MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 10 (1972)

ANALOGIA MECHANICZNO-STEREOMECHANICZNA W KLASIE WIELOWSKAŹNIKOWYCH RÓWNAŃ LAGRANGE'A DRUGIEGO RODZAJU

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wstęp

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju są dziś powszechnie wykorzystywane do zagadnień dynamiki nie tylko przez mechaników. Stosują je również z powodzeniem elektrycy, a przede wszystkim automatycy, chociaż na ogół ich układy dynamiczne nie posiadają interpretacji geometrycznej.

Stosowalność tych równań jest dotychczas ograniczona najwyżej do ciągu jednowskaźnikowego (czasem wektora) zmiennych lub współrzędnych uogólnionych. Istnieje w literaturze także postać krakowianowa tych równań [1].

W rozwijającej się teorii szeroko pojmowanych systemów wielkich [2] zawierających również i układy mechaniczne, korzystne jest wprowadzenie zmiennych uogólnionych więcej niż jednowskaźnikowych. Przydatna do tego jest algebra i analiza ciągów wielowskaźnikowych [3, 4], których przypadkami szczególnymi mogą być wektory, macierze, krakowiany i nawet tensory. Dogodne jest również formułowanie zagadnień przy użyciu równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych [5] w przypadku systemów wielkich o strukturze dyskretnej.

Duże znaczenie ma także uzasadnianie licznych analogii między rozmaitymi zjawiskami (na przykład mechanicznymi, stereomechanicznymi, elektrycznymi oraz innymi), jak też i modelowanie odmiennych zjawisk za pomocą analogii w klasach pewnych przekształceń wielociągowych.

Dotychczas nie uzasadniono analogii mechaniczno-stereomechanicznej w klasie równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Autor uczynił to w pracy [6] rozważając najpierw ciąg jednowskaźnikowy równań, którego przypadkiem szczególnym jest jedno równanie. W pracy [7] uogólniono je na przypadek równań dwuwskaźnikowych.

Obecnie pokażemy, że dzięki algebrze i analizie w-ciągów (gdzie w jest dowolną liczbą naturalną), czyli ciągów wielowskaźnikowych można otrzymać wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju w stereomechanice, podobnie jak to uczyniono w pracy [8] dla mechaniki.

Uzasadnienie analogii mechaniczno-stereomechanicznej (M–SM) polega na podaniu pewnej równoważności

$$M \rightleftarrows SM$$

wynikającej z równoważności

$$\overline{C}(M) \rightleftarrows \overline{C}(SM)$$

ciągów rozważań logicznych obu nauk.

Przez ciąg rozważań logicznych rozumiemy tu uporządkowane przedstawienie pewnej liczby pojęć pierwotnych, definicji, aksjomatów i twierdzeń (zasad) w językach obu rozważanych nauk.

Istnieje ciąg rozważań logicznych w mechanice, za pomocą którego możemy otrzymać wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju [8] bez stosowania rachunku wariacyjnego.

Wyprowadzimy je obecnie w terminologii stereomechanicznej z użyciem ciągów w-wskaźnikowych i tym samym uzasadnimy analogię mechaniczno — stereomechaniczną w klasie tych równań wielowskaźnikowych. Uzyskane w taki sposób równania zastosujemy następnie do otrzymania równań wielowskaźnikowych tak zwanego oscylatora stereomechanicznego jako funkcji stanu sprężystego wyboczenia systemu wielkiego prętów. Taki układ wielokrotny prętów rozważaliśmy w pracy [9]. Pokazano tam, że jego równania różniczkowe wielociągowe ruchu (przez analogię) są naturalnym uogólnieniem klasycznego zagadnienia jednego pręta sprężystego poddanego wyboczeniu [10]. Uogólnienie to wynika z algebry i analizy ciągów wielowskaźnikowych.

Dzięki użyciu w-ciągów można rozważać wyboczenie sprężyste systemu wielkiego prętów[1]) prawie tak samo, jak w przypadku wyboczenia jednego pręta. To samo dotyczy wyprowadzenia wielowskaźnikowych równań Lagrange'a i uzasadnienia analogii mechaniczno-stereomechanicznej. Jest to konsekwencją zdefiniowania pewnych działań na ciągach wielowskaźnikowych. W efekcie mamy swoistą niezmienniczość tak ciągów rozważań logicznych, jak i wzorów dla każdego $q = 0, 1, \dots, w$, gdzie q jest liczbą wskaźników rozważanych uogólnionych współrzędnych wielowskaźnikowych.

Dodamy przy tym, że wielowskaźnikowe prawo Hooke'a sformułowano w pracach [11, 12]. Korzystając z tego prawa możemy także otrzymać równanie wielociągowe oscylatora stereomechanicznego, w którym wielkością poszukiwaną jest ciąg wielowskaźnikowy ugięć systemu wielkiego prętów sprężystych poddanych wyboczeniu.

