

PEWNE NIEWISKOZYMETRYCZNE PRZEPŁYWY  
CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Do niedawna badanie własności reologicznych cieczy lepkospężytych, takich jak roztwory i stopione polimery, niektóre oleje mineralne i zawiesiny, ciecze przerabiane w przemyśle spożywczym itp., prowadzono z reguły dla tzw. przepływów wiskozymetrycznych będących różnymi modyfikacjami przepływów ścinających, charakteryzujących się poprzecznym gradientem prędkości. Przepływy wiskozymetryczne występują często w technologii i urządzeniach przetwórczych (przepływy przez przewody rurowe, kanały, szczeliny itp.) oraz prawie we wszystkich wiskozymetrach, tj. przyrządach służących do pomiaru lepkości i innych własności cieczy. Od przyrządów tych pochodzi zresztą nazwa klasy przepływów wiskozymetrycznych.

Parametrami charakteryzującymi własności cieczy w ustalonych lub nieustalonych, okresowo zmiennych przepływach wiskozymetrycznych są trzy niezależne funkcje wiskozymetryczne: funkcja lepkości (lepkość pozorna) i funkcje naprężeń normalnych lub odpowiednio dla małych oscylacji: funkcja lepkości dynamicznej, modułu dynamicznego i kąta stratności mechanicznej.

Teorii przepływów wiskozymetrycznych oraz wynikom badań doświadczalnych poświęcone są liczne prace i monografie (por. [1, 2, 3, 4, 5, 6]). Prosty, lecz jednocześnie nowoczesny wykład tych zagadnień ujęty w ich historycznym rozwoju zawiera książka COLEMANA, MARKOVITZA i NOLLA [7]; również poprzednia praca przeglądowa autora [8] ujmowała zasadnicze własności przepływów wiskozymetrycznych.

Wzrastające ostatnio zainteresowanie różnymi niewiskozymetrycznymi przepływami cieczy lepkospężytych ma swoje źródło nie tylko w rozwoju reologii teoretycznej i konieczności realizowania bardziej złożonych przepływów w przetwórstwie polimerów, ale również wynika z potrzeby konstruowania oraz stosowania reometrów pozwalających na pełniejsze i sprawniejsze wyznaczenie charakterystyk reologicznych cieczy. Znamienną rolę odgrywa tutaj ustalony przepływ rozciągający, posiadający duże praktyczne znaczenie dla procesów przedzenia, wyciągania itp., którego charakterystyki reologiczne są całkowicie odmienne i nie związane bezpośrednio z funkcjami wiskozymetrycznymi (por. [9]).

Wśród różnych niewiskozymetrycznych przepływów cieczy lepkospężytych szczególną pozycję zajmują przepływy zaliczające się do «ruchów ze stałą historią deformacji» (oznaczanych w dalszym ciągu skrótem: RSHD), których teorię dla cieczy prostych sfor-

mułowali COLEMAN [10] oraz NOLL [11], a następnie rozwinęli inni badacze (por. [12, 13, 14, 15, 16]). Szczególna pozycja przepływów ze stałą historią deformacji wynika z faktu, że dla takich przepływów, podobnie zresztą jak i dla przepływów wiskozymetrycznych, pamięć lepkosprężystej cieczy prostej ujawnia się w sposób istotnie ograniczony lub, używając słów COLEMANA [10], pamięci cieczy prostej w RSHD «...pozostaje bardzo niewiele do zapamiętania». Nie bez znaczenia był również fakt skonstruowania reometrów realizujących RSHD (por. p. 4) zanim jeszcze zorientowano się, że przepływy w nich występujące należą do tej szczególnej klasy przepływów niewiskozymetrycznych.

W niniejszym przeglądzie zajmiemy się przede wszystkim teorią przepływów niewiskozymetrycznych należących do klasy RSHD, zwracając szczególną uwagę na ich realizację w przyrządach i możliwość wyznaczania odpowiednich charakterystyk. Warto nadmienić już na wstępie, że interesująca nas klasa przepływów obejmuje nie tylko wszystkie ustalone przepływy wiskozymetryczne, ale również liczne inne, jak ustalone proste rozciąganie i ustalone czyste ścinanie (por. p. 4.1), przepływ w ortogonalnym reometrze Maxwella (por. p. 4.2), reometrze balansowym Kepesa (por. 4.3), itp.

## 2. Teoria przepływów ze stałą historią deformacji

**2.1. Zależności podstawowe.** Podstawą rozważań kinematycznych w mechanice ośrodka ciągłego są odpowiednie równania ruchu punktu materialnego (por. [3, 7]).

Oznaczając przez  $\mathbf{x}$  położenie w przestrzeni euklidesowej punktu materialnego  $X$  w aktualnym czasie  $t$ , zaś przez  $\xi$  położenie tego samego punktu materialnego w dowolnej chwili  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ), równania ruchu przyjmują postać

$$(2.1.1) \quad \xi = \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad -\infty < \tau \leq t,$$

gdzie  $\chi_t$  oznacza funkcję względnej deformacji<sup>1)</sup>.

Gradient względnej deformacji

$$(2.1.2) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{F}_t(t) = \mathbf{1}$$

opisuje zmianę lokalnej konfiguracji cząstki  $X$  w czasie między  $\tau$  i  $t$ . Często funkcję tensorową

$$(2.1.3) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_t(t-s) \quad \text{dla} \quad \infty > s \geq 0$$

nazywa się historią względnego gradientu deformacji. Jeśli dane jest pole prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  w chwili aktualnej  $t$ , to funkcję względnej deformacji określamy rozwiązując następujące równania:

$$(2.1.4) \quad \dot{\xi}(\tau) = \mathbf{v}(\xi(\tau), \tau), \quad \xi(t) = \mathbf{x},$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po czasie.

Pamiętając, że nieściśliwe cieczy proste to klasa ośrodków, dla których tensor naprężenia jest określony, z dokładnością do ciśnienia hydrostatycznego, przez historię względnego gradientu deformacji (por. [3, 7]), równania konstytutywne zapisujemy w postaci

$$(2.1.5) \quad \mathbf{T}_E(t) = \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \overset{\infty}{\mathcal{H}}(\mathbf{F}_t(t-s)), \quad \det \mathbf{F}_t(t-s) = 1,$$

<sup>1)</sup> Należy podkreślić, że taka właśnie postać równań ruchu jest najdogodniejsza, gdyż dla cieczy nie istnieje żadna inna wyróżniona konfiguracja odniesienia poza konfiguracją zajmowaną w chwili aktualnej  $t$ .

gdzie  $p$  jest ciśnieniem hydrostatycznym, zaś  $\mathcal{H}(\cdot)$  oznacza funkcjonal konstytutywny odwzorowujący względny gradient deformacji z przestrzeni historii deformacji na symetryczny tensor ekstra-naprężenia  $\mathbf{T}_E(t)$ . Ponieważ  $p$  nie jest określone przez równanie (2.1.5), niejednoznaczność funkcjonału konstytutywnego usuwamy przez założenie

$$(2.1.6) \quad \text{tr} \mathbf{T}_E(t) = \text{tr} \mathcal{H}(\mathbf{F}_t(t-s)) = 0, \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T},$$

przy czym  $\text{tr}$  oznacza ślad odpowiedniego tensora.

Dla klasy RSHD, zwanych także ruchami stagnacyjnymi (por. [10]), historia gradientu deformacji danej cząstki jest, z dokładnością do sztywnego obrotu, taka sama dla wszystkich chwil czasu. Zgodnie z definicją NOLLA (por. [11]) wyrażoną w języku matematycznym, *ruch nazywa się RSHD wtedy i tylko wtedy, jeśli gradient deformacji w dowolnej chwili  $\tau$ , określony względem ustalonej konfiguracji odniesienia w chwili 0, jest dany przez*

$$(2.1.7) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp(\tau \mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1},$$

przy czym  $\mathbf{Q}(\tau)$  jest tensorem ortogonalnym opisującym obrót cząstki od chwili 0 do chwili  $\tau$ , zaś  $\mathbf{M}$  — stałym tensorem. Często przyjmuje się, że  $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{N}_0$ , gdzie  $|\mathbf{N}_0| = 1$ , zaś  $\kappa$  oznacza stały parametr charakteryzujący wielkość deformacji (ścianania, rozciągania itp.).

Ponieważ dla cieczy konfiguracja odniesienia w chwili 0 nie posiada istotnego znaczenia, wykorzystujemy związek

$$(2.1.8) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}_0(\tau) \mathbf{F}_0^{-1}(t), \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau) |_{t=0},$$

prowadzący do następujących zależności równoważnych definicji (2.1.7):

$$(2.1.9) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \exp(-s \mathbf{M}) \mathbf{Q}^T(t), \quad 0 \leq s < \infty,$$

$$(2.1.10) \quad \mathbf{C}_t(t-s) = \mathbf{F}_t^T(t-s) \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t) \exp(-s \mathbf{M}^T) \exp(-s \mathbf{M}) \mathbf{Q}^T(t),$$

gdzie wskaźnik  $T$  u góry symbolu oznacza operację transponowania, zaś  $\mathbf{C}_t(t-s)$  oznacza historię prawego względnego tensora odkształcenia Cauchy'ego–Greena (por. [3]).

Wprowadzając pojęcie obróconego tensora parametrycznego (por. [13, 14]) będącego gradientem prędkości w chwili  $t$  względem obracającego się układu odniesienia, mianowicie

$$(2.1.11) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{M} \mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}(t) \kappa \mathbf{N}_0 \mathbf{Q}^T(t) = \kappa \mathbf{N},$$

mamy również

$$(2.1.12) \quad \mathbf{C}_t(t-s) = \exp(-s \mathbf{L}^T) \exp(-s \mathbf{L}), \quad 0 \leq s < \infty.$$

Warto nadmienić, że związek tensora  $\mathbf{L}(t)$  z przestrzennym gradientem prędkości  $\mathbf{L}_1(t)$  jest następujący:

$$(2.1.13) \quad \mathbf{L}_1(t) = \nabla_x \mathbf{v}(x, t) = \dot{\mathbf{F}}_0(t) \mathbf{F}_0^{-1}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t) + \mathbf{L}(t),$$

gdzie  $\mathbf{Q}(t)$ , jak poprzednio, oznacza zależny od czasu tensor obrotu od konfiguracji w chwili 0 do konfiguracji w chwili  $t$ , a antysymetria tensora  $\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$  jest oczywista.

