

## ZASTOSOWANIE MASZYN CYFROWYCH DO ROZWIĄZYWANIA RUSZTÓW O REGULARNEJ SZEŚCIOKĄTNEJ SIATCE PRĘTÓW

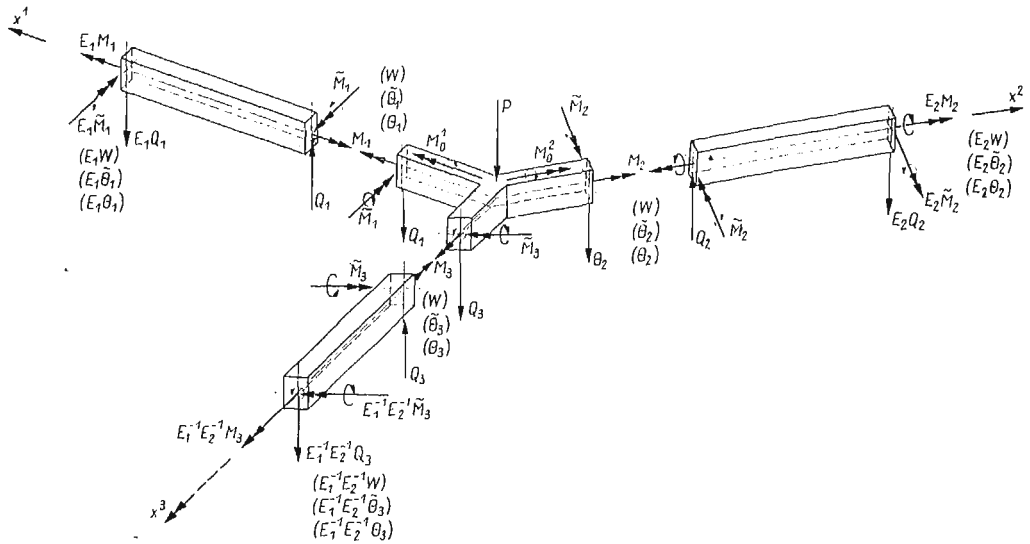
JAN BOGDAN OBRĘBSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono metodę obliczeń numerycznych regularnego, heksagonalnego rusztu płaskiego składającego się z prostych, sprężystych prętów, tworzących w planie siatkę sześciokątów foremnych. Ruszt ten jest obciążony w węzłach siłami prostopadłymi do płaszczyzny konstrukcji oraz momentami o wektorach leżących w tej płaszczyźnie. Do tej pory zagadnieniem tego typu zajmowano się jedynie w pracach [2], [3], [6], [9]. Prace te dotyczyły rozwiązania zagadnienia w sposób analityczny podając jedynie wyniki przybliżone lub omawiały pewne przypadki szczególne. W poniższej pracy osiągnięto w oparciu o równania równowagi węzła, wyprowadzone w pracy [3], pełne numeryczne rozwiązanie postawionego zagadnienia, uwzględniające możliwość obciążania konstrukcji w węzłach dowolnym obciążeniem. Ponadto po raz pierwszy wprowadzono do równań typu macierzowego operatory przesunięcia stosowane w rachunku różnic skończonych. Pozwoliło to zapisać równania równowagi węzła w postaci bardziej przejrzystej i zwartej, a zarazem wygodnej w obliczeniach numerycznych. Jednocześnie zastosowana procedura «DET GAUSS PASMOWY» daje dogodny aparat matematyczny do rozwiązywania tego typu zagadnień. Przykładowe obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA 1204 dla rusztu ograniczonego kołem o średnicy około ośmiu długości prętów siatki.

### 2. Oznaczenia i założenia

W zadaniu przyjęto kartezjański prawoskrętny, ukośnokątny układ współrzędnych o osiach  $x^1$  i  $x^2$  leżących w płaszczyźnie rusztu i nachylonych do siebie pod kątem  $120^\circ$  oraz o trzecim kierunku  $n$  skierowanym prostopadłe do dwóch pozostałych. Wszystkie pręty rusztu leżą na trzech rodzinach prostych równoległych oznaczonych odpowiednio  $A = I, II, III$ , są równej długości i zbiegają się w węzłach w taki sposób, że ich osie przecinają się w jednym punkcie tworząc sztywne węzły. Wykonane są one z materiału sprężystego i mają główne osie bezwładności przekroju poprzecznego odpowiednio równoległe i prostopadłe do płaszczyzny rusztu. W związku z tym postuluje się, że siły prostopadłe do płaszczyzny rusztu powodują jedynie pionowe przemieszczenia węzłów. Zwroty dodatnie sił wewnętrznych i obciążeń ilustruje rys. 1.



Rys. 1

## Oznaczenia

$E$	moduł Younga,
$E_I \Phi(x^1, x^2) = E_1^{\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 + \mu, x^2)$	operator przesunięcia wzdłuż $A = I$ ,
$E_{II} \Phi(x^1, x^2) = E_2^{\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1, x^2 + \mu)$	operator przesunięcia wzdłuż $A = II$ ,
$E_{III} \Phi(x^1, x^2) = E_3^{\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 - \mu, x^2 - \mu)$	operator przesunięcia wzdłuż $A = III$ ,
$J$	moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem osi poziomej,
$J^*$	geometryczna sztywność skręcania,
$k^I = \tilde{k} = \frac{EJ}{l} = \text{const}$	sztywność prętów na zginanie,
$k^{II} = k = \frac{GJ^*}{l} = \text{const}$	sztywność prętów na skręcanie,
$\alpha = \frac{k^{II}}{k^I} = \text{const}$	stosunek sztywności pręta na skręcanie do jego sztywności na zginanie,
$l = \text{const}$	długość pręta,
$M_0^1, M_0^2$	składowe momentu zewnętrznego przyłożonego w węzle, odpowiednio równoległe do osi $x^1, x^2$ ,
$M_A^1 = \tilde{M}_A$	moment zginający pręta $A$ w przekroju przy węzle ( $x^1, x^2$ ),
$M_A^{II} = M_A$	moment skręcający pręta $A$ w przekroju przy węzle ( $x^1, x^2$ ),
$P$	siły zewnętrzne przyłożone w węzłach i prostopadłe do płaszczyzny rusztu,
$Q(A)$	siła poprzeczna pręta $A$ ,

$$\mu(x^1, x^2) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x^1 + x^2 = 3n+1 \\ 0 & \text{dla } x^1 + x^2 = 3n+0, \\ -1 & \text{dla } x^1 + x^2 = 3n-1 \end{cases} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots,$$

w

przemieszczenie węzła w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rusztu,

$\Theta^1, \Theta^2$

składowe skalarnie nieskończenie małego kąta obrotu węzła  $\Theta$ , odpowiednio wzdłuż osi układu współrzędnych  $x^1, x^2$ .

### 3. Równania równowagi węzła oraz związki między siłami a przemieszczeniami w poszczególnych prętach układu

Jak łatwo zauważyć, w całym ruszcie sześciokątnym występują właściwie dwa rodzaje węzłów, z których każdy można otrzymać przez przesunięcie i obrót drugiego o  $180^\circ$ . W związku z tym punktem wyjścia przedstawionej poniżej metody było zapisanie układu równań równowagi typowego węzła w sposób opisujący równocześnie stan równowagi w dowolnym węzle konstrukcji. Zgodnie z cytowaną pracą [3] układ ten ma postać:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \mu \left\{ -\tilde{k} \left[ \frac{3}{2} (E_2^u + E_3^u + 4) \Theta^1 - \frac{3}{2} (2 + E_3^u) \Theta^2 - \mu \frac{3\sqrt{3}}{l} (E_2^u - E_3^u) w \right] + \right. \\ & \left. + k \left[ \left( E_1^u + \frac{1}{4} E_2^u + \frac{1}{4} E_3^u - \frac{3}{2} \right) \Theta^1 + \left( -\frac{1}{2} E_1^u - \frac{1}{2} E_2^u + \frac{1}{4} E_3^u + \frac{3}{4} \right) \Theta^2 \right] + M_0^1 - \frac{1}{2} M_0^2 \right\} = 0, \\ & \mu \left\{ -\tilde{k} \left[ -\frac{3}{2} (2 + E_3^u) \Theta^1 + \frac{3}{2} (E_1^u + E_3^u + 4) \Theta^2 - \mu \frac{3\sqrt{3}}{l} (E_3^u - E_1^u) w \right] + \right. \\ & \left. + k \left[ \left( -\frac{1}{2} E_1^u - \frac{1}{2} E_2^u + \frac{1}{4} E_3^u + \frac{3}{4} \right) \Theta^1 + \left( \frac{1}{4} E_1^u + E_2^u + \frac{1}{4} E_3^u - \frac{3}{2} \right) \Theta^2 \right] - \frac{1}{2} M_0^1 + M_0^2 \right\} = 0, \\ & \mu \tilde{k} \left\{ 3\sqrt{3} (E_2^u - E_3^u) \Theta^1 - 3\sqrt{3} (E_1^u - E_3^u) \Theta^2 - \mu \frac{12}{l} (E_1^u + E_2^u + E_3^u - 3) w \right\} = Pl\mu^2. \end{aligned}$$

Związki między siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami wyrażają się wzorami:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{M}_I &= \mu \tilde{k} \left[ (4 + 2E_1^u) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_1^u - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ \tilde{M}_{II} &= \mu \tilde{k} \left[ (4 + 2E_2^u) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 \right) - \mu (E_2^u - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ \tilde{M}_{III} &= \mu \tilde{k} \left[ (4 + 2E_3^u) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_3^u - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ E_1^u \tilde{M}_I &= -\mu \tilde{k} \left[ (2 + 4E_1^u) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_1^u - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ E_2^u \tilde{M}_{II} &= -\mu \tilde{k} \left[ (2 + 4E_2^u) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 \right) - \mu (E_2^u - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ E_3^u \tilde{M}_{III} &= -\mu \tilde{k} \left[ (2 + 4E_3^u) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_3^u - 1) \frac{6w}{l} \right], \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_I &= E_1^\mu M_I = \mu k(E_1^\mu - 1) \left( \Theta^1 - \frac{1}{2} \Theta^2 \right), \\ M_{II} &= E_2^\mu M_{II} = \mu k(E_2^\mu - 1) \left( -\frac{1}{2} \Theta^1 + \Theta^2 \right), \\ M_{III} &= E_3^\mu M_{III} = \mu k(E_3^\mu - 1) \left( -\frac{1}{2} \Theta^1 - \frac{1}{2} \Theta^2 \right). \end{aligned}$$

#### 4. Warunki brzegowe zadania oraz równania równowagi w zapisie macierzowym

Równania równowagi węzła (3.1) dotyczące węzła typowego w przypadku sąsiedowania węzła z punktem podporowym degenerują się w zależności od sposobu podparcia rusztu. Będziemy rozpatrywać tu dwa zasadnicze sposoby podparcia, jako mogące mieć zastosowanie przy realizacji konkretnych konstrukcji, mianowicie swobodne podparcie oraz utwierdzenie na obwodzie. W obydwu przypadkach otrzymamy trzy układy brzegowych równań równowagi, w zależności od kierunku  $\mathcal{A}$  pręta, za pośrednictwem którego węzeł łączy się z punktem podparcia.

Pręt  $\mathcal{A}$  nazywamy swobodnie podpartym na brzegu, jeżeli na podporze są spełnione warunki

$$(4.1) \quad E_{\mathcal{A}} \tilde{M} = E_{\mathcal{A}} M_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{A}} \left( \frac{w}{l} \right) = 0.$$

Wykorzystując (4.1) oraz wzory (3.3), (3.4), określimy związane z takim rodzajem podparcia przemieszczenia węzłów podporowych dla każdego z trzech kierunków  $\mathcal{A}$ . Rugując te przemieszczenia z układu równań (3.1) otrzymamy trzy brzegowe równania równowagi węzła o postaci:

$$\text{dla } \mathcal{A} = \text{I:} \quad \mathbf{W}_2 E_2^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_3 E_3^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \bar{\mathbf{Q}},$$

$$\text{dla } \mathcal{A} = \text{II:} \quad \mathbf{W}_1 E_1^\mu \mathbf{x} - \mathbf{W}_3 E_3^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_5 \mathbf{x} = \bar{\mathbf{Q}},$$

$$\text{dla } \mathcal{A} = \text{III:} \quad \mathbf{W}_1 E_1^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_2 E_2^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_7 \mathbf{x} = \bar{\mathbf{Q}}.$$

Stosując identyczną formę zapisu do układu (3.1) dla węzła typowego, otrzymamy,

$$(4.2) \quad \mathbf{W}_1 E_1^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_2 E_2^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_3 E_3^\mu \mathbf{x} + \mathbf{W}_8 \mathbf{x} = \bar{\mathbf{Q}},$$

gdzie  $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4, \mathbf{W}_5, \mathbf{W}_7, \mathbf{W}_8, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{Q}}$  są macierzami

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \begin{vmatrix} t_6 & t_3 & 0 \\ t_3 & t_1 & -\mu t_{11} \\ 0 & -t_{11} & -\mu t_{13} \end{vmatrix}, & \mathbf{W}_2 &= \begin{vmatrix} t_1 & t_3 & \mu t_{11} \\ t_3 & t_6 & 0 \\ t_{11} & 0 & -\mu t_{13} \end{vmatrix}, & \mathbf{W}_3 &= \begin{vmatrix} t_1 & t_4 & -\mu t_{11} \\ t_4 & t_1 & \mu t_{11} \\ -t_{11} & t_{11} & -\mu t_{13} \end{vmatrix}, \\ \mathbf{W}_4 &= \begin{vmatrix} t_2 & t_5 & 0 \\ t_5 & t_7 & -\mu t_{12} \\ 0 & t_{12} & \mu t_1 \end{vmatrix}, & \mathbf{W}_5 &= \begin{vmatrix} t_7 & t_5 & \mu t_{12} \\ t_5 & t_2 & 0 \\ -t_{12} & 0 & \mu t_{14} \end{vmatrix}, & \mathbf{W}_7 &= \begin{vmatrix} t_7 & t_8 & -\mu t_{12} \\ t_8 & t_7 & \mu t_{12} \\ t_{12} & -t_{12} & \mu t_{14} \end{vmatrix}, \\ \mathbf{W}_8 &= \begin{vmatrix} t_9 & t_{10} & 0 \\ t_{10} & t_9 & 0 \\ 0 & 0 & \mu t_{15} \end{vmatrix}, & \mathbf{x} &= \begin{vmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \frac{w}{l} \end{vmatrix}, & \bar{\mathbf{Q}} &= \begin{vmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

oraz

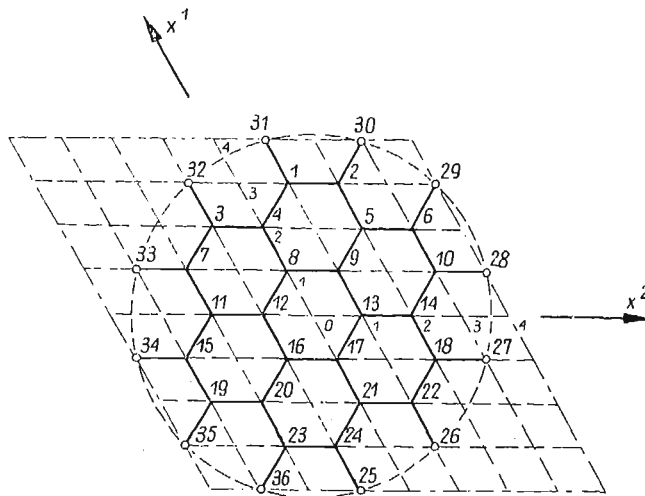
$$\begin{aligned}
 t_1 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\varkappa, & t_6 &= \varkappa, & t_{11} &= 3\sqrt{3}, & \bar{Q}_1 &= \frac{1}{k} \left( -M_0^1 + \frac{1}{2}M_0^2 \right), \\
 t_2 &= -6 - \frac{1}{2}\varkappa, & t_7 &= -\frac{21}{4} - \frac{5}{4}\varkappa, & t_{12} &= \frac{3\sqrt{3}}{2}, & \bar{Q}_2 &= \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2}M_0^1 - M_0^2 \right), \\
 t_3 &= -\frac{1}{2}\varkappa, & t_8 &= \frac{9}{4} + \varkappa, & t_{13} &= 12, & \bar{Q}_3 &= \mu \frac{PI}{k}, \\
 t_4 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\varkappa, & t_9 &= -6 - \frac{3}{2}\varkappa, & t_{14} &= 27, \\
 t_5 &= 3 + \frac{1}{4}\varkappa, & t_{10} &= 3 + \frac{3}{4}\varkappa, & t_{15} &= 36.
 \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że w danym przypadku traktujemy działanie operacji  $E_A$  na wektor  $x$  podobnie jak działanie iloczynu wielkości skalarnej na macierz.

W przypadku brzegu utwierdzonego zakładamy, że  $E_A x = 0$ . Stąd bezpośrednio z równania (4.2) otrzymamy dla każdego  $\Delta$  brzegowe, macierzowe równanie równowagi węzła. Wystarczy po prostu przyrównać do zera odpowiedni składnik w równości (4.2). Jednocześnie w przypadku brzegu z wymuszonymi przemieszczeniami otrzymamy równania brzegowe przenosząc na prawą stronę (4.2) człony dla określonego  $\Delta$ .

### 5. Przykład rozwiązania rusztu o kształcie kołowym

Rozpatrzmy obecnie ruszt o kształcie kołowym (rys. 2), obciążony w każdym węźle siłą i momentem zgodnie z przyjętymi założeniami. W celu znalezienia rozwiązania postawionego zagadnienia należy zbudować z otrzymanych poprzednio równań różnic-



Rys. 2

wych opisujących równowagę węzłów układ równań algebraicznych liniowych, w którym niewiadomymi są przemieszczenia. Po rozwiązaniu tego układu w drugim etapie obliczamy wszystkie interesujące nas wartości sił wewnętrznych. Dla rusztu swobodnie podpartego na obwodzie, po dokonaniu przenumrowania jego węzłów zgodnie z rys. 2, otrzymamy układ 72 równań, którego współczynniki tworzą quasi-macierz o charakterze pasmowym przedstawioną w tabl. 1.

Tablica 1

		→ q																									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$\mu[p]$
↓ p	1	$W_4 W_2$		$W_3$																						$\bar{Q}$	+1
	2	$W_2 W_7$			$W_1$																					$\bar{Q}$	-1
	3			$W_4 W_2$				$W_3$																		$\bar{Q}$	+1
	4	$W_3$		$W_2 W_8$					$W_1$																	$\bar{Q}$	-1
	5		$W_1$			$W_8 W_2$			$W_3$																	$\bar{Q}$	+1
	6					$W_2 W_7$				$W_1$																$\bar{Q}$	-1
	7			$W_3$					$W_5$		$W_1$															$\bar{Q}$	-1
	8				$W_1$					$W_8 W_2$		$W_3$														$\bar{Q}$	+1
	9					$W_3$					$W_2 W_8$		$W_1$													$\bar{Q}$	-1
	10						$W_1$					$W_5$		$W_3$												$\bar{Q}$	+1
	11							$W_1$					$W_8 W_2$		$W_3$											$\bar{Q}$	+1
	12								$W_3$					$W_2 W_8$		$W_1$										$\bar{Q}$	-1
	13									$W_1$					$W_8 W_2$		$W_3$									$\bar{Q}$	+1
	14										$W_3$					$W_2 W_8$		$W_1$								$\bar{Q}$	-1
	15											$W_3$					$W_5$		$W_1$							$\bar{Q}$	-1
	16												$W_1$					$W_8 W_2$		$W_3$						$\bar{Q}$	+1
	17													$W_3$					$W_2 W_8$		$W_1$					$\bar{Q}$	-1
	18														$W_1$					$W_5$		$W_3$				$\bar{Q}$	+1
	19															$W_1$					$W_7 W_2$					$\bar{Q}$	+1
	20																$W_3$					$W_2 W_8$		$W_1$		$\bar{Q}$	-1
	21																	$W_1$					$W_8 W_2$	$W_3$		$\bar{Q}$	+1
	22																							$W_2 W_4$		$\bar{Q}$	-1
	23																							$W_1$	$W_7 W_2$	$\bar{Q}$	+1
	24																								$W_3$	$W_2 W_4$	$\bar{Q}$

W przypadku rusztu tej samej wielkości i kształtu lecz utwierdzonego na obwodzie otrzymamy macierz współczynników podobną do przedstawionej w tabl. 1. Wówczas jedyną różnicą będzie fakt, że na głównej przekątnej wystąpią jedynie podmacierze  $W_8$ .

Wbrew pozorom macierze te nie są symetryczne ze względu na przypisanie każdemu węzłowi określonej wartości funkcji  $\mu$ . W przypadkach takich, ze względu na ograniczone pojemności pamięci maszyn cyfrowych, należy dążyć do korzystania z metod rozwiązywania, które w czasie wykonywania procedury wykorzystują jedynie wyrazy z obszaru

objętego wyrazami niezerowymi. Znane dotychczas metody rozwiązywania układów równań z macierzami pasmowymi wymagają jednak specyficznej i bardzo regularnej budowy macierzy współczynników. Można tu przytoczyć metodę Choleskiego [4], Cornocka [1] oraz metodę eliminacji Gaussa dla macierzy i quasi-macierzy o charakterze trójdziagonalnym [4]. Wymagają one albo symetryczności macierzy, albo określonego podziału jej na podmacierze występujące regularne w całym obszarze lub nawet występowania w ramach takiego podziału macierzy jednostkowych.

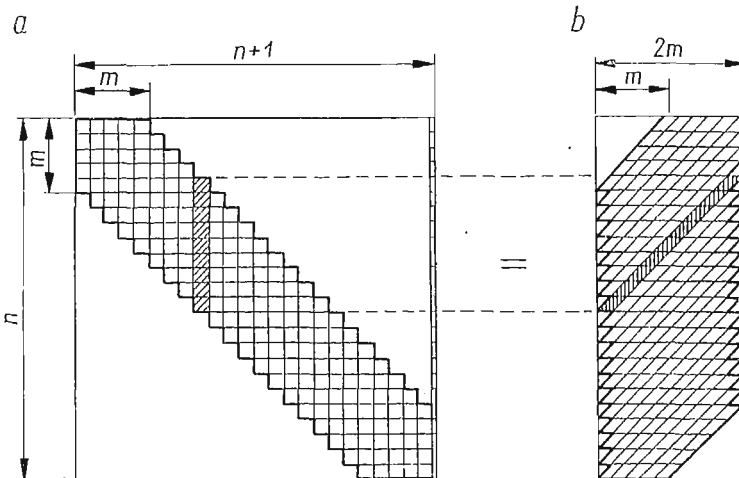
Ze względu na bardzo nieregularny charakter macierzy współczynników występującej w zadaniu powstała konieczność zastosowania bardziej ogólnej procedury. W oparciu o prace [7], [8], [10] opracowano procedurę «DET GAUSS PASMOWY» liczącą w oparciu o metodę kolejnych eliminacji Gaussa i wykorzystującą przy eliminacji wyrazy leżące na głównej przekątnej. Stąd metoda ta może być stosowana jedynie w przypadku, gdy wyrazy te nie są równe zero. Warunek ten nie stanowi jednak ograniczenia przy rozwiązywaniu rozpatrywanych zagadnień. Procedura ta napisana jest w języku Algol 1204. Rozwiązuje ona  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi ( $2m-1$ ) diagonalnych, gdzie  $m$  oznacza liczbę diagonalni liczoną poziomo od głównej przekątnej do brzegu obszaru niezerowego (rys. 3a). Dzięki odpowiedniemu przenumerowaniu, przy wykonywaniu obliczeń pamiętana jest jedynie tablica współczynników uwidoczniiona na rys. 3b.

W zadaniu obliczenie i ułożenie tej tablicy zlecono maszynie. Przy układaniu programu poczyniono założenia pozwalające na dowolne kształtowanie wymiarów i obciążenia rusztu w ramach przyjętych założeń w p. 1 i 2. Stąd wartościami podawanymi maszynie do wczytania są kolejno: stosunek sztywności pręta  $\kappa$ , jego sztywność giętna  $\tilde{k}$ , wektory składowych obciążeń zewnętrznych  $M_0^1, M_0^2, P$  oraz długość prętów rusztu  $l$ .

Następnie po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy poszukiwane wartości dwóch składowych kątów obrotów oraz ilorazu wartości ugięcia węzła przez długość pręta w kolejności zgodnej z wprowadzoną numeracją. Wykorzystując teraz związki (3.2), (3.4), oraz (3.5) zbudowany został program obliczający siły wewnętrzne występujące w ruszcie. Danymi podawanymi maszynie do wczytania są w danym przypadku:

$s$	parametr określający podparcie ; dla $s = 0$ obliczane są siły dla rusztu swobodnie podpartego na obwodzie, dla $s \neq 0$ — dla rusztu utwierdzonego na obwodzie,
$k^I = \tilde{k}$	sztywność prętów na zginanie,
$k^{II} = k$	sztywność prętów na skręcanie,
$l$	długość prętów rusztu,
$X$	wektor znanych przemieszczeń węzłów — dla $s = 0$ $X = X[1:72]$ , dla $s \neq 0$ $X = X[1:108]$ ,
$a, b, c, b, f, g, h, j,$	jednowymiarowe macierze określające geometrię rusztu, o współczynnikach odpowiadających numerom końców prętów,
$\mu$	wartości tej funkcji dla węzłów zgodnie z przyjętą numeracją.

Przy wykorzystaniu przedstawionych programów przeprowadzono obliczenia zarówno dla rusztu utwierdzonego, jak i swobodnie podpartego na obwodzie przy różnych wartościach  $\kappa$ . Między innymi dla  $\kappa = 0$  uzyskano pełną zgodność z obliczeniami analitycznymi wykonanymi w pracy [3].



Rys. 3

cal procedure DET GAUSS PASMOWY (n,m,b,x);  
 comment rozwiązuje n równan algebraicznych liniowych z n niewiadomymi, (2m-1) diagonalnych, sprowadzonych do tablicy b[1:n, 1:2m];

```

value m,n;
integer m, n;
array b, x;
begin
integer N, c, h, H, d, i, j, e1;
real s, r, t, k, l, p;
  N:=2*m;
c:=n-m+1;
  begin comment obliczanie nowych współczynników b[i, j] dla obszaru typowego;
  for h:=1 step 1 until c do
  begin d:=h+m-1; s:=b[h, m]; H:=h+1; r:=b[h, N]:=b[h, N]/s;
  for i:=h+1 step 1 until d do
  begin
  b[i, N]:=b[i, N]-b[i, m-i+h]*r
  end;
  for j:=H step 1 until d do
  begin
  t:=b[h, m-h+j]:=b[h, m-h+j]/s;
  for i:=H step 1 until d do
  b[i, m-i+j]:=b[i, m-i+j]-b[i, m-i+h]*t
  end j
  end h
  end;
  begin comment obliczanie nowych współczynników b[i, j] dla pozostałej macierzy prostokątnej;
  for h:=n-m+2 step 1 until n do
  begin k:=b[h, m]; H:=h+1; r:=b[h, N]:=b[h, N]/k;
  for i:=H step 1 until n do
  begin
  b[i, N]:=b[i, N]-b[i, m-i+h]*r;
  end;
  for j:=H step 1 until n do
  begin l:=b[h, m-h+j]:=b[h, m-h+j]/k;
  for i:=H step 1 until n do
  b[i, m-i+j]:=b[i, m-i+j]-b[i, m-i+h]*l
  end j
  end h
  end;
  begin comment obliczanie niewiadomych x[h] dla obszaru nictypowego;
  for h:=n step -1 until c do
  begin p:=b[h, N];
  for j:=h+1 step 1 until n do
  p:=p-b[h, m-h+j]*x[j]; x[h]:=p
  end h
  end;
  begin comment obliczanie niewiadomych x[h] Dla obszaru typowego;
  for h:=n-m step -1 until 1 do
  begin p:=b[h, N]; c1:=h+m-1;
  for j:=h+1 step 1 until c1 do
  p:=p-b[h, m-h+j]*x[j]; x[h]:=p
  end h
  end
end procedure DET GAUSS PASMOWY;
  
```



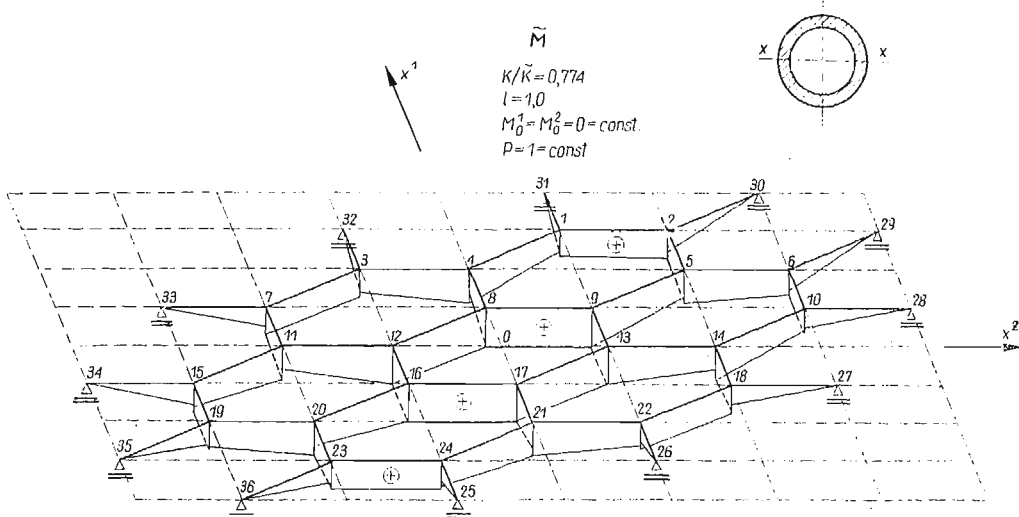
Objaśnienie do rys. 4:

preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$			
	31	2,00		8	2,45		11	2,28		6	2,55		9	3,45		12	3,45		15	2,55		26	2,00
1	2	2,55	4	3	3,28	7	33	2,00	10	28	2,00	13	14	3,45	16	17	3,45	19	20	2,28	22	21	2,28
	4	2,28		1	3,28		3	2,55		14	2,28		17	3,45		20	3,45		35	2,00		18	2,55
	5	2,28		2	3,28		4	3,45		7	3,28		18	3,28		21	3,45		23	3,28		20	2,28
2	1	2,55	5	6	3,28	8	9	3,45	11	12	2,45	14	13	2,45	17	16	3,45	20	16	3,28	23	24	2,55
	30	2,00		9	2,45		12	3,45		15	3,28		10	3,28		13	3,45		16	2,45		36	2,00
	32	2,00		10	2,55		13	3,45		16	3,45		19	2,55		14	2,28		17	2,45		25	2,00
3	4	2,28	6	5	2,28	9	8	3,45	12	11	3,45	15	34	2,00	18	27	2,00	21	22	3,28	24	23	2,55
	7	2,55		29	2,00		5	3,45		8	3,45		11	2,28		22	2,55		24	3,28		21	2,28

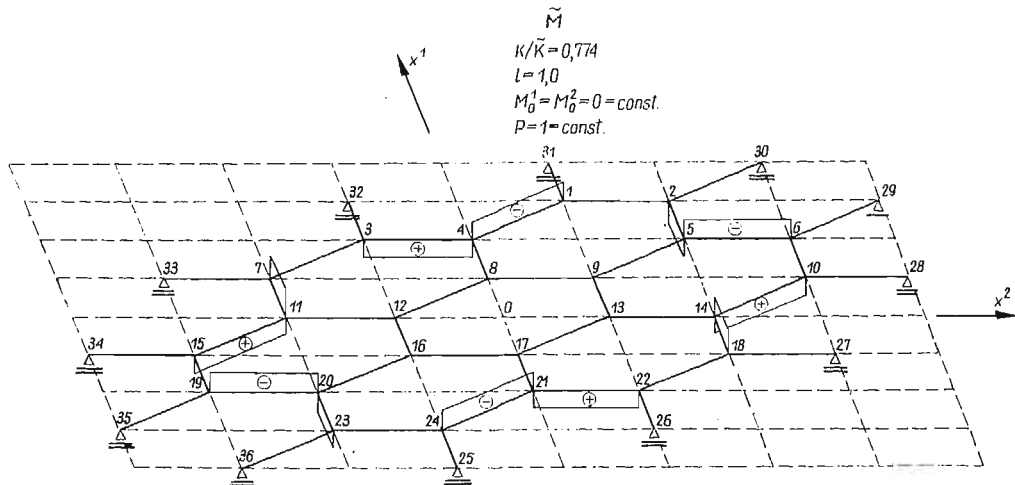
Objaśnienie do rys. 5:

preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$			
	31	0		8	0		11	-0,478		6	0		9	0		12	0		15	0		26	0
1	2	0	4	3	+0,478	7	33		10	28	0	13	14	0	16	17	0	19	20	-0,478	22	21	+0,478
	4	-0,478		1	-0,478		3	0		14	+0,478		17	0		20	0		35	0		18	0
	5	+0,478		2	+0,478		4	0		7	-0,478		18	-0,478		21	0		23	+0,478		20	+0,478
2	1	0	5	6	-0,478	8	9	0	11	12	0	14	13	0	17	16	0	20	19	-0,478	23	24	0
	30	0		9	0		12	0		15	+0,478		10	+0,478		13	0		16	0		36	0
	32	0		10	0		13	0		16	0		19	0		14	-0,478		71	0		25	0
3	4	+0,478	6	5	-0,478	9	8	0	12	11	0	15	34	0	18	27	0	21	22	+0,478	24	23	0
	7	0		29	0		5	0		8	0		11	+0,478		22	0		24	-0,478		21	-0,478

Dla przykładu na rys. 4 i 5 przedstawione zostały wyniki obliczeń dla rusztu swobodnie podpartego na obwodzie i obciążonego w węzłach jedynie siłami  $P = \text{const}$ , przy stosunku sztywności  $\kappa = 0,774$ . Odpowiada to dla współczynnika Poissona  $\nu = 0,29$  (dla stali) przekrojowi pierścieniowemu pręta.



Rys. 4



Rys. 5

## 6. Wnioski

Przedstawiona metoda rozwiązywania prętowych rusztów heksagonalnych daje pełne rozwiązanie postawionego zagadnienia, w którym uwzględnia się równocześnie skręcanie prętów. Możliwość rozwiązywania rusztów poddanych złożonym obciążeniom oraz posiadających dowolne kształty wyraźnie przemawia za rozwiązaniami numerycznymi jako znacznie efektywniejszymi niż metody analityczne.

Wprowadzenie operatorów różnicowych do równań macierzowych pozwoliło zapisać w sposób bardzo przejrzysty i zwięzły stan równowagi węzłów. Ponadto wykorzystując te równania, bez dodatkowych obliczeń, otrzymujemy gotowy ogólny układ równań algebraicznych liniowych z niewiadomymi przemieszczeniami. Zastosowanie do rozwiązywania tego układu procedury «DET GAUSS PASMOWY» pozwala na obliczanie tego typu konstrukcji zawierających dość dużą liczbę węzłów, ze względu na wykorzystanie pasmowego charakteru macierzy współczynników układu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. F. CORNOCK, *The numerical solutions of Poisson's and the bi-harmonic equations by matrices*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **50** (1954).
2. W. GUTKOWSKI, C. P. UGARTE, *A generalized micro-approach of two dimensional structures*, Department of Civil Engineering, University of Delaware, **9** (1967).
3. W. GUTKOWSKI, J. OBRĘBSKI, *Ruszt o sześciokątnej siatce prętów*, Rozpr. Inżyn., **19**, 3 (1971).
4. W. M. JENKINS, *Matrix and digital computer methods in structural analysis*, McGraw-Hill, London 1969.
5. C. JORDAN, *Calculus of finite differences*, Chelsea Pub. Com., New York 1950.
6. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Gęste heksagonalne siatki sprężyste*, Mech. Teoret. i Stos., **3**, 8 (1970).
7. S. PASZKOWSKI, *Język ALGOL 60*, PWN, Warszawa 1968.
8. P. R. PATHARE, *A computational technique for the efficient handling of the large matrices in the analysis of large space structures*, «Space structures», Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967.
9. J. D. RENTON, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, «Space structures», Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967.
10. A. F. SMIRNOW, A. W. ALEKSANDROW, N. N. SZAPOSZNIKOW, B. J. ŁASZCZENIKOW, *Obliczanie konstrukcji za pomocą maszyn cyfrowych*, ARKADY, Warszawa 1970.

#### Р е з ю м е

#### ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ДЛЯ РЕШЕНИЯ РОСТВЕРКОВ С РЕГУЛЯРНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СЕТКОЙ

Изложен метод численного решения регулярного гексагонального плоского ростверка, состоящего из прямых упругих стержней, образующих в плоскости сетку правильных шестиугольников. Ростверк нагружен в узлах силами, перпендикулярными к плоскости сооружения, и моментами, векторы которых расположены в той же плоскости.

Метод иллюстрируется на примере ростверка вписанного в круг, диаметр которого равен приблизительно восьми длинам стержней сетки.

#### S u m m a r y

#### APPLICATION OF DIGITAL COMPUTERS TO THE SOLUTION OF REGULAR HEXAGONAL GRIDWORKS

The paper presents the method of numerical solution of regular, hexagonal plane grids consisting of straight elastic rods which form a network of regular hexagons. The grid is loaded at its nodes by the forces perpendicular to the plane and by the couples with vectors lying in the plane of the structure. The considerations are illustrated by a solution of a gridwork bounded by a circle of a radius approximately equal to eight lengths of the rods of the lattice.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 marca 1971 r.