Nadmieniamy, że zastosowana algebra i analiza ciągów wielowskaźnikowych nie wymaga znajomości rachunku tensorowego.

Przypomnimy jeszcze dwa niezbędne pojęcia dotyczące istoty formułowanego obecnie uogólnienia względem prac [6, 7].

1.1. Ciągi wielowskaźnikowe (w-ciągi). Niech przy danej liczbie naturalnej w i danym ciągu liczb naturalnych n_q, $q = 1, \dots, w$, symbol Z oznacza dowolny zbiór, natomiast ${}^{w}\overline{K}$ przedstawia zbiór elementów ${}^{w}\overline{k}$, które są iloczynami kartezjańskimi

$$\prod_{q=1}^{w} \{n_q\} = \{n_1\} \times \dots \times \{n_w\}$$

[1]) System prętów jest wielki, jeśli opisuje go ciąg jednowskaźnikowy o dużej liczbie elementów lub ciąg wielowskaźnikowy wielkości.

zbiorów

$$\{n_1\} = \{1, \ldots, n_1\},$$
$$\vdots$$
$$\{n_w\} = \{1, \ldots, n_w\}$$

zwanych odcinkami naturalnymi o długościach $\{n_q\}$.

Definicja 1. w-ciągiem nazywamy każdą funkcję (odwzorowanie) r typu

$$r : {}^w\bar{k} \in {}^w\bar{K} \to Z$$

i zapisujemy w postaci

$${}^w\bar{r} = [r_{j_1 \ldots j_w}] = [r_{\bar{j}}],$$

$$\bar{j} = [j_1 \ldots j_w], \quad j_q = 1, \ldots, n_q; \quad q = 1, \ldots, w.$$

W pracy [6] rozważono jednociągi

$$\bar{r} = [r_{j_1}], \ j_1 = 1, \ldots, n_1$$

zmiennych uogólnionych, czyli przypadek $w = 1$. W pracy [7] uwzględniono dwuciągi

$${}^2\bar{r} = [r_{j_1 j_2}], \quad j_1 = 1, \ldots, n_1; \ j_2 = 1, \ldots, n_2$$

zmiennych uogólnionych, czyli przypadek $w = 2$.
Obecnie założymy, że w może być dowolną liczbą naturalną.

Algebrę i elementy analizy wielociągów podano w pracach [3, 4].

1.2. Równanie różniczkowe zwyczajne wielociągowe rzędu n.

Definicja 2. Równanie różniczkowe zwyczajne wielociągowe rzędu n ma postać

$${}^k\bar{F}[x, {}^k\bar{y}(x), {}^k\bar{y}'(x), \ldots, {}^k\bar{y}^{(n)}(x)] = {}^k\bar{0},$$

gdzie ciąg k-wskaźnikowy funkcji ${}^k\bar{F}$ jest ciągły[2]) względem swoich argumentów, przy czym strona lewa zależy od k-ciągu najwyższych pochodnych ${}^k\bar{y}^{(n)}(x)$ funkcji wielociągowej ${}^k\bar{y}(x)$ argumentu zerociągowego x.

Prostym przykładem takiego równania w-ciągowego jest wielowskaźnikowe równanie oscylatora harmonicznego, którego przypadek szczególny stanowi równanie

$${}_1ay'' + {}_2ay = 0, \text{ gdzie } {}_1a, {}_2a \text{ — stałe},$$

opisujące wyboczenie sprężyste jednego pręta [10].

Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju służy do:

1° otrzymania równań wyboczenia sprężystego układu wielokrotnego prętów opisanego ciągiem wielowskaźnikowym ugięć za pomocą wyprowadzonych równań Lagrange'a opisujących zjawisko stereomechaniczne wyboczenia systemu wielkiego prętów sprężystych;

2° wykazania, że dane zagadnienie wyboczenia systemu wielkiego prętów jest ruchem.

---

[2]) Oznacza to, że wszystkie wyrazy $F_{\bar{j}}$ k-ciągu ${}^k\bar{F}$ są funkcjami ciągłymi.

2. Ruch dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego. Więzy

Będziemy rozważali przestrzeń ciągów w-wskaźnikowych [3, 4]

$$(2.1)\qquad {}^{w}\bar{y} = {}^{w}\bar{y}(x), \qquad x \in < x_1, x_2 >$$

utworzoną z rozwiązań równań różniczkowych w-ciągowych rzędu n

$$(2.2)\qquad {}^{w}\bar{y}^{(n)} = {}^{w}\bar{f}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}', \ldots, {}^{w}\bar{y}^{(n-1)}),$$

których prawe strony są funkcjami ciągłymi i posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej.

D e f i n i c j a 1. Ruchem (jednoparametrowym) układu stereomechanicznego wielokrotnego ${}^{w}\bar{y}$ nazywamy każdą funkcję (2.1) lub w postaci uwikłanej

$$(2.3)\qquad {}^{w}\bar{U}(x, {}^{w}\bar{y}) = {}^{w}\bar{0}.$$

D e f i n i c j a 2. Prędkością ${}^{w}\bar{y}^{(k)}(x)$ rzędu k; $k = 1, \ldots, n$, ruchu układu stereomechanicznego wielokrotnego (2.1) nazywamy k-tą pochodną funkcji (2.1), czyli

$$(2.4)\qquad {}^{w}\bar{y}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\,{}^{w}\bar{y}(x).$$

D e f i n i c j a 3. Równanie (2.2) lub w postaci uwikłanej

$$(2.5)\qquad {}^{w}\bar{G}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}', \ldots, {}^{w}\bar{y}^{(n-1)}, {}^{w}\bar{y}^{(n)}) = {}^{w}\bar{0}$$

nazywamy równaniem (stanu) ruchu układu stereomechanicznego wielokrotnego.

D e f i n i c j a 4. Więzami ruchu układu stereomechanicznego wielokrotnego (2.1) nazywamy niezależne od siebie związki

$$(2.6)\qquad {}^{v}\bar{H}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}', \ldots, {}^{w}\bar{y}^{(n-1)}) = {}^{v}\bar{0},$$

posiadające ciągłe pierwsze pochodne w rozważanym otoczeniu zmiennych $x, {}^{w}\bar{y}$, ${}^{w}\bar{y}', \ldots, {}^{w}\bar{y}^{(n-1)}$.

Przyjmujemy, że badane zjawisko może podlegać pewnym ograniczeniom.

Postulat 1. Istnieje absolutna zmienna niezależna x.

Postulat 2. Istnieje inercjalny układ odniesienia.

Postulat 4. Słuszne są prawa Newtona z tym, że czas absolutny t jest zastąpiony absolutną zmienną niezależną x.

U w a g a. Jeśli ograniczymy się do przykładu wyboczenia sprężystego pręta pryzmatycznego o długości skończonej, to $y(x)$ jest jego ugięciem w przekroju opisanym odciętą x.

W przypadku $n = 2$ otrzymujemy z (2.2) równania ruchu układu stereomechanicznego

$$(2.7)\qquad {}^{w}\bar{y}'' = {}^{w}\bar{f}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}')$$

analogiczne do newtonowskich równań ruchu [8]

$${}^{w}\bar{r}'' = {}^{w}\bar{f}(t, {}^{w}\bar{r}, {}^{w}\bar{r}').$$

Wynika to stąd, że zamiast proporcji

$$\frac{d^2}{dt^2}\,{}^{w}\bar{r}(t) \sim {}^{w}\bar{r}(t)$$

istotnej w przypadku oscylatora mechanicznego wielowskaźnikowego słuszna jest proporcja

$$\frac{d^2}{dx^2}{}^{w}\bar{y}(x) \sim {}^{w}\bar{y}(x),$$

którą otrzymujemy z uwzględnienia wielowskaźnikowej linii ugięcia.

Definicja 1.1. Równanie (2.7) nazywamy równaniem ruchu układu stereomechanicznego (2.1) przez analogię do newtonowskich równań ruchu.

Wtedy więzy stereomechaniczne przez analogię do więzów mechanicznych mogą przyjmować postać

$$(2.8) \qquad {}^{v}\bar{H}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}') = {}^{v}\bar{0}$$

— nieholonomiczne (różniczkowe lub kinematyczne),

$$(2.9) \qquad {}^{v}\bar{H}(x, {}^{w}\bar{y}) = {}^{v}\bar{0}$$

— holonomiczne reonomiczne (skończone lub geometryczne),

$$(2.10) \qquad {}^{v}\bar{H}({}^{w}\bar{y}) = {}^{v}0$$

— holonomiczne skleronomiczne.

Dla stereomechanicznych równań ruchu formułujemy zagadnienie Cauchy'ego.

Definicja 5. Siłą stereomechaniczną przez analogię do siły newtonowskiej

$$\bar{F} = m\,\bar{a}, \qquad m \text{ — masa}, \qquad \bar{a} \text{ — przyśpieszenie},$$

nazywamy funkcję liniową

$$(2.11) \qquad {}^{w}\bar{F} = {}^{w}\overline{EJ}//{}^{w}\bar{y}'' = [{}^{w-1}(\overline{EJ})_1//{}^{w-1}\bar{y}_1'', \ldots, {}^{w-1}(\overline{EJ})_{n_{w-1}}//{}^{w-1}\bar{y}_{n_{w-1}}'']$$

daną za pomocą p-iloczynu[3]), gdzie

$$(2.12) \qquad {}^{w}\bar{F} = {}^{w}\bar{F}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}'),$$

przy czym

$${}^{1}\bar{F} = \overline{EJ}\,\bar{y}'' = [E_1 J_1 y_1'', \ldots, E_n J_n y_n''].$$

Definicja 6. Związki (2.1), (2.12) nazywamy równaniami ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego wielokrotnego.

Definicja 6.1. Dynamiczne układy stereomechaniczne spełniające równania więzów nazywamy układami nieswobodnymi.

Prawa ruchu dynamicznych układów stereomechanicznych są uogólnieniem praw ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego zerowskaźnikowego[4])

$$EJy'' = f(x, y, y'),$$

gdzie EJ jest sztywnością pręta pryzmatycznego o długości skończonej. Wymagają one kilku dalszych pewników zgodnych z doświadczeniem.

---

[3]) Symbol // oznacza mnożenie dwóch ciągów wielowskaźnikowych w sensie p-iloczynu [3]. Przypadek ciągów dwuwskaźnikowych ilustrujący te pojęcia rozważono w pracy [7].

[4]) W równaniach wielociągowych konkretnych EJ jest na ogół ciągiem $2w$ — wskaźnikowym sztywności wzajemnych układu stereomechanicznego wielokrotnego jako systemu wielkiego [9].

Postulat IV. Z istnienia więzów i ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego wielokrotnego po nich (ruchu zgodnego z więzami) wynika istnienie sił działania (reakcji) więzów ${}^{w}\overline{R}$ na układ i odwrotnie.

Postulat V. Pod wpływem sił ${}^{w}\overline{F}$ nieswobodny dynamiczny układ stereomechaniczny wielokrotny ${}^{w}\bar{y}$ porusza się, jak układ dynamiczny wielokrotny swobodny pod działaniem sumy sił danych i oddziaływań więzów, czyli w inercjonalnym układzie odniesienia spełnione są równania ruchu

$$ {}^{w}\overline{EJ}\,//\,{}^{w}\bar{y}'' = {}^{w}\overline{F} + {}^{w}\overline{R}, $$

przy czym współrzędne $y_{\bar{j}}$ w-ciągu ${}^{w}\bar{y}$ spełniają odpowiednie równania więzów.

U w a g a. Siły, które nie są spowodowane działaniem więzów nazywamy siłami czynnymi.

Będziemy rozważali tylko takie więzy różniczkowe, które są spełnione liniowo przez prędkość (2.4) dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, to znaczy v-ciągi równań

$$ {}^{w}\bar{l} \underset{\sqcup}{\asymp} {}^{w}\bar{y}' = {}^{v}\overline{D}, \tag{2.13} $$

wynikające z ogólnej definicji więzów

$$ {}^{v}\overline{H}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}') = \bar{0}, \tag{2.14} $$

przy czym ${}^{w}\bar{l}$ i ${}^{v}\overline{D}$ są funkcjami x, ${}^{w}\bar{y}$ i nie wszystkie $l_{\bar{j}}$ są równe zeru, natomiast symbol $\asymp$ oznacza mnożenie dwóch ciągów wielowskaźnikowych w sensie m-iloczynu, a $\underset{\sqcup}{\asymp}$ przedstawia ciąg sum m-iloczynu [3][5]).

3. Przemieszczenia możliwe. Przemieszczenia przygotowane

Niech dany dynamiczny układ stereomechaniczny wielokrotny

$$ {}^{w}\bar{y} = [y_{\bar{j}}] \tag{3.1} $$

spełnia więzy skończone

$$ {}^{v_1}\overline{H}(x, {}^{w}\bar{y}) = {}^{v_1}\bar{0}, \tag{3.2} $$

które zastępujemy wynikającymi z nich więzami różniczkowymi

$$ \frac{\partial\, {}^{v_1}\overline{H}}{\partial\, {}^{w}\bar{y}} \underset{\sqcup}{//} {}^{w}\bar{y}' + \frac{\partial\, {}^{v_1}\overline{H}}{\partial x} = {}^{v_1}\bar{0} \tag{3.3} $$

i więzy różniczkowe o których zakładamy, że są liniowe, czyli

$$ {}^{w}\bar{l} \underset{\sqcup}{\asymp} \bar{y}' = {}^{v_2}\overline{D}, \tag{3.4} $$

gdzie symbol $//$ oznacza ciąg sum p-iloczynu tensorowego różniczkowego rzędu pierwszego funkcji wielowskaźnikowej argumentu wielowskaźnikowego [3][6])

[5]) Przypadek ciągów dwuwskaźnikowych ilustrujący te pojęcia rozważono w pracy [7].

[6]) Uwaga identyczna, jak w notce [5]).

D e f i n i c j a 7. Prędkość ${}^w\bar{y}'(x)$ dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego znajdującego się w położeniu

$$ {}^w\bar{y} = {}^w\bar{A} $$

nazywamy prędkością możliwą (zgodną z więzami) w tym położeniu, jeżeli układ może ją posiadać w miejscu x, co zachodzi wtedy, gdy ta prędkość spełnia równania liniowe więzów (3.3) i (3.4).

D e f i n i c j a 8. Przez analogię do $d\bar{r} = \bar{r}'dt$, $\bar{r}$ — wektor promień punktu materialnego, układ nieskończenie małych przemieszczeń

$$ d{}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}'dx, $$

gdzie ${}^w\bar{y}'(x)$ jest prędkością możliwą dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, nazywamy nieskończenie małym przemieszczeniem[7]) możliwym tego układu.

Przemieszczenia możliwe spełniają równania

$$ \frac{\partial\, {}^{v_1}\bar{H}}{\partial\, {}^w\bar{y}} \underline{//}\, d\,{}^w\bar{y} + \frac{\partial\, {}^{v_1}\bar{H}}{\partial x}\, dx = {}^{v_1}\bar{0} \tag{3.5} $$

oraz

$$ {}^w\bar{I} \underline{)(}\, {}^w\bar{y}'\, dx = {}^{v_2}\bar{D}\, dx, $$

które otrzymujemy mnożąc obustronnie równanie (3.3) i (3.4) przez dx.

Niech będą dane dwa przemieszczenia możliwe

$$ d\,{}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}'\, dx \tag{3.6} $$

i

$$ d\,{}^w_1\bar{y} = {}^w_1\bar{y}'\, dx \tag{3.7} $$

odpowiadające przekrojowi x oraz temu samemu położeniu dynamicznego układu stereomechanicznego.

Spełniają one równania (3.5), natomiast ich różnica

$$ \delta\,{}^w\bar{y} = d\,{}^w_1\bar{y} - d\,{}^w\bar{y} \tag{3.8} $$

spełnia związki jednorodne

$$ \frac{\partial\, {}^{v_1}\bar{H}}{\partial\, {}^w\bar{y}} \underline{//}\, {}^w\bar{y} = {}^{v_1}\bar{0} \tag{3.9} $$

oraz

$$ {}^w\bar{I} \underline{)(}\, \delta\,{}^w\bar{y} = {}^{v_2}\bar{0}. \tag{3.10} $$

D e f i n i c j a 9. Różnicę (3.8) nazywamy przemieszczeniem przygotowanym (wirtualnym) dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego (3.1) w przekroju x dla pewnego położenia możliwego.

---

[7]) Mamy tu na myśli przemieszczenie uogólnione $d{}^w\bar{y}$ jako iloczyn dx oraz prędkości ${}^w\bar{y}'$, charakteryzującej zjawisko stereomechaniczne w układzie stereomechanicznym (systemie wielkim) w-wskaźnikowym.

4. Podstawowe zagadnienie dynamiki układów stereomechanicznych wielokrotnych. Więzy idealne

Oznaczmy wymiary wewnętrzne w-ciągu, v_1-ciągu i v_2-ciągu przez

$$\text{Dim}\ {}^{w}\bar{y} = u^{w}, \tag{4.1}$$

$$\text{Dim}\ {}^{v_1}\bar{H} = u^{v_1}, \tag{4.2}$$

$$\text{Dim}\ {}^{v_2}\bar{H} = u^{v_2}. \tag{4.3}$$

Równania (3.9) i (3.10) zawierają n^{w} niewiadomych współrzędnych w-ciągu ${}^{w}\bar{y}$. Jeśli równania te są niezależne, to wśród współrzędnych $\delta\, y_{\bar{J}}$ istnieje

$$n^{w} = u^{w} - u_1^{v_1} - u_2^{v_2}$$

współrzędnych niezależnych.

D e f i n i c j a 10. Liczbę n^{w} współrzędnych niezależnych w-ciągu $y_{\bar{J}}$ nazywa się liczbą stopni swobody danego dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, ściślej: n^{w}- krotnego.

Podstawowe zagadnienie dynamiki nieswobodnego układu stereomechanicznego wielokrotnego można sformułować następująco.

Należy określić ruch

$$ {}^{w}\bar{y} = {}^{w}\bar{y}(x), \quad x_1 < x < x_2 \tag{4.5}$$

układu ${}^{w}\bar{y}$ oraz oddziaływania więzów

$$ {}^{w}\bar{R} = {}^{w}\bar{R}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}') \tag{4.6}$$

przy danych siłach czynnych

$$ {}^{w}\bar{F} = {}^{w}\bar{F}(x, {}^{w}\bar{y}, {}^{w}\bar{y}') \tag{4.7}$$

i zgodnych z więzami jego położeniach początkowych

$$ {}^{w}_{0}\bar{y} = {}^{w}_{0}\bar{y}(x)|_{x=0} \tag{4.8}$$

oraz prędkościach początkowych

$$ {}^{w}_{0}\bar{y}' = {}^{w}_{0}\bar{y}'(x)|_{x=0}. \tag{4.9}$$

Jeśli nie jest znany charakter więzów, to nie są też wiadome oddziaływania ${}^{w}\bar{R}$ i zagadnienie jest nieokreślone, ponieważ liczba u^{w} niewiadomych $y_{\bar{J}}$, $R_{\bar{J}}$ jest większa od liczby równań

$$n^{w} + u^{w} > u^{w} + u_1^{v_1} + u_2^{v_2},$$

gdzie $n = u$.

Podstawowe zagadnienie dynamiki układu stereomechanicznego staje się określone, jeśli mamy

$$u^{w} + u^{w} - (u^{w} + u_1^{v_1} + u_2^{v_2}) = k^{w},$$

$$k^{w} = u^{w} - u_1^{v_1} - u_2^{v_2}$$

dodatkowych niezależnych związków między szukanymi wielkościami $\delta y_{\bar{J}}$. Związki te otrzymamy postulując istnienie klasy więzów idealnych.

Postulat VI. w-krotny iloczyn[8]) $\underset{w}{\underline{{}^{w}\overline{R}//\delta^{w}\overline{y}}}$, jako praca sił oddziaływania więzów na dowolnych (zgodnych z więzami) przemieszczeniach przygotowanych zeruje się, gdy nie występują siły tarcia, albo włączamy je do sił danych, to znaczy

$$\underset{w}{\underline{{}^{w}\overline{R}//\delta^{w}\overline{y}}} = 0. \tag{4.10}$$

D e f i n i c j a 11. Więzy stereomechaniczne nazywamy idealnymi, jeżeli siły oddziaływania ${}^{w}\overline{R}$ na punkty dynamicznego układu stereomechanicznego spełniają związek (4.10).

5. Ogólne równanie dynamiki układu stereomechanicznego

Rozważmy dynamiczny stereomechaniczny wielokrotny układ nieswobodny. Jego równanie ruchu ma postać

$${}^{w}\overline{EJ}//{}^{w}\overline{y}'' = {}^{w}\overline{F}+{}^{w}\overline{R}. \tag{5.1}$$

Jeśli więzy są idealne, to w każdym położeniu układu dowolne przemieszczenia przygotowane spełniają równanie (4.10)

$$\underset{w}{\underline{{}^{w}\overline{R}//\delta^{w}\overline{y}}} = 0.$$

Z układu tych dwóch związków wynika równość

$$\underset{w}{\underline{({}^{w}\overline{F}-{}^{w}\overline{EJ}//{}^{w}\overline{y}'')\delta^{w}\overline{y}}} = 0, \tag{5.2}$$

które nosi nazwę ogólnego równania dynamiki układu stereomechanicznego.

Podczas ruchu układu w dowolnym miejscu x (przekroju) suma prac sił czynnych i stereomechanicznych sił bezwładności[9]) na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zeru.

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ruch dynamicznego układu stereomechanicznego zgodny z więzami odpowiadał danemu układowi sił czynnych ${}^{w}\overline{F}$ jest spełnienie ogólnego równania dynamiki[10]).

6. Zasada przemieszczeń przygotowanych. Zasada D'Alemberta

D e f i n i c j a 12. Położeniem równowagi ${}^{w}_{0}\overline{y}$ dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego ${}^{w}\overline{y}$ nazywamy takie jego położenie, w którym układ znajduje się w sposób ciągły, jeśli w miejscu początkowym był on w tym położeniu i prędkości ${}^{w}\overline{y}'$ wszystkich jego punktów były równe zeru.

---

[8]) Symbol $w\llcorner\lrcorner$ oznacza sumę w-krotną p-iloczynu [3]. Przypadek ciągów dwuwskaźnikowych ilustrujący te pojęcia rozważono w pracy [7].

[9]) Stereomechanicznymi siłami bezwładności ${}^{w}\overline{B}$ nazywamy wyrażenie ${}^{w}\overline{B} = -{}^{w}_{k}\overline{EJ}//{}^{w}\overline{y}''$.

[10]) Należy pamiętać, że ogólne równanie dynamiki (5.2) jest w istocie układem równań, bowiem zamiast $\delta^{w}\overline{y}$ można w dowolnym miejscu x (przekroju) wstawić dowolne przemieszczenie przygotowane.

Położenie układu ${}^{w}_{0}\bar{y}$ jest wtedy i tylko wtedy położeniem równowagi, gdy ruch

$$ {}^{w}\bar{y}(x) \equiv {}^{w}_{0}\bar{y} \tag{6.1} $$

spełnia ogólne równanie dynamiki, to jest jeżeli w tym położeniu

$$ \underset{w}{\underline{{}^{w}\bar{F}//\delta{}^{w}\bar{y}}} = 0. \tag{6.2} $$

Równość ta jest treścią zasady przemieszczeń przygotowanych.

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby pewne (zgodnie z więzami) położenie dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego było położeniem równowagi, jest równa zeru w tym położeniu suma prac sił czynnych ${}^{w}\bar{F}$ na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych $\delta{}^{w}\bar{y}$.

Równość (6.2), wyznaczająca zasadę przemieszczeń przygotowanych jest przypadkiem szczególnym ogólnego równania dynamiki (5.2).

Potraktujmy równanie dynamiki jako zasadę przemieszczeń możliwych, charakteryzującą położenie równowagi dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, które powstaje z dodania sił bezwładności do sił czynnych.

Stąd wynika zasada d'Alemberta: Podczas ruchu dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego można dowolne jego położenia traktować jako położenia równowagi dodając siły bezwładności ${}^{w}\bar{B}$ do sił czynnych ${}^{w}\bar{F}$ w danym położeniu

$$ {}^{w}\bar{F}+{}^{w}\bar{B} = {}^{w}\bar{0}. \tag{6.3} $$

Dzięki tej zasadzie metody statyki przenoszą się na zagadnienia dynamiki.

7. Współrzędne niezależne (uogólnione) układów stereomechanicznych holonomicznych. Siły uogólnione

Niech będzie dany dynamiczny układ stereomechaniczny wielokrotny

$$ {}^{w}\bar{y} = [y_{\bar{j}}] $$

holonomiczny, czyli spełniający więzy

$$ {}^{v_1}\bar{H}(x, {}^{w}\bar{y}) = {}^{w}\bar{0}. \tag{7.1} $$

Przyjmujemy, że funkcje ${}^{v_1}\bar{H}$ w ilości $u_1^{v_1}$ są niezależne, przy czym x jest parametrem, natomiast zmiennych $y_{\bar{j}}$ jest n^{w}. Wobec powyższego można z równań więzów wyrazić $u_1^{v_1}$ współrzędnych (czyli v_1 — ciąg współrzędnych) przez $u^{w}-u_1^{v_1}$ pozostałych współrzędnych oraz zmiennej x i rozpatrywać te współrzędne w liczbie

$$ k^{w} = u^{w}-u_1^{v_1} \tag{7.2} $$

jako wielkości niezależne, określające położenia dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego w miejscu x. Takimi współrzędnymi niekoniecznie muszą być współrzędne kartezjańskie.

Także współrzędne kartezjańskie w-ciągu ${}^{w}\bar{y}$ (w ilości u^{w}) można wyrazić jako funkcje ciągłe i różniczkowalne s-ciągu parametrów niezależnych

$$ {}^{s}\bar{q} = [q_{j_1 \dots j_s}] \tag{7.3} $$

i zmiennej x, mianowicie

$$ {}^{w}\overline{y} = {}^{w}\overline{y}(x, {}^{s}\overline{q}), \tag{7.4} $$

przy czym

$$ \operatorname{Dim} {}^{s}\overline{q} = k^{w}. \tag{7.5} $$

Funkcje te spełniają tożsamościowo równania więzów podane wyżej.

Zakładamy ponadto, że dowolne (zgodne z więzami) położenia dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego w miejscu x można przy pewnych wartościach ${}^{s}\overline{q}$ otrzymać z równań (7.4).

D e f i n i c j a 13. Wielkości ${}^{s}\overline{q}$ występujące w równości (7.4) nazywamy współrzędnymi uogólnionymi niezależnymi dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego wielokrotnego.

Każdemu s-ciągowi współrzędnych uogólnionych ${}^{s}\overline{q}$ odpowiada s-ciąg sił uogólnionych ${}^{s}\overline{Q}$. Wprowadzamy je następująco.

Niech będzie dana praca δL sił czynnych ${}^{w}\overline{F}$ jako w-krotny iloczyn

$$ \delta L = \underbrace{{}^{w}\overline{F} // \delta\, {}^{w}\overline{y}}_{w}. \tag{7.6} $$

Przemieszczenia przygotowane są różniczkami przygotowanymi funkcji ${}^{w}\overline{y}(x, {}^{s}\overline{q})$

$$ \delta\, {}^{w}\overline{y} \doteq \frac{\partial\, {}^{w}\overline{y}}{\partial\, {}^{s}\overline{q}} \,\underline{//}\, \delta\, {}^{s}\overline{y} \tag{7.7} $$

przy ustalonym x.

Podstawienie związku (7.7) do (7.8) prowadzi do wyrażenia pracy elementarnej sił czynnych ${}^{w}\overline{F}$ przez dowolne przyrosty $\delta {}^{s}\overline{q}$ współrzędnych uogólnionych ${}^{s}\overline{q}$

$$ \delta L = \underbrace{{}^{w}\overline{F} // \left[\frac{\partial\, {}^{w}\overline{y}}{\partial\, {}^{s}\overline{q}} \,\underline{//}\, \delta\, {}^{s}\overline{q} \right]}_{w} = \underbrace{{}^{w}\overline{F} \,\underline{//} \left[\frac{\partial\, {}^{w}\overline{y}}{\partial\, {}^{s}\overline{q}} \right]^{T} // \delta\, {}^{s}\overline{q}}_{s} = \underbrace{{}^{s}\overline{Q} // \delta\, {}^{s}\overline{q}}_{s}. \tag{7.8} $$

D e f i n i c j a 14. Współczynniki ${}^{s}\overline{Q}$ przy $\delta\, {}^{s}\overline{q}$ wyrażające się wzorem

$$ {}^{s}\overline{Q} = {}^{w}\overline{F} \,\underline{//} \left[\frac{\partial\, {}^{w}\overline{y}}{\partial\, {}^{s}\overline{q}} \right]^{T}, \tag{7.9} $$

(gdzie T — symbol ciągu transponowanego) nazywamy siłami uogólnionymi.

8. Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju we współrzędnych niezależnych dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego

Równania te wyprowadzimy z równania ogólnego dynamiki

$$ \underbrace{({}^{w}\overline{F} - {}^{w}\overline{EJ} // {}^{w}\overline{y}'') // \delta\, {}^{w}\overline{y}}_{w} = 0. $$

Praca δL sił czynnych ${}^{w}\overline{F}$ w układzie kartezjańskim

$$ \delta L = \underbrace{{}^{w}\overline{F} // \delta\, {}^{w}\overline{y}}_{w} $$

we współrzędnych niezależnych ${}^s\overline{q}$ przyjmuje postać

$$\delta L = \underbrace{{}^s\overline{Q}//\delta\,{}^s\overline{q}}_{s},$$

gdzie według (7.9)

$$ {}^s\overline{Q} = {}^w\overline{F}\,\underline{//}\left[\frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}\right]^T. $$

Analogiczną postać ma praca δL_B sił bezwładności

$$\delta L_B = -\underbrace{{}^s\overline{B}//\delta\,{}^s\overline{q}}_{s}, \tag{8.1}$$

gdzie we współrzędnych niezależnych

$$ {}^s\overline{B} = ({}^w\overline{EJ}//{}^w\overline{y}'')\,\underline{//}\left[\frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}\right]^T = \frac{d}{dx}\left\{({}^w\overline{EJ}//{}^w\overline{y}')\,\underline{//}\left[\frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}\right]^T\right\} - ({}^w\overline{EJ}//{}^w\overline{y}')\,\underline{//}\frac{d}{dx}\frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}. \tag{8.2}$$

Ponadto stwierdzamy, że prędkość

$$ {}^w\overline{y}' = \frac{d}{dx}\,{}^w\overline{y}(x, {}^s\overline{q}) = \frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}\,\underline{//}\,{}^s\overline{q}' + \frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial x} \tag{8.3}$$

jest funkcją liniową ${}^s\overline{q}'$. Wobec tego

$$\frac{\partial\,{}^w\overline{y}'}{\partial\,{}^s\overline{q}'} = \frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}. \tag{8.4}$$

Dodatkowo z (8.3) mamy

$$\frac{\partial\,{}^w\overline{y}'}{\partial\,{}^s\overline{q}} = \frac{d}{dx}\frac{\partial\,{}^w\overline{y}}{\partial\,{}^s\overline{q}}. \tag{8.5}$$

Wobec powyższego po uwzględnieniu związków (8.4) i (8.5) równość (8.2) przyjmie postać

$$ {}^s\overline{B} = \frac{d}{dx}\left\{({}^w\overline{EJ}//{}^w\overline{y}')\,\underline{//}\left[\frac{\partial\,{}^w\overline{y}'}{\partial\,{}^s\overline{q}'}\right]^T\right\} - ({}^w\overline{EJ}\,\underline{//}\,{}^w\overline{y}')\frac{\partial\,{}^w\overline{y}'}{\partial\,{}^s\overline{q}} = \frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial\,{}^s\overline{q}'} - \frac{\partial T}{\partial\,{}^s\overline{q}}, \tag{8.6}$$

gdzie T jest energią kinetyczną przez analogię dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{{}^w\overline{EJ}//{}^w\overline{y}'^2}_{w} = \frac{1}{2}\underbrace{{}^w\overline{T}}_{w} \tag{8.7}$$

przy czym ${}^w\overline{T}$ jest ciągiem w-wskaźnikowym energii układu.

Z równania ogólnego dynamiki

$$\delta L + \delta L_B = 0, \tag{8.8}$$

lub po wykorzystaniu wyrażeń na prace mamy

$$\underbrace{({}^s\overline{Q} - {}^s\overline{B})//\delta\,{}^s\overline{q}}_{s} = 0. \tag{8.9}$$

Równość ta może zachodzić wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy $\delta^s\overline{q}$ są równe zeru[11]). Zatem związek (8.9) jest równoważny równości

$$^s\overline{B} = {^s\overline{Q}},$$

która zgodnie z (8.6) może być zapisana w postaci

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial^s\overline{q}'} - \frac{\partial T}{\partial^s\overline{q}} = {^s\overline{Q}}. \tag{8.10}$$

Ostatnia równość nosi nazwę równań Lagrange'a drugiego rodzaju lub równań Lagrange'a we współrzędnych niezależnych (uogólnionych) dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego. Są one słuszne również — jak wiadomo — w przypadku działania na układ sił posiadających potencjał, czyli przy uwzględnