odkształceń plastycznych  $\varepsilon_{xy}^p = \gamma_{xy}^p / \sqrt{3}$ ,  $\varepsilon_x^p = e_x$  dla programu A przedstawia rys. 9. Widoczne są znaczne różnice w zachowaniu poszczególnych modeli, szczególnie dla większych wartości naprężenia  $\sigma_x$ . Należy przypomnieć, że przy prostym rozciąganiu



Rys. 9

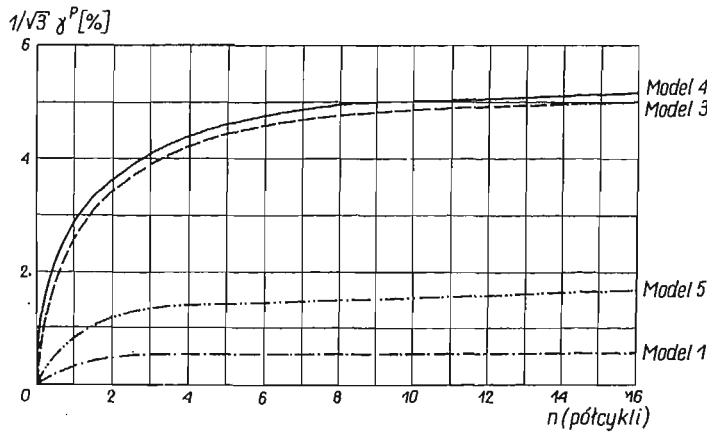
wszystkie modele dają tę samą krzywą wzmocnienia. Rysunek 10 przedstawia krzywe z rys. 9 przeniesione na płaszczyznę odkształceń.

Rysunek 11 przedstawia narastanie odkształceń  $e_{xy}^p$ , wywołane cyklicznie zmiennym naprężeniem rozciągającym i ściskającym, nałożonym na stałe naprężenie  $t_{xy}$  (program C). Widzimy, że odkształcenia  $e_{xy}^p$ , po początkowym szybkim wzroście, dążą do pewnej wartości



Rys. 10

asymptotycznej. Widoczne są również różnice w zachowaniu się poszczególnych modeli: o ile modele 1 i 5 przewidują bardzo mały wzrost odkształceń  $e_{xy}^p$ , dla modeli 2 i 4 wzrost ten jest kilkakrotnie większy. Tego typu doświadczenie mogłoby zatem służyć jako doświadczenie krytyczne przy ocenie przydatności poszczególnych modeli. Należy zauważyć,



Rys. 11

że w rzeczywistości obserwuje się stały wzrost odkształceń  $e_{xy}^p$ , wywołany cykliczną zmianą  $t_x$ ; krzywa zależności  $e_{xy}^p$  od ilości cykli przypomina klasyczną krzywą pełzania metali przy podwyższonych temperaturach, por. np. [28].

## 5. Wnioski końcowe

W pierwszej części pracy przedstawiliśmy strukturę matematyczną teorii plastyczności przy użyciu większej ilości parametrów materiałowych do opisanja własności plastycznych. Widzimy, że istotnym elementem jest wprowadzenie odpowiedniej ilości związków skalar-nych, określających obszary wewnętrznej nieodwracalności. Komplikuje to podstawowy układ równań przyrostowych, pozwala jednak na bardziej realistyczny opis własności plastycznych metali. Dla uproszczenia analizy pominięliśmy efekty cieplne oraz zjawisko pełzania towarzyszące zazwyczaj natychmiastowym odkształceniom plastycznym.

Uzyskane obliczeniowe wyniki porównawcze wskazują, że dla pewnych programów obciążenia, np. obciążenie cykliczne nałożone na stałe obciążenie, występują istotne różnice pomiędzy wskazaniem poszczególnych modeli. Tego typu programy powinny być zatem użyte w badaniach doświadczalnych.

## Literatura cytowana w tekście

1. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ingen. Arch., 1938, 116—126.
2. W. PRAGER, *A new method of analysing stress and strain in work-hardening, plastic solids*, J. Appl. Mech., 23 (1956).
3. А. Ю. Ишлинский, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Мат. Журнал, 6, т. 3 (1954).
4. H. ZIEGLER, *A modification of Prager's hardening rule*, Quart. Appl. Math., 17 (1959), 55—60.
5. M. EISENBERG, A. PHILIPS, *On non-linear kinematic hardening*, Acta Mechanica, 6 (1968).
6. A. BALTOU, A. SAWCZUK, *A rule of anisotropic hardening*, Acta Mechanica, 1/2 (1965), 81—92.
7. G. BACSKHAUS, *Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung*, ZAMM, vol. 48 (1968), 99—108.
8. А. А. ВАКУЛЕНКО, *О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах*, Иссл. по упругости и пластичности, Изд. Ленингр. Унив., 1 (1961).
9. E. KRÖNER, *A new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. and Phys., vol. 42, N. 1, (1963).
10. W. PRAGER, *Composite stress-strain relations for elastoplastic solids*, Proc. IUTAM Symp. «Irreversible aspects of continuum mechanics». Springer Verl., Viena 1966.
11. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, *Обобщенная теория пластического течения*, Сб. «Исследования по упругости и пластичности», Изд. Ленинград. Унив., 6 (1967).
12. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. В. НОВОЖИЛОВ, *Об учете микронапряжений в теории пластичности*, Мех. Тверд. Тела, 3, (1968), 82—91.
13. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория пластичности учитывающая остаточные микронапряжения*, Прикл. Мат. Мех., 22 (1968).
14. W. D. IWAN, *A distributed element model for hysteresis and its steady-state dynamic response*, Journ. Appl. Mech., 33 (1966).
15. W. D. IWAN, *On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems*, Journ. Appl. Mech., 34 (1967).
16. Z. MRÓZ, *On the description of anisotropic workhardening*, J. Mech. Phys. Solids, 15, (1967) 163—175.
17. Z. MRÓZ, *An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general work-hardening model*, Acta Mechanica, 7 (1967), 199—212.
18. J. F. BESSELING, *A theory of plastic flow for anisotropic hardening in plastic deformation of an initially isotropic material*, Nat. Aero. Res. Inst., Amsterdam Rep. S—410, 1953.
19. J. F. BESSELING, *Theory of elastic, plastic and creep deformation of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery and secondary creep*, J. Appl. Mech., 4, 25, (1958).
20. C. H. WELLS, P. R. PASLAY, *A small-strain plasticity theory for planar slip materials*, Journ. Appl. Mech., 26 (1969).

21. В. Д. ИВЛЕВ, *О теории сложных сред*, Докл. Акад. Наук СССР, 8 (1963).
22. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *A more rational approach to strain hardening data*, «Engineering Plasticity», Ed. J. Heyman, F. A. Leckie, 1968.
23. G. I. TAYLOR, *Plastic strain in metals*, Journ. Inst. of Metals, 62 (1938).
24. S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY, *Polyaxial stress-strain relations of strainhardening metal*, J. Appl. Mech., 21 (1954), 323—326.
25. T. H. LIN, M. ITO, *Theoretical plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined and reversed stress*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), 103—115.
26. R. HILL, *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 15, 1967.
27. BUDIANSKY, T. T. WU, Proc. 4-th U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME, 2 (1962).
28. A. M. FREUDENTHAL, M. RONAY, *Second order effects in dissipative media*, Proc Roy. Soc., ser. A, 292 (1966), 14—50.
29. V. KAFKA, *The general theory of isothermal elastic-plastic deformation of polycrystals based on analysis of the microscopic state of stress*, ZAMM, 48 (1968), 265—282.
30. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa, wyd. PWN, 1963.
31. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
32. Z. MRÓZ, *On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids*, Arch. Mech. Stos., 18 (1966).
33. J. KRATOCHVIL, O. W. DILLON, *Thermodynamics of elasticplastic materials, as a theory with internal state variables*, J. Appl. Phys., vol. 40, No 8 (1969), 3207—3218.

## Р е з ю м е

## О СОСТАВНЫХ МОДЕЛЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО УПРОЧНЕНИЯ

Простые модели изотропического или кинематического упрочнения совместно с законом пластического течения не могут правильно описать сложные явления, происходящие при пластическом деформировании для непропорциональных программ нагружения, в частности при циклических нагрузках, допускающих последовательно чередующиеся процессы нагружения и разгрузки. Необходимо поэтому ввести систему дополнительных параметров.

В предложенной работе обсуждается математическая структура теории пластичности с параметрами внутреннего состояния. В рамках общей теории рассмотрены некоторые частные модели. Для трех различных программ нагружения получены сравнительные численные результаты. Дается краткий обзор некоторых ранее предложенных теорий.

## S u m m a r y

## ON COMPOSITE MODELS OF PLASTIC WORKHARDENING

Simple models of isotropic or kinematic workhardening when combined with flow rule are not capable to describe complex phenomena occurring during plastic deformation for non-proportional loading programmes, especially for cyclical loads involving consecutive loading and unloading. A mathematical structure of the plasticity theory with internal state parameters is discussed and some particular models are considered within the framework of a general theory. Comparative results are obtained for three different loading programmes. Some previous theories are also briefly reviewed in the paper.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.*