W obracającym się układzie odniesienia, którego ruch charakteryzuje się tensorem  $\mathbf{Q}(t)$ , macierz obróconego gradientu prędkości jest stała. Można zatem podać równoważną definicję RSHD, dla których historia względnego tensora odkształcenia Cauchy'ego–Greena  $\mathbf{C}_t(t-s)$  ma postać (2.1.12) ze stałym, niezależnym od czasu tensorem  $\mathbf{L}$  (por. [12, 13]).

Na nietrywialne pytanie: czy ruch określony stałym tensorem przestrzennego gradientu prędkości  $\mathbf{L}_1$  jest RSHD? — otrzymujemy odpowiedź twierdzącą. Wynika to z faktu, że następujące równanie różniczkowe z odpowiednim warunkiem początkowym (por. [15]):

$$(2.1.14) \quad \dot{\mathbf{F}}_0(\tau) = \mathbf{L}_1 \mathbf{F}_0(\tau), \quad \mathbf{L}_1 = \text{const}, \quad \mathbf{F}_0(0) = \mathbf{1},$$

ma jednoznaczne rozwiązanie w postaci

$$(2.1.15) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \exp(\tau \mathbf{L}_1).$$

Ruch powyższy jest RSHD [por. (2.1.7)], jeśli tylko  $\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{1}$ . Zależność (2.1.15) ilustruje również, w sposób przejrzysty dlaczego ustalone, jednorodne pola prędkości zawsze generują ruchy należące do klasy RSHD.

**2.2. Klasyfikacja przepływów.** Zgodnie z propozycją NÖLLA [1], wszystkie przepływy typu RSHD, zachodzące w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, można podzielić na trzy następujące klasy:

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} & \text{(I)} \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{0}; \\ & \text{(II)} \quad \mathbf{M}^2 \neq \mathbf{0}, \text{ lecz } \mathbf{M}^3 = \mathbf{0}; \\ & \text{(III)} \quad \mathbf{M}^n \neq \mathbf{0} \text{ dla wszystkich } n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Z uwagi na (2.1.11) identyczne warunki można również zapisać dla tensorów  $\mathbf{L}$  lub  $\mathbf{N}$ .

Klasa (I) obejmuje wszystkie ustalone przepływy wiskozymetryczne obszernie omówione w literaturze zagadnienia (por. [3, 4, 7]). Warto dodać, że w myśl definicji (2.1.9) mamy dla ustalonych przepływów wiskozymetrycznych

$$(2.2.2) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) [\mathbf{1} - s\mathbf{M}] \mathbf{Q}^T(t).$$

Zależność powyższa pozostaje w mocy dla dowolnych przepływów wiskozymetrycznych (niekoniecznie ustalonych), jeśli tensor  $\mathbf{M}$  jest zmienny, tj. zależny od czasu  $t$  i położenia  $x$  zajmowanego przez cząstkę materialną w chwili  $t$  (por. [7]).

Dla klasy (II) mamy

$$(2.2.3) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \left[ \mathbf{1} - s\mathbf{M} + \frac{1}{2} s^2 \mathbf{M}^2 \right] \mathbf{Q}^T(t).$$

Mieści się w niej podklasa tzw. *podwójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych* (por. p. 3.1), które powstają przez bezpośrednie złożenie (dodanie pól prędkości) dwóch przepływów wiskozymetrycznych. Jej przedstawicielami są w szczególności przepływy Poiseuille'a ze skręcaniem i przepływy helikoidalne ze skręcaniem (por. p. 5).

Do klasy (III), dla której

$$(2.2.4) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^n}{n!} \mathbf{M}^n \right] \mathbf{Q}^T(t),$$

należy cała podklasa tzw. *potrójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych* (por. p. 3.2), ustalone czyste ścinanie i ustalone proste rozciąganie oraz liczne inne przepływy w reometrach obrotowych z mimośrodami (por. p. 4).

Wszystkie przepływy typu RSHD można również dzielić na obrotowe (rotacyjne) i bezobrotowe (nierotacyjne). Zwłaszcza te ostatnie zasługują, ze względu na ich specyfikę, na parę słów uwagi. *W mechanice ośrodków ciągłych uważa się za ruchy bezobrotowe takie, dla których przestrzenny gradient prędkości  $\mathbf{L}_1$  jest symetryczny* (z wyłączeniem trywialnego przypadku  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{0}$ ). Wszystkie RSHD opisywane stałym, symetrycznym tensorem  $\mathbf{L}_1$  przyjęto nazywać *przepływami rozciągającymi*, lub prościej *rozciąganiem* (por. [16, 3]). Ponieważ symetryczny tensor  $\mathbf{L}_1$  można zawsze diagonalizować następująco:

$$(2.2.5) \quad [\mathbf{L}_1^*] = [\mathbf{Q}\mathbf{L}_1\mathbf{Q}^T] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

przy czym  $\mathbf{Q}$  zależy od składowych macierzy  $\mathbf{L}_1$ , zaś wartości własne tensora  $\mathbf{L}_1$  są takie same, jak wartości własne obróconego tensora parametrycznego  $\mathbf{L}$  [por. (2.1.13)], łatwo stwierdzić, że *wszystkie bezobrotowe RSHD są równoważne przepływowi rozciągającym i należą do klasy (III)*.

**2.3. Reprezentacje równań konstytutywnych i funkcje materiałowe.** Równania konstytutywne nieściśliwej cieczy prostej (2.1.5), po uwzględnieniu zasady materialnej obiektywności — wyrażającej niezależność funkcjonału konstytutywnego od ruchu «obserwatora» w przestrzeni odniesienia, dają się zapisać w postaci (por. [3])

$$(2.3.1) \quad \mathbf{T}_E(t) = \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}[\mathbf{C}_i(t-s)],$$

przy czym definicję tensora  $\mathbf{C}_i(t-s)$  podano w (2.1.10). Funkcjonał konstytutywny  $\int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\cdot)$  jest funkcjonałem izotropowym, tzn. że (por. [3])

$$(2.3.2) \quad \mathbf{Q} \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{C}_i(t-s)) \mathbf{Q}^T = \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_i(t-s)\mathbf{Q}^T),$$

dla wszystkich stałych tensorów ortogonalnych  $\mathbf{Q}$  i dla każdej historii  $\mathbf{C}_i(t-s)$ .

Przy rozważaniach ogólnych dotyczących przepływów typu RSHD nie są potrzebne żadne dodatkowe ograniczenia ani na funkcjonał konstytutywny, ani też na historię odkształcenia. W przypadkach szczególnych często bazuje się na różnych aproksymacjach funkcjonału konstytutywnego w oparciu o zasadę zanikającej pamięci (por. [17, 3, 8]). W punkcie 4, omawiając własności dynamiczne cieczy, wykorzystamy całkową reprezentację funkcjonału konstytutywnego zaproponowaną przez GREENA i RIVLINA [18] w postaci (por. także [3, 17])

$$(2.3.3) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{T} + p\mathbf{1} = \int_{-\infty}^t m_1(t-\tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \{ m_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \mathbf{G}(\tau_1) \mathbf{G}(\tau_2) + m_3(t-\tau_1, t-\tau_2) [\text{tr} \mathbf{G}(\tau_1)] \mathbf{G}(\tau_2) \} \times d\tau_1 d\tau_2 + \dots,$$

gdzie  $m_i(\cdot)$  są odpowiednimi funkcjami materiałowymi, zaś

$$(2.3.4) \quad \mathbf{G}(\tau) = \mathbf{C}_i(\tau) - \mathbf{1}.$$

Pominięcie wszystkich całek wielokrotnych z wyjątkiem pierwszej z prawej strony (2.3.3) jest równoznaczne z założeniem, że wyrazy te dążą do zera szybciej niż odpowiednia norma w wektorowej przestrzeni historii odkształcenia; jest to przypadek tzw. skończonej liniowej lepkosprężystości (por. [19]).

Dla dowolnego RSHD, podstawiając (2.1.12) do (2.3.1), otrzymamy równania konstytutywne w postaci następującej:

$$(2.3.5) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\varkappa, \mathbf{N}) = \mathbf{f}(\varkappa, \mathbf{L}/\varkappa) = \mathbf{g}(\mathbf{L}),$$

gdzie  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{g}$  są izotropowymi funkcjami argumentów tensorowych.

W cytowanej już pracy [12], WANG dowiódł, że historia prawego, względnego tensora odkształcenia Cauchy'ego–Greena  $\mathbf{C}_t(t-s)$ , dla wszystkich RSHD, określona jest jednoznacznie przez pierwsze trzy kinematyczne tensory RIVLINA–ERICKSENA [20] zdefiniowane następująco:

$$(2.3.6) \quad \mathbf{A}_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{C}_t(\tau) \Big|_{\tau=t}, \quad \mathbf{A}_1(t) = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T,$$

$$\mathbf{A}_{n+1}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_n.$$

WANG wyróżnił ponadto trzy następujące przypadki RSHD:

(1) gdy  $\mathbf{A}_1$  ma trzy różne wartości własne,  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$  określają  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie;  
 (2) gdy  $\mathbf{A}_1$  ma dwie wartości własne równe, lecz różne od trzeciej; a)  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$  określają  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie, jeśli  $\mathbf{A}_2$  ma w tej samej bazie co  $\mathbf{A}_1$  postać diagonalną ze składowymi równymi odpowiednio kwadratowi wartości własnych  $\mathbf{A}_1$ ; b) w przypadku przeciwnym  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  i  $\mathbf{A}_3$  określają  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie;

(3) gdy wszystkie wartości własne  $\mathbf{A}_1$  są równe,  $\mathbf{A}_1$  określa  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie. Ostatni przypadek staje się trywialny dla cieczy nieściśliwych, dla których  $\text{tr} \mathbf{A}_1 = 0$ ; wówczas przy jednakowych wartościach własnych mamy  $\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{0}$ .

Reasumując można stwierdzić, że dla większości RSHD [z wyjątkiem przypadku wymienionego w (2)] prawdziwe jest następujące równanie konstytutywne (por. [20]):

$$(2.3.7) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{h}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_3 \mathbf{A}_2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 +$$

$$+ \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) +$$

$$+ \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2),$$

gdzie  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) są funkcjami dziewięciu niezmienników:

$$(2.3.8) \quad \text{tr} \mathbf{A}_1^2, \text{tr} \mathbf{A}_1^3, \text{tr} \mathbf{A}_2, \text{tr} \mathbf{A}_2^2, \text{tr} \mathbf{A}_2^3,$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2).$$

Jest rzeczą oczywistą, że funkcje  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) nie są całkowicie niezależne; wynika to z faktu, że tensor ekstra-naprężenia  $\mathbf{T}_E$  posiada co najwyżej sześć składowych, związanych przy tym warunkiem typu (2.1.6). Wystarczy zatem zdefiniować odpowiednio pięć ogólnych funkcji materiałowych opisujących całkowicie własności cieczy lepkosprężystych w dowolnym przepływie typu RSHD. Można postępować np. w sposób podany w pracy [14].

Dla ustalonego i jednorodnego pola prędkości, dla którego

$$(2.3.9) \quad [\mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} a_1 & a & b \\ d & a_2 & c \\ e & f & a_3 \end{bmatrix}, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

jest stałym tensorem<sup>2)</sup>, definiujemy następujące funkcje:

$$(2.3.10) \quad \begin{aligned} n_1 &= T_E^{\langle 11 \rangle} - T_E^{\langle 33 \rangle}, & n_2 &= T_E^{\langle 22 \rangle} - T_E^{\langle 33 \rangle}, \\ s_1 &= T_E^{\langle 12 \rangle}, & s_2 &= T_E^{\langle 13 \rangle}, & s_3 &= T_E^{\langle 23 \rangle}, \end{aligned}$$

których argumentami są wszystkie dziewięć składowych macierzy (2.3.9), zaś  $T_E^{\langle ij \rangle}$  oznaczają fizyczne składowe tensora  $\mathbf{T}_E$ . Mamy również

$$(2.3.11) \quad T_E^{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{3}(2n_1 - n_2), \quad T_E^{\langle 22 \rangle} = \frac{1}{3}(2n_2 - n_1), \quad T_E^{\langle 33 \rangle} = -\frac{1}{3}(n_1 + n_2).$$

Funkcje materiałowe  $n_i$  i  $s_i$  opisują zarówno ustalone przepływy wiskozymetryczne, ustalone przepływy rozciągające, jak i inne przepływy typu RSHD omówione szczegółowiej w punktach 3, 4 i 5. Ich postać podlega ograniczeniom wynikającym z własności izotropii funkcji konstytutywnych (2.3.5). Mamy np.

$$(2.3.12) \quad \begin{aligned} n_i(a_1, a_2, a_3, a, b, c, d, e, f) &= n_i(a_1, a_2, a_3, -a, -b, c, -d, -e, f) = \\ &= n_i(a_1, a_2, a_3, a, -b, -c, d, -e, -f) = n_i(a_1, a_2, a_3, -a, b, -c, -d, e, -f); \end{aligned}$$

$$(2.3.13) \quad \begin{aligned} s_i(a_3, a_2, a_1, f, e, d, c, b, a) &= s_j(a_1, a_2, a_3, a, b, c, d, e, f) \\ &\text{dla } i = 1, j = 3 \quad \text{lub} \quad i = 2, j = 2 \quad \text{lub} \quad i = 3, j = 1. \end{aligned}$$

Warto nadmienić, że dla wszystkich bezobrotowych RSHD, symetria tensora  $\mathbf{L}_1$  prowadzi do zależności:  $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{A}_2 = 4\mathbf{L}_1^2$ ,  $\mathbf{A}_3 = 8\mathbf{L}_1^3$ , a równania konstytutywne przyjmują postać

$$(2.3.14) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1) = \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_1^2,$$

gdzie funkcje materiałowe  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) zależą tylko od dwóch następujących niezmienników:  $\text{tr } \mathbf{A}_1^2$ ,  $\text{tr } \mathbf{A}_1^3$ . Z równania (2.3.14) wynika, że w przepływach typu bezobrotowych RSHD, własności każdej dowolnej nieściśliwej cieczy prostej są takie same jak własności cieczy Reinera–Rivlina (por. [3]) opisywanej również zależnością (2.3.14).

Wreszcie postępując w sposób podobny do zastosowanego przez COLEMANA [16], można równanie konstytutywne (2.3.14) przedstawić w innej postaci jako jedną funkcję od trzech wartości własnych tensora  $\mathbf{A}_1$ .

### 3. Przepływy złożone z przepływów wiskozymetrycznych

**3.1. Podwójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne.** Niebanalne zagadnienie określenia teoretycznych warunków, przy których nałożenie prostych wiskozymetrycznych przepływów prowadzi do bardziej złożonych RSHD, wiąże się zarówno z analizą przepływów występujących w praktyce, jak i z potrzebą konstruowania nowych reometrów (por. p. 4). Pewne przykłady RSHD powstałych z nałożenia przepływów wiskozymetrycznych omówiono w pracach NOLLA [11], OLDROYDA [21] i PIPKINA [22]; bardziej systematyczną analizą

<sup>2)</sup> Postać (2.3.9) jest również najogólniejsza dla obróconego tensora parametrycznego  $\mathbf{L}$  (por. p. 2.1). Jeśli  $\mathbf{L}$  jest stałym tensorem, to składowe  $\mathbf{L}_1$  nie muszą być stałe.

tych zagadnień zajmował się HUIŁGOL [13, 14]. Pokazał on m. in., że oprócz dobrze znanego wiskozymetrycznego przepływu helikoidalnego [2], powstałego z nałożenia wiskozymetrycznych przepływów Couette'a i Poiseuille'a (por. [3, 7]), istnieją inne przepływy typu RSHD otrzymywane z prostszych przepływów wiskozymetrycznych, a w szczególności tzw. podwójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne [13].

Zgodnie z definicją, *podwójnie nałożony przepływ wiskozymetryczny jest przepływem typu RSHD klasy (II)* (por. p. 2.2), *dla którego obrócony tensor parametryczny  $\mathbf{L}$  jest taki, że  $\mathbf{L}^2 \neq \mathbf{0}$  lecz  $\mathbf{L}^3 = \mathbf{0}$  oraz  $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}''$ , gdzie  $\mathbf{L}'$  i  $\mathbf{L}''$  są tensorami definiującymi dwa przepływy wiskozymetryczne.*

Z twierdzeń wyprowadzonych w [13] wynika, że następujące pole prędkości w ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych:

$$(3.1.1) \quad v^1 = 0, \quad v^2 = v(x^1) - cx^2 + ex^3, \quad v^3 = w(x^1) + fx^2 + cx^3,$$

gdzie  $c, e, f$  są stałymi takimi, że  $c^2 + ef = 0$ , zaś  $v(x^1)$  i  $w(x^1)$  dowolnymi gładkimi funkcjami  $x^1$ , daje podwójnie nałożony przepływ wiskozymetryczny, jeśli odpowiednie składowe tensora metrycznego nie zmieniają się wzdłuż toru każdej cząstki, a funkcja  $v(x^1)$  nie jest stałą lub zerem.

Także pole prędkości

$$(3.1.2) \quad v^1 = ax^2 + bx^3, \quad v^2 = -cx^2 + ex^3, \quad v^3 = fx^2 + cx^3,$$

gdzie  $a, \dots, f$  są stałymi takimi, że  $c^2 + ef = 0$ , prowadzi do podwójnie nałożonego przepływu wiskozymetrycznego.

W walcowym układzie współrzędnych  $r, \theta, z$  przykładem (3.1.1) jest pole

$$(3.1.3) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = \omega(r) + cz, \quad v^z = u(r),$$

opisujące przepływ helikoidalny ze skręcaniem (por. p. 5.2), którego z kolei szczególnym przypadkiem jest przepływ Poiseuille'a ze skręcaniem (por. 5.1) dyskutowany przez OLDROYDA [21].

Ponieważ dla większości przepływów omawianego typu macierz tensora  $\mathbf{A}_1$  (por. 2.3) ma postać<sup>3)</sup>:

$$(3.1.4) \quad [\mathbf{A}_1] = k \begin{bmatrix} 0 & l & m \\ l & 0 & n \\ m & n & 0 \end{bmatrix}, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

z twierdzeń o reprezentacji równań konstytutywnych w punkcie 2.3 wynika, że  $\mathbf{A}_1$  ma trzy różne wartości własne [przypadek (1)], jeśli nie zachodzi zależność

$$(3.1.5) \quad l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3},$$

spełniona np. dla przepływu (3.1.3) tylko wtedy, gdy  $r^2 (d\omega/dr)^2 = (du/dr)^2 = c^2 r^2$ . Jeśli spełniona jest zależność (3.1.5), można pokazać (por. [14]), że  $\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_1^2$  i mamy do czynienia z przypadkiem (2b).

<sup>3)</sup>  $\mathbf{A}_1$  ma postać (3.1.4) również dla niektórych potrójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych (por. 3.2) oraz innych RSHD klasy (III) (por. p.4).



HUILGOL [14] dowiódł m. in., że dla trzech różnych wartości własnych tensora  $\mathbf{A}_1$ , równanie konstytutywne (2.3.7) redukuje się do postaci

$$(3.1.6) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{h}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta_3 \mathbf{A}_2 + \beta_4 \mathbf{A}_2^2 + \\ + \beta_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2),$$

gdzie  $\beta_i (i = 1, \dots, 6)$  są funkcjami niezmienników wymienionych w (2.3.8). Jeśli warunek (3.1.5) jest spełniony, mamy wówczas

$$(3.1.7) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \gamma_1 \mathbf{A}_1 + \gamma_2 \mathbf{A}_1^2 + \gamma_3 \mathbf{A}_2 + \gamma_4 \mathbf{A}_2^2 + \gamma_5 \mathbf{A}_3 + \gamma_6 \mathbf{A}_3^2,$$

gdzie  $\gamma_i (i = 1, \dots, 6)$  są funkcjami niezmienników (2.3.8).

Dla takich podwójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych, dla których w ortonormalnej bazie [por. (3.1.4)]

$$(3.1.8) \quad [\mathbf{L}] = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 \\ m & n & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{L}^2] = k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ln & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^3 = \mathbf{0},$$

zamiast ogólnych funkcji (2.3.10), wygodnie jest wprowadzić następujące funkcje materiałowe:

$$(3.1.9) \quad \Sigma_1 = T_E^{(22)} - T_E^{(11)}, \quad \Sigma_2 = T_E^{(33)} - T_E^{(11)}, \\ \tau_1 = T_E^{(12)}, \quad \tau_2 = T_E^{(13)}, \quad \tau_3 = T_E^{(23)},$$

zależne tylko od argumentów  $k, l, m, n$ . Możliwość ich doświadczalnego określenia będzie omówiona w punkcie 5.

Na zakończenie tego punktu warto podkreślić, że nie zawsze złożenie dwóch przepływów wiskozymetrycznych prowadzi do przepływu wiskozymetrycznego lub podwójnie nałożonego przepływu wiskozymetrycznego, tj. typu RSHD klasy (II). Dobrą ilustracją tego faktu jest, powstały z nałożenia dwóch prostych przepływów ścinających, przypadek ustalonego czystego ścinania należący do klasy (III) (por. [23, 14]).

**3.2. Potrójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne.** Uogólnieniem podwójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych są tzw. potrójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne, tj. złożone z trzech przepływów wiskozymetrycznych. Ich definicja jest podobna do definicji podanej w punkcie poprzednim, przy czym  $\mathbf{L}$  musi być takie, że  $\mathbf{L}^n \neq \mathbf{0}$  dla  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Na podstawie twierdzenia podanego przez HUILGOLA [13] wynika, że następujące ustalone pole prędkości w ortogonalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych  $x^k$ :

$$(3.2.1) \quad v^1 = ax^2 + bx^3, \quad v^2 = dx^1 + cx^3, \quad v^3 = ex^1 + fx^2,$$

gdzie  $a, \dots, f$  są stałymi, jest potrójnie nałożonym przepływem wiskozymetrycznym należącym do klasy (III) RSHD, dla którego  $\mathbf{L}^n \neq \mathbf{0}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , jeśli odpowiednie składowe tensora metrycznego nie zmieniają się wzdłuż toru każdej cząstki. Gdy tensor  $\mathbf{A}_1$  posiada trzy różne wartości własne, reprezentacja równania konstytutywnego zapisuje się również w postaci (3.1.6), przy czym funkcje materiałowe  $\beta_i (i = 1, \dots, 6)$  przybierają wartości z reguły inne niż w przypadku podwójnie nałożonego przepływu wiskozymetrycznego.

Przepływ (3.2.1) obejmuje jako przypadki szczególne przepływy w reometrze Maxwella i innych przyrządach (por. p. 4) oraz ustalone czyste ścinanie (przepływ bezobrotowy przy  $a = d, b = e, c = f$ ), dla którego równania konstytutywne przyjmują postać (2.3.14).

#### 4. Szczególne przypadki przepływów klasy (III). Reometry

**4.1. Ustalone czyste ścinanie i proste rozciąganie.** Typowymi przedstawicielami bezobrotowych RSHD klasy (III) są: ustalone czyste ścinanie, dla którego w kartezjańskim układzie współrzędnych (por. [21])

$$(4.1.1) \quad v^1 = ky, \quad v^2 = kx, \quad v^3 = 0$$

oraz ustalone proste rozciąganie, dla którego w układzie współrzędnych walcowych (por. [9])

$$(4.1.2) \quad v^r = -\frac{1}{2}qr, \quad v^\theta = 0, \quad v^z = qz.$$

Zwłaszcza ostatni przepływ posiada duże praktyczne znaczenie ze względu na przyrządy służące do pomiaru tzw. lepkości podłużnej oraz przybliżoną realizację w procesach przedzenia, wyciągania, itp. włókien sztucznych (por. [4, 23]).

Tensory charakteryzujące przepływ (4.1.1) mogą być sprowadzone do postaci diagonalnej za pośrednictwem przekształcenia

$$(4.1.3) \quad \mathbf{T}_E^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}_E\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{A}_I^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}_I\mathbf{Q}^T,$$

w którym  $\mathbf{Q}$  oznacza ortogonalny tensor obrotu o kąt równy  $\pi/4$ .

Na podstawie równania konstytutywnego (2.3.14) otrzymamy

$$(4.1.4) \quad [\mathbf{T}_E] = \beta_1(8k^2, 0)2k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2(8k^2, 0)4k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dla czystego ścinania i

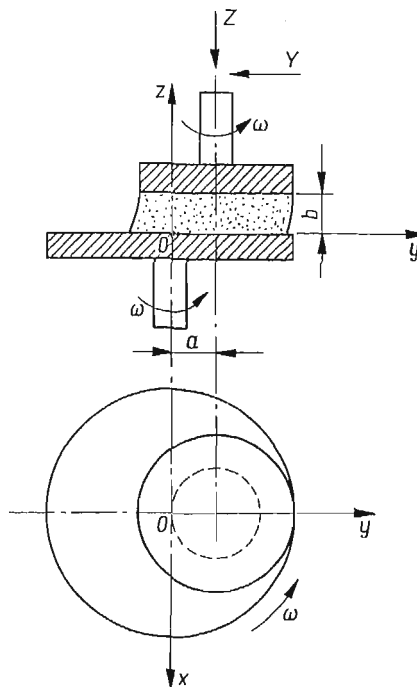
$$(4.1.5) \quad [\mathbf{T}_E] = \beta_1(6q^2, 6q^3)2q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \beta_2(6q^2, 6q^3)4q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

dla prostego rozciągania. Formalne podobieństwa między (4.1.4), (4.1.5) oraz prostym rozciąganiem posłużyły autorowi [23] do zaproponowania przybliżonych wyrażeń na lepkość podłużną.

**4.2. Ortogonalny reometr Maxwella.** W roku 1965 MAXWELL i CHARTOFF [24] zaproponowali użycie reometru, składającego się z dwóch płaskich krążków odległych od siebie o  $b$  i obracających się ze stałą jednakową prędkością kątową wokół własnych osi przesuniętych na odległość  $a$ , do badania własności reologicznych cieczy lepkością sprężystych (rys. 1). Pomijając techniczny opis urządzenia różniące się nieistotnie w poszczególnych wersjach

nałeży zaznaczyć, że umożliwia ono dość dokładny pomiar sił działających w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach (np. na górny krążek).

W ostatnich latach poświęcono liczne prace teoretycznej analizie przepływu i badaniom doświadczalnym własności różnych roztworów i stopionych polimerów (por. [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]). Jest niewątpliwą zasługą HUILGOLA [13, 14, 27] stwierdzenie, że



Rys. 1. Schemat ortogonalnego reometru Maxwella

przepływ w reometrze Maxwella należy do przepływów typu RSHD klasy (III) oraz wyprowadzenie odpowiednich reprezentacji dla równań konstytutywnych w przypadku nieściślej cieczy prostej.

Równania ruchu (2.1.1) cieczy w ortogonalnym reometrze Maxwella wynikają z rozważenia względnego ruchu cząstki w układzie współrzędnych obracających się razem z odpowiednim krążkiem. Np. cząstka cieczy znajdująca się bezpośrednio nad początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, y, z$  (por. rys. 1), zatoczy okrąg koła o promieniu  $az/b$  w płaszczyźnie równoległej do powierzchni krążków. Dodając ruch względny do ruchu unoszenia, otrzymamy

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} \xi &= x \cos \omega(t - \tau) + (y - \psi z) \sin \omega(t - \tau), \\ \eta &= -x \sin \omega(t - \tau) + (y - \psi z) \cos \omega(t - \tau) + \psi z, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

gdzie  $\psi = a/b$ , a w myśl (2.1.1),  $x, y, z$  oznaczają współrzędne cząstki w chwili aktualnej  $t$ , zaś  $\xi, \eta, \zeta$  — współrzędne w czasie  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ). Pole prędkości dla ruchu określonego równaniami (4.2.1) jest następujące:

$$(4.2.2) \quad v^1 = -\omega y + \omega \psi z, \quad v^2 = \omega x, \quad v^3 = 0.$$

Warto zauważyć, że chociaż rozważany przepływ charakteryzuje się jednorodnym i ustalonym polem prędkości (4.2.2), ruch cząstki (4.2.1), wyrażony względem położenia w chwili  $t$ , zmienia się okresowo z czasem  $\tau$ . Fakt ten może być wykorzystany do wyznaczenia dynamicznych własności reologicznych cieczy lepkosprężystej (por. [26, 28, 30, 31]).

Wobec małości stosowanych praktycznie parametrów  $\psi$  (por. [24, 31]), można skorzystać z równań konstytutywnych (2.3.3) ograniczając się do wyrazów liniowych względem<sup>4)</sup>  $\psi$ . Na podstawie (2.3.4) i (4.2.1) otrzymamy

$$(4.2.3) \quad G_{13} = -\psi \sin \omega(t - \tau), \quad G_{23} = -\psi(1 - \cos \omega(t - \tau)), \\ G_{12} = G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{33} = O(\psi^2).$$

Wprowadzając pojęcie lepkości zespolonej (por. [5])

$$(4.2.4) \quad \eta^* = \eta' - i \frac{G'}{\omega} = \frac{i}{\omega} \int_0^{\infty} m_1(\sigma)(1 - e^{-i\omega\sigma}) d\sigma,$$

gdzie  $\eta'$  oznacza lepkość dynamiczną, zaś  $G'$  — moduł dynamiczny (zachowawczy), możemy równanie konstytutywne napisać w postaci zespolonej

$$(4.2.5) \quad \mathbf{T}_E = \text{Re}(\eta^* \mathbf{A}_1^*),$$

przy czym

$$(4.2.6) \quad G_{13}^* = i\psi(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \quad G_{23}^* = -\psi(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ A_{13}^{(1)*} = \psi\omega, \quad A_{23}^{(1)*} = i\psi\omega.$$

Jeśli naprężenia ścinające  $T^{(13)}$  i  $T^{(23)}$  działają na powierzchni koła o promieniu  $R$ , to odpowiednie siły w kierunku osi  $x$  i  $y$  (por. rys.) są następujące:

$$(4.2.7) \quad X = \pi R^2 \eta' \psi \omega, \quad Y = \pi R^2 G' \psi,$$

a po uwzględnieniu efektów inercji według poprawek ABBOTTA i WALTERSA [30]:

$$(4.2.8) \quad X - iY = \pi R^2 \eta^* \psi \omega \left( 1 + \frac{\alpha^2 b^2}{12} - \frac{\alpha^4 b^4}{720} + \dots \right),$$

gdzie  $\alpha^2 = -i\omega\rho/\eta^*$ , zaś  $\rho$  oznacza gęstość cieczy.

Zależności (4.2.7) są takie same jak w innych pracach [26, 28, 31]; pozwalają one, na podstawie pomiarów doświadczalnych  $X = X(\omega)$  oraz  $Y = Y(\omega)$ , określić  $\eta' = \eta'(\omega)$  oraz  $G' = G'(\omega)$ .

Porównanie charakterystyk  $\eta'$  i  $G'$  uzyskanych z pomiarów w reometrze Maxwella na podstawie wzorów (4.2.7) z charakterystykami uzyskanymi innymi metodami (np. z reogoniometru Weissenberga) wykazało dobrą zgodność wyników doświadczalnych (por. [31]). Chociaż niektórzy autorzy (por. [26, 31]) w oparciu o empiryczny model całkowy typu skończonej liniowej lepkosprężystości (por. p. 2.3) z odpowiednio dobraną kombi-

<sup>4)</sup> Jest to przypadek infinytezymalnej liniowej lepkosprężystości [19]. Ograniczenie się wyłącznie do pierwszej całki w (2.3.3) nie jest związane z małością samej deformacji lecz z własnością historii odkształcenia określoną odpowiednią normą (por. p. 2.3).

nacją tensorów historii odkształcenia  $C_i$  i  $C_i^{-1}$ , usiłując uzyskać pewne informacje na temat naprężeń normalnych (w szczególności o stosunku odpowiednich różnic naprężeń normalnych, [31]), w niniejszym przeglądzie przedstawimy odmienny sposób podejścia bazujący na modelu nieściśliwej cieczy prostej i teorii RSHD klasy (III).

Na podstawie (4.2.2) i (2.3.6) obliczamy składowe tensorów kinematycznych  $A_1$  i  $A_2$ . Ponieważ tensor  $A_1$  ma trzy różne wartości własne, możemy skorzystać z uproszczonej wersji (3.1.6) równań konstytutywnych (2.3.7). Pamiętając, że  $\text{tr}T_E = 0$ , dochodzimy do zależności:

$$(4.2.9) \quad \begin{aligned} T_E^{<11>} &= \frac{1}{3}\beta_2\omega^2\psi^2 - \frac{2}{3}\beta_3\omega^2\psi^2 - \frac{1}{3}\beta_4(2\omega^4\psi^2 + 4\omega^4\psi^4) - \frac{1}{3}\beta_6(2\omega^6\psi^4 + 8\omega^6\psi^6), \\ T_E^{<22>} &= -\frac{2}{3}\beta_2\omega^2\psi^2 - \frac{2}{3}\beta_3\omega^2\psi^2 + \frac{1}{3}\beta_4(\omega^4\psi^2 - 4\omega^4\psi^4) - \frac{1}{3}\beta_6(2\omega^6\psi^4 + 8\omega^6\psi^6), \\ T_E^{<33>} &= \frac{1}{3}\beta_2\omega^2\psi^2 + \frac{4}{3}\beta_3\omega^2\psi^2 + \frac{1}{3}\beta_4(\omega^4\psi^2 + 8\omega^4\psi^4) + \frac{1}{3}\beta_6(4\omega^6\psi^4 + 16\omega^6\psi^6), \\ T_E^{<12>} &= -\beta_5\omega^3\psi^2, \\ T_E^{<13>} &= (\beta_1 + 2\beta_5\omega^2\psi^2)\omega\psi, \\ T_E^{<23>} &= -(\beta_3 + 2\beta_4\omega^2\psi^2 + 2\beta_6\omega^4\psi^4)\omega^2\psi, \end{aligned}$$

gdzie funkcje  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), zależne od niezmienników (2.3.8), są w gruncie rzeczy analitycznymi funkcjami dwóch argumentów:  $\omega^2\psi^2$ ,  $\omega^4\psi^2$ .

Analiza zależności (4.2.9), łącznie z siłami  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  i momentem obrotowym — wyznaczanymi bezpośrednio z przyrządu, wykazuje niemożliwość określenia funkcji  $\beta_i$  charakteryzujących własności cieczy w przypadku ogólnym. Ponieważ pomiar siły osiowej  $Z$ , przy jednoczesnym założeniu, że przy niskich prędkościach obrotowych i małych siłach inercji ciśnienie  $p$  równe jest ciśnieniu atmosferycznemu (por. [31]), pozwala określić  $T^{<33>}$  oraz  $T_E^{<33>} = T^{<33>} + p$ , na podstawie (2.3.11)<sub>3</sub> otrzymujemy tylko sumę  $n_1 + n_2$  odpowiednich różnic naprężeń normalnych zdefiniowanych wzorem (2.3.10)<sup>5</sup>.

Bardziej efektywną analizę można przeprowadzić dla przypadku małych odkształceń charakteryzujących się małym parametrem  $\psi$  i umiarkowanych prędkości obrotowych  $\omega$ .

Pomijając w (4.2.9) człony rzędu  $O(\psi^4)$ , otrzymamy

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} n_1 &= -(2\beta_3 + \beta_4\omega^2)\omega^2\psi^2, & n_2 &= -(\beta_2 + 2\beta_3)\omega^2\psi^2, \\ s_1 &= -\beta_5\omega^3\psi^2, & s_2 &= (\beta_1 + 2\beta_5\omega^2\psi^2)\omega\psi, \\ s_3 &= -(\beta_3 + 2\beta_4\omega^2\psi^2)\omega^2\psi, \end{aligned}$$

przy czym  $\beta_i$  są funkcjami  $\omega^2\psi^2$  i  $\omega^4\psi^2$ , uwzględniającymi pominięcie członów  $O(\psi^4)$ . W tym przypadku dokładny pomiar siły  $X$  (określającej  $s_3$ ) dla różnych wartości  $\omega$  pozwala, przynajmniej teoretycznie, dobrać odpowiednią funkcję  $\beta_3$  i stałą  $\beta_4$  (!). Wielkości te pod-

<sup>5</sup>) Fakt ten nie jest zaskakujący, jeśli wziąć pod uwagę, że pomiary siły normalnej w wiskozymetrach typów stożek-krażek, krażek-krażek itp., pozwalają również wyznaczyć tylko pewne kombinacje funkcji naprężeń normalnych (por. [4,6,7]).

stawione do (4.2.10)<sub>1</sub> określają przybliżony charakter funkcji  $n_1$ , a suma  $n_1 + n_2$  wyznaczona jest jak poprzednio przez pomiar siły osiowej  $Z$ .

Dalszy krok naprzód można uczynić dla odpowiednio małych prędkości  $\omega$ , pomijając w (4.2.10) człony rzędu  $O(\omega^4)$ ; jest to równoważne, w pewnym sensie, modelowi cieczy stopnia trzeciego (por. [3]), dla którego wszystkie  $\beta_i$  z wyjątkiem  $\beta_1$  są stałymi i dają się wyznaczyć z pomiarów wiskozymetrycznych. Mamy wówczas

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} n_1 &= -2\beta_3\omega^2\psi^2 = \sigma_2(\omega\psi) - \sigma_1(\omega\psi), \\ n_2 &= -(\beta_2 + 2\beta_3)\omega^2\psi^2 = -\sigma_1(\omega\psi), \\ s_1 &= -\beta_5\omega^3\psi^2, \quad s_2 = (\beta_1 + 2\beta_5\omega^2\psi^2)\omega\psi = \tau(\omega\psi), \\ s_3 &= -\beta_3\omega^2\psi, \end{aligned}$$

gdzie  $\tau = T^{<13>}$ ,  $\sigma_1 = T^{<33>} - T^{<22>}$ ,  $\sigma_2 = T^{<11>} - T^{<22>}$  są dobrze znanymi funkcjami wiskozymetrycznymi (por. [1, 3, 7]).

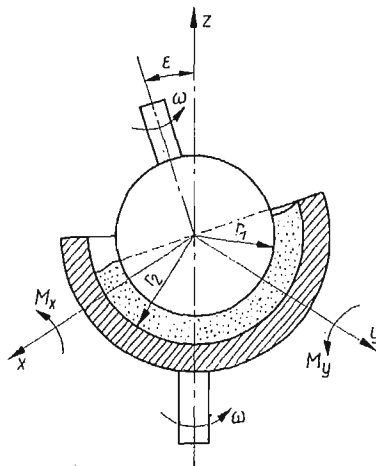
Jeśli funkcje  $\tau$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są znane dla badanej cieczy z innych pomiarów, to na podstawie (4.2.10) i (4.2.11) można skorzystać z zależności przybliżonych

$$(4.2.12) \quad T_E^{<23>} = s_3 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) - 2\beta_4\omega^4\psi^3,$$

$$n_1 = \sigma_2 - \sigma_1 + \beta_4\omega^4\psi^2, \quad n_2 = -\sigma_1,$$

przy czym  $\beta_4$  należy wyznaczyć z pomiaru siły  $Y$  ( $Y = \pi R^2 s_3$ ).

Na zakończenie rozważań nad przepływem w reometrze Maxwella, należy wspomnieć o przedstawionej w pracy [14] możliwości badania związków funkcji  $n_i$  i  $s_i$  z funkcjami wiskozymetrycznymi, traktując przepływ w reometrze Maxwella jako *przepływ bliski wiskozymetrycznemu* w sensie definicji PIPKINA [32].



Rys. 2. Schemat reometru balansowego Kepesa

**4.3. Reometr balansowy Kepesa.** W roku 1968 KEPES [33] zaproponował użycie reometru składającego się z kuli (lub półkuli) i czaszy kulistej o promieniach równych odpowiednio  $r_1$  i  $r_2$ , obracających się ze stałą jednakową prędkością kątową  $\omega$  wokół osi nachylonych w płaszczyźnie  $xz$  o mały kąt  $\varepsilon$  (rys. 2). Odpowiednie urządzenie balansowe z ciężarkami

umożliwia pomiar momentu obrotowego na wewnętrznej kuli, a w szczególności jego składowych w kierunku osi  $x$  i  $y$ . Reometr tego typu nazywa się reometrem balansowym, jego produkcję podjęła firma Contraves A. G. w Szwajcarii.

Ostatnio ukazało się kilka prac poświęconych analizie teoretycznej reometru oraz badaniom własności roztworów i stopionych polimerów (por. [28, 31, 34, 35]). Najbardziej wyczerpującą analizę przepływu w reometrze balansowym, pod kątem możliwości wyznaczenia charakterystyk dynamicznych cieczy i wpływu sił inercji, przeprowadził WALTERS [35]. Przytoczymy obecnie najważniejsze wyniki tej pracy podkreślając, że przepływ w reometrze balansowym należy do przepływów typu RSHD klasy (III).

Równania ruchu cieczy (2.1.1) przybierają w układzie współrzędnych kulistych  $r, \theta, \varphi$  następującą postać zespoloną:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} r' &= r - \frac{\varepsilon}{i} U(r, \theta) e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ \theta' &= \theta - \frac{\varepsilon}{ir} V(r, \theta) e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ \varphi' &= \varphi - \omega(t-\tau) - \frac{\varepsilon}{ir \sin \theta} W(r, \theta) e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \end{aligned}$$

gdzie primami oznaczono współrzędne w chwili  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ), zaś funkcje  $U, V, W$  zmiennych  $r, \theta$  wyznacza się metodą kolejnych przybliżeń. Dla przybliżenia zerowego rzędu, tj. dla  $\alpha = 0$ , gdzie  $\alpha^2 = -i\omega\rho/\eta^*$  charakteryzuje siły inercji, mamy

$$(4.3.2) \quad U_0 = 0, \quad V_0 = i\lambda \left( r - \frac{r_1^3}{r^2} \right), \quad W_0 = -\lambda \left( r - \frac{r_1^3}{r^2} \right), \quad \lambda = \frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Ograniczenie się do wyrazów liniowych względem  $\varepsilon$  w równaniach konstytutywnych (2.3.3) prowadzi do następujących wyrażeń na momenty:

$$(4.3.3) \quad M_x = 8\pi\lambda r_1^3 \eta' \varepsilon \omega, \quad M_y = 8\pi\lambda r_1^3 G' \varepsilon, \quad M_z = 0,$$

jeśli odpowiednie naprężenia rozłożone są na całej powierzchni kuli wewnętrznej. Uwzględnienie sił inercji poprzez przybliżenia wyższych rzędów względem  $\alpha$  (tj. członów rzędu  $O(\alpha^4)$ ) daje

$$(4.3.4) \quad M_x - iM_y = 8\pi\lambda r_1^3 \eta^* \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{d^4 \alpha^4}{1200} \right),$$

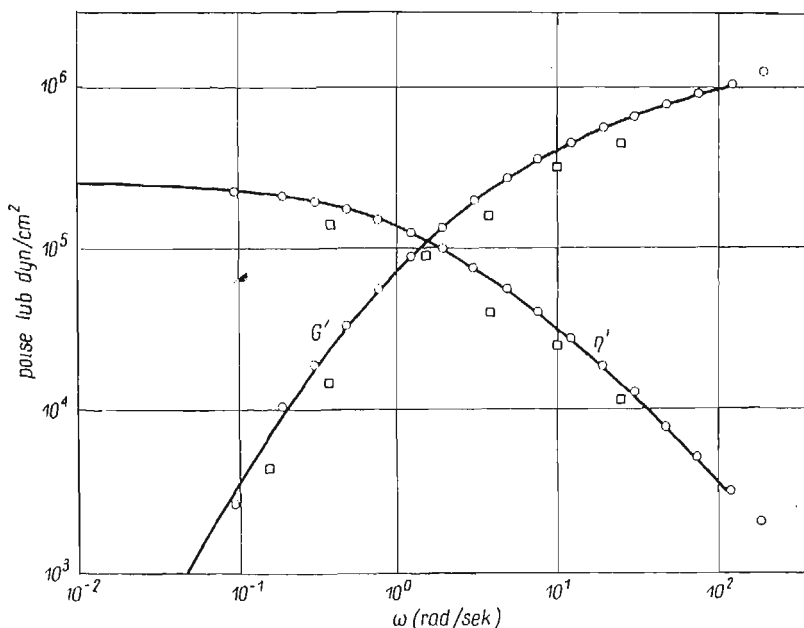
przy czym  $d = r_2 - r_1$  przyjęto jako wielkość małą, praktycznie rzędu 0,1 cm.

Zależności (4.3.3) pozwalają, na podstawie pomiarów doświadczalnych  $M_x(\omega)$  oraz  $M_y(\omega)$ , określić lepkość dynamiczną  $\eta'(\omega)$  oraz moduł dynamiczny  $G'(\omega)$ .

Porównanie charakterystyk  $\eta'$  i  $G'$  uzyskanych w reometrze balansowym z charakterystykami uzyskanymi na podstawie innych metod pomiarowych, wykazało dość dobrą zgodność wyników doświadczalnych (por. [31]). Zgodność ta była nieco gorsza niż w przypadku reometru Maxwella, co mogło niewątpliwie wiązać się z trudnościami dokładnego

ustawienia przyrządu i właściwego «wyważenia» obciążeń. Na rys. 3 przedstawiono dla porównania charakterystyki  $\eta'$  i  $G'$  dla poli-dimetylsiloksanu zestawione przez MACOSKO [31] dla reometru Maxwella, reogoniometru Weissenberga i reometru balansowego Kepesa.

Chociaż istniejące rozwiązania konstrukcyjne reometrów balansowych nie przewidują metody pomiaru naprężeń normalnych lub jakiegokolwiek ich kombinacji, teoretycznie istnieje możliwość wyznaczenia tych naprężeń poprzez pomiar odpowiednich sił w kierunku



Rys. 3. Lepkość dynamiczna i moduł dynamiczny w funkcji prędkości kątowej dla trzech typów reometrów: — reometr Maxwella,  $\circ$  reogoniometr Weissenberga,  $\square$  reometr balansowy (wg [31])

kach  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Pomijając rozważanie tego typu (por. p. 4.1), ograniczymy się do stwierdzenia, że punktem wyjścia są następujące fizyczne składowe pola prędkości:

$$(4.3.5) \quad v^{(r)} = 0, \quad v^{(\theta)} = \text{Re}[\varepsilon\omega V_0(r, \theta)e^{i\omega t}], \quad v^{(\varphi)} = \omega r \sin\theta + \text{Re}[\varepsilon\omega W_0(r, \theta)e^{i\omega t}],$$

nie uwzględniające efektów inercyjnych.

**4.4. Reometr typu mimośrodkowych cylindrów.** W roku 1970 ABBOTT i WALTERS [36] zaproponowali wykorzystanie do badań reologicznych reometru, składającego się z dwóch cylindrów, wewnętrznego o promieniu  $r_1$  i zewnętrznego o promieniu  $r_2$ , obracających się ze stałą, jednakową prędkością kątową  $\omega$  wokół własnych osi przesuniętych o wielkość mimośrodu  $a$  (rys. 4). Odpowiednie dodatkowe urządzenie powinno umożliwiać pomiar sił w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach  $x$  i  $y$ . Produkcja tego typu reometru jest przewidziana przez firmę Sangamo Controls Ltd. w W. Brytanii.



Równania ruchu cieczy (2.1.1) przybierają w układzie współrzędnych walcowych  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  następującą postać zespoloną:

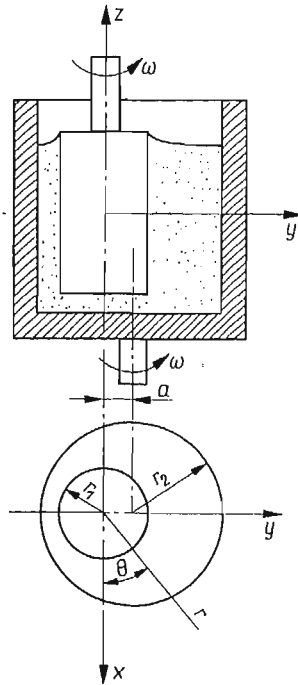
$$(4.4.1) \quad \begin{aligned} r' &= r - iaF(r)e^{i\theta}(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ \theta' &= \theta - \omega(t - \tau) - \frac{a}{r} \frac{d}{dr}(rF)e^{i\theta}(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ z' &= z, \end{aligned}$$

gdzie primami oznaczono współrzędne w chwili  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ), zaś funkcja  $F(r)$  dla  $\alpha = 0$ , gdzie  $\alpha^2 = -i\omega\varrho/\eta^*$  charakteryzuje siły inercji, jest następująca:

$$(4.4.2) \quad F(r) = Ar^2 + B \ln r + \frac{C}{r^2} + D,$$

przy czym A, B, C i D — odpowiednie stałe całkowania. Ograniczenie się do wyrazów liniowych względem  $a$  w równaniach konstytutywnych (2.3.3) daje siły

$$(4.4.3) \quad X = \frac{4\pi L \eta^* \omega a}{\ln \beta - (\beta^2 - 1)/(\beta^2 + 1)}, \quad Y = \frac{4\pi L G' a}{\ln \beta - (\beta^2 - 1)/(\beta^2 + 1)},$$



Rys. 4. Schemat reometru z mimośrodowymi cylindrami

gdzie  $\beta = r_2/r_1$ , zaś  $L$  oznacza efektywną długość cylindrów. Uwzględnienie sił inercji ( $\alpha \neq 0$ ) daje

$$(4.4.4) \quad X - iY = \frac{12\pi r_1^3 L \eta^* \omega a}{d^3} \left( 1 - \frac{\alpha^2 d^2}{10} \right),$$

gdzie  $d = r_2 - r_1$  przyjęto jako wielkość małą. Autorzy pracy [36] przeprowadzili ponadto analizę wpływu efektów nieliniowych (zależnych dopiero od członów rzędu  $O(a^3)$ ), uzasadniającą stosowanie wzorów (4.4.3) w zakresie  $0 \leq a \leq 0,3d$ .

Zależności (4.4.3) pozwalają, na podstawie pomiarów doświadczalnych  $X(\omega)$  oraz  $Y(\omega)$ , określić lepkość dynamiczną  $\eta'(\omega)$  oraz moduł dynamiczny  $G'(\omega)$ .

W pracy [36] podano odpowiednie zależności na składowe tensora naprężenia dla różnych przybliżeń, nie analizując możliwości wyznaczenia i pomiaru funkcji naprężeń normalnych. Rozważania podobne jak w p. 4.2 można przeprowadzić wychodząc z pola fizycznych składowych prędkości w postaci następującej:

$$(4.4.5) \quad \begin{aligned} v^{(r)} &= \operatorname{Re}[a\omega F(r)e^{i\theta}], \\ v^{(\theta)} &= \omega r + \operatorname{Re}\left[ia\omega \frac{d}{dr}(rF)e^{i\theta}\right], \\ v^{(z)} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ przepływ w reometrze typu mimośrodowych cylindrów jest RSHD klasy (III), pomiar odpowiedniej różnicy nacisków (naprężeń promieniowych) na ściankach cylindrów prowadzi do wyznaczenia różnicy  $n_2 - n_1$  funkcji naprężeń normalnych zdefiniowanych w (2.3.10).

Niewątpliwą zaletą rozważanego reometru, w porównaniu z innymi omówionymi rodzajami urządzeń, jest możliwość wykorzystania go do bezpośredniej kontroli charakterystyk reologicznych cieczy w procesach przemysłowych. Ażeby jednak uniknąć zaburzeń pomiarów wywołanych ewentualnym przepływem wzdłuż osi cylindrów, ABBOTT i WALTERS [36] proponują umieszczanie reometru w bocznym odgałęzieniu, w którym przepływ byłby zatrzymywany na okres czasu potrzebny do uzyskania odpowiednich danych.

Na zakończenie warto podkreślić, że dokonany przegląd najbardziej znanych reometrów realizujących przepływy typu RSHD klasy (III) nie wyczerpuje oczywiście wszystkich możliwości. Można, na przykład, analizować reometry typu krążek-krążek lub stożek-krążek, w których osie obrotu tworzą określony mały kąt. Wychodząc na przeciw ewentualnej pomysłowości badaczy i rzeczywistym potrzebom reologii należy stwierdzić, że nowe konstrukcje w tej dziedzinie powinny być poprzedzone wnikliwą analizą teoretyczną.

## 5. Szczególne przypadki przepływów klasy (II)

**5.1. Przepływ Poiseuille'a ze skręcaniem.** Istnieją dwa rodzaje przepływów typu RSHD klasy (II), które mogą być zrealizowane w sposób przybliżony w odpowiednich przyrządach: przepływ Poiseuille'a ze skręcaniem i jego uogólnienie — przepływ helikoidalny ze skręcaniem (por. [13, 14]).

Realizacja przepływu Poiseuille'a ze skręcaniem — zaproponowana przez OLDROYDA [21] — polega na przepływie cieczy pod działaniem podłużnego gradientu ciśnienia przez rurę zamkniętą na pewnym odcinku tarczami porowatymi, z których jedna obraca się względem drugiej z niewielką stałą prędkością kątową (rys. 5).

Z uwagi na postać tensora kinematycznego  $\mathbf{A}_1$  (trzy różne wartości własne) obliczonego dla fizycznych składowych prędkości w układzie współrzędnych walcowych

$$(5.1.1) \quad v^{<r>} = 0, \quad v^{<\theta>} = crz, \quad v^{<z>} = u(r),$$

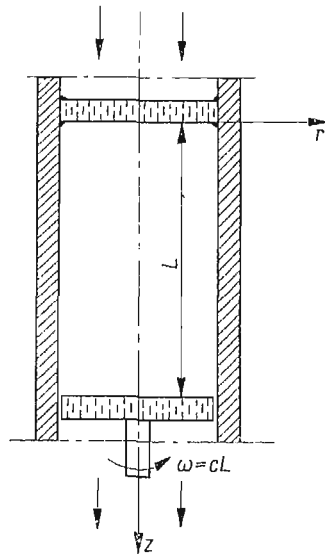
gdzie  $c = \text{const}$  (por. p. 3.1), możemy skorzystać z równań konstytutywnych (3.1.6) lub funkcji materiałowych zdefiniowanych w (3.1.9) przy założeniu, że<sup>6)</sup>

$$(5.1.2) \quad \begin{bmatrix} T_E^{<rr>} & T_E^{<r\theta>} & T_E^{<rz>} \\ \cdot & T_E^{<\theta\theta>} & T_E^{<\theta z>} \\ \cdot & \cdot & T_E^{<zz>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_E^{<11>} & T_E^{<13>} & T_E^{<12>} \\ \cdot & T_E^{<33>} & T_E^{<23>} \\ \cdot & \cdot & T_E^{<22>} \end{bmatrix}.$$

Analiza równań równowagi z pominięciem efektów inercyjnych (powolny obrót) wykazuje, że  $T^{<rz>} = \tau_1$  jest zmodyfikowanym spadkiem ciśnienia na jednostkę długości, zaś  $T^{<\theta z>} = \tau_3$  określone jest momentem potrzebnym do obrotu porowatych tarcz. Naprężenia normalne działające na jedną z tarcz dają

$$(5.1.3) \quad T^{<zz>}(r) - T^{<zz>}(0) = \Sigma_1 + \int_0^r \frac{1}{r} \Sigma_2 dr.$$

Przedstawiony schemat doświadczenia pozwala w zasadzie na obliczenie dwóch funkcji naprężeń normalnych  $\tau_1$  i  $\tau_3$  oraz kombinacji funkcji różnic naprężeń normalnych (5.1.3).



Rys. 5. Schemat przepływu Poiseuille'a ze skręcaniem

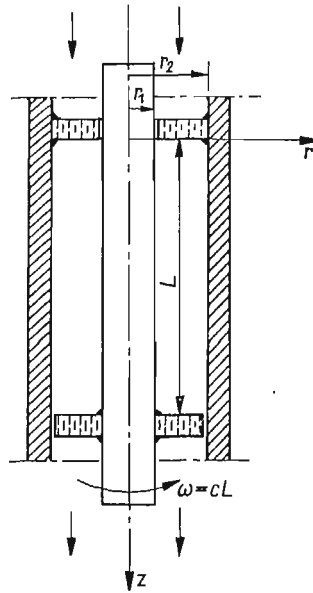
Należy jednak pamiętać, że w takim schemacie doświadczenia warunki brzegowe nie są ściśle spełnione.

**5.2. Przepływ helikoidalny ze skręcaniem.** Uogólnieniem przepływu Poiseuille'a ze skręcaniem jest przepływ helikoidalny ze skręcaniem, którego realizację można przeprowadzić

<sup>6)</sup> Taka zamiana wskaźników jest wynikiem określonego stałego obrotu dokonanego nad tensorem ekstra-naprężenia  $T_E$  oraz tensorami kinematycznymi  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$ .

w sposób przybliżony (por. [13]). Przepływ taki pojawi się pod wpływem podłużnego gradientu ciśnienia między współosiowymi rurami obracającymi się względem siebie ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , jeśli rury na pewnym odcinku zamknięte są tarczami porowatymi, z których jedna obraca się względem drugiej również ze stałą niewielką prędkością kątową  $\omega = cL$ , gdzie  $L$  jest odległością między tarczami (rys. 6).

Wychodząc z pola prędkości w postaci (3.1.3) stwierdzamy jak poprzednio, że  $T^{rz} = \tau_1$  wiąże się ze spadkiem ciśnienia na jednostkę długości,  $T^{0z} = \tau_3$  z momentem obracającym względem siebie porowate tarcze, zaś naprężenia normalne działające na jedną z tarcz dają zależność (5.1.3), przy czym 0 należy zastąpić promieniem wewnętrznym  $r_1$ .



Rys. 6. Schemat przepływu helikoidalnego ze skręcaniem

Dalsza analiza równań równowagi z pominięciem efektów inercyjnych pokazuje, że  $T^{0\theta} = \tau_2$  jest proporcjonalne do jednostkowego momentu obracającego względem siebie rury. Następnie różnica nacisków na ściankach zewnętrznej i wewnętrznej rury, przy założeniu, że siła masowa działa tylko wzdłuż osi  $z$ , daje następujące wyrażenie:

$$(5.2.1) \quad T^{rr}(r_2) - T^{rr}(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \Sigma_2 dr$$

służące za podstawę obliczenia  $\Sigma_2$ .

Nie zapominając o przybliżonym spełnieniu odpowiednich warunków brzegowych warto zauważyć, że przepływ helikoidalny ze skręcaniem pozwala w zasadzie wyznaczyć wszystkie pięć funkcji materiałowych (3.1.9) charakteryzujących zachowanie się cieczy o przepływach typu RSHD klasy (II).

## 6. Uwagi końcowe

Przedstawiona w niniejszym przeglądzie analiza teoretyczna przepływów ze stałą historią deformacji (RSHD) oraz omówienie istniejących i hipotetycznych typów reometrów realizujących takie przepływy, pozwala na sformułowanie kilku następujących uwag:

(1) Przepływy ze stałą historią deformacji uogólniają dość istotnie klasę ustalonych przepływów wiskozymetrycznych.

(2) W przepływach ze stałą historią deformacji, podobnie jak w przepływach wiskozymetrycznych, historia deformacji cieczy lepkospężystej, opisywanej równaniami konstytutywnymi nieściśliwej cieczy prostej, ujawnia się w sposób ograniczony i specyficzny.

(3) Własności cieczy w niewiskozymetrycznych przepływach ze stałą historią deformacji opisane są pięcioma funkcjami materiałowymi (2 funkcje różnic naprężeń normalnych, 3 funkcje naprężeń ścinających), w przeciwieństwie do przepływów wiskozymetrycznych, dla których wystarczą tylko trzy funkcje.

(4) Możliwość składania różnych przepływów wiskozymetrycznych pozwala na analizowanie i «projektowanie» bardziej złożonych przepływów o określonych charakterystykach.

(5) Na gruncie teorii przepływów ze stałą historią deformacji istnieje możliwość ustalania ścisłych lub przybliżonych związków między ogólniejszymi funkcjami materiałowymi a funkcjami wiskozymetrycznymi.

(6) Takie urządzenia, jak: ortogonalny reometr Maxwella, reometr balansowy Kepesa i reometr z mimośrodowymi cylindrami Abbotta i Waltersa, pozwalają na stosunkowo proste wyznaczenie dynamicznych charakterystyk cieczy: lepkości dynamicznej  $\eta'(\omega)$  i modułu dynamicznego (zachowawczego)  $G'(\omega)$ .

(7) Niektóre wymienione wyżej reometry dają w zasadzie możliwość określania, chociaż nie w jednakowym stopniu i z różnym przybliżeniem, funkcji materiałowych (lub ich kombinacji) charakteryzujących naprężenia normalne.

(8) Reometry realizujące niewiskozymetryczne przepływy ze stałą historią deformacji, po likwidacji odpowiednich mimośródów lub kątów nachylenia osi obrotu, mogą być wykorzystane jako standardowe wiskozymetry.

### Literatura cytowana w tekście

1. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *On certain steady flows of general fluids*, Arch. Rational Mech. Anal. 3 (1959), 289.
2. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Helical flow of general fluids*, J. Appl. Phys., 30 (1959), 1508.
3. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik pod red. S. FLÜGGE, vol. III/3, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
4. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London-New York 1964.
5. J. D. FERRY, *Lepkosprężystość polimerów*, Warszawa 1966.
6. И. М. БЕЛКИН, Г. В. ВИНОГРАДОВ, А. И. ЛЬВОНОВ, *Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов*, Москва 1968.

7. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
8. S. ZAHORSKI, *Ciecze nienuetonowskie w swietle mechaniki kontinuum*, Mech. Teoret. Stos., 7 (1968), 385.
9. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Steady extension of incompressible simple fluids*, Phys. Fluids, 5 (1962), 840.
10. B. D. COLEMAN, *Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic liquids*, Arch. Rational Mech. Anal., 9 (1962), 273.
11. W. NOLL, *Motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., 11 (1962), 97.
12. C.-C. WANG, *A representation theorem for the constitutive equation of a simple material in motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., 20 (1965), 329.
13. R. R. HUILGOL, *On the construction of motions with constant stretch history. I. Superposable viscometric flows*, MRC Technical Report 954, Madison, Wisconsin 1968.
14. R. R. HUILGOL, *On the construction of motions with constant stretch history. II. Motions superposable on simple extension and various simplified constitutive equations for constant stretch histories*, MRC Technical Report 975, Madison, Wisconsin 1969.
15. R. R. HUILGOL, *Non-viscometric motions with constant stretch history*, A. I. Ch. E. Symp. on Fundamental Research in Fluid Mechanics, Washington D. C. 1969.
16. B. D. COLEMAN, *On the use of symmetry to simplify the constitutive equations of isotropic material with memory*, Proc. Roy. Soc., A306 (1968), 449.
17. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., 6 (1960), 355.
18. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 1 (1957), 1.
19. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Rev. Modern Phys., 33 (1961), 239.
20. R. S. RIVLIN, J. E. ERICKSEN, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., 4 (1955), 332.
21. J. G. OLDROYD, *Some steady flows of the general elastico-viscous liquid*, Proc. Roy. Soc., A283 (1965), 115.
22. A. C. PIPKIN, *Controllable viscometric flows*, Quart. Appl. Math., 26 (1968), 87.
23. S. ZAHORSKI, *Flows with constant stretch history and extensional viscosity*, Arch. Mech. Stos., 23 (1971) (w druku).
24. B. MAXWELL, R. P. CHARTOFF, *Studies of a polymer melt in an orthogonal rheometer*, Trans. Soc. Rheol., 9: 1 (1965), 41.
25. L. L. BLYLER, JR., S. J. KURTZ, *Analysis of the Maxwell orthogonal rheometer*, J. Appl. Polymer Sci., 11 (1967), 127.
26. R. B. BIRD, E. K. HARRIS, JR., *Analysis of steady state shearing and stress relaxation in the Maxwell orthogonal rheometer*, A. I. Ch. E. J., 14 (1968), 758.
27. R. R. HUILGOL, *On the properties of the motion with constant stretch history occurring in the Maxwell rheometer*, Trans. Soc. Rheol. 13: 4 (1969), 513.
28. M. YAMAMOTO, *Theoretical analysis of new rheometers*, Japan, J. Appl. Phys., 8 (1969), 1252.
29. R. J. GORDON, W. R. SCHOWALTER, *On the relation between complex viscosity and steady state shearing in the Maxwell orthogonal rheometer*, A. I. Ch. E. J., 16 (1970), 318.
30. T. N. G. ABBOTT, K. WALTERS, *Rheometrical flow systems. Part 2, Theory for the orthogonal rheometer, including an exact solution of the Navier-Stokes equations*, J. Fluid Mechanics, 40, part 1 (1970), 205.
31. C. W. MACOSKO, *Flow of polymer melts between eccentric rotating disks*, Princeton University Report, October 1970.
32. A. C. PIPKIN, D. R. OWEN, *Nearly viscometric flows*, Phys. Fluids, 10 (1967), 449.
33. A. KEPES, Proc. 5th Int. Congress Rheology, vol. IV, Kyoto, Japan 1970.
34. D. H. KAELBLE, *Rotating spherical interlayer (RSI) measurement of the dynamic mechanical properties of elastomers*, J. Appl. Polymer Sci., 13 (1969), 2547.
35. K. WALTERS, *Rheometrical flow systems. Part 1, Flow between concentric spheres rotating about different axes*, J. Fluid Mech., 40, part 1 (1970), 257.
36. T. N. G. ABBOTT, K. WALTERS, *Rheometrical flow systems. Part 3, Flow between eccentric rotating cylinders*, J. Fluid Mech., 43, part 2 (1970), 257.

## Резюме

## НЕКОТОРЫЕ НЕВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

Возникший в последнее время интерес к невискозиметрическим течениям вязкоупругих жидкостей, таких как растворы и расплавы полимеров, является результатом как успехов теоретической реологии, так и нужд исследования более сложных течений в реометрах новых типов. Особое место среди всех невискозиметрических течений простых жидкостей занимают движения с постоянной историей деформации (см. [3, 11]). Они существенно отличаются от хорошо известного класса стационарных вискозиметрических течений, полностью характеризующихся тремя материальными функциями. К этим движениям можно причислить например течения, осуществляемые в ортогональном реометре Максвелла, балансином реометре Кепеса и проч.

В первой части данного обзора изложена общая теория невискозиметрических течений с постоянной историей деформации. Вторая часть содержит анализ различных классов течений, в частности течений, осуществляемых в приборах, созданных в последнее время. Более подробно обсуждены возможности определения динамических реологических характеристик и влияния нормальных напряжений.

## Summary

## CERTAIN NON-VISCOMETRIC FLOWS OF VISCOELASTIC FLUIDS

Recent interests in various non-viscometric flows of viscoelastic fluids such as polymer melts and solutions result from the progress made in the field of theoretical rheology as well as from the needs for investigation of more complicated flows in new rheometers. Among all non-viscometric flows of simple fluids a particular position is filled by motions with constant stretch history — (cf. [3,11]). These motions differ significantly from the well known class of steady viscometric flows, characterized entirely by three material functions and include, among others, the types of flows realized in the Maxwell Orthogonal Rheometer, the Kepes Balance Rheometer etc.

In the first part of our review the general theory of non-viscometric flows with constant stretch history is outlined. The second part deals with various classes of flows, especially those occurring in the recently constructed rheometers. The possibilities of determination of dynamic rheological characteristics as well as normal stress effects are discussed in greater detail.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 marca 1971 r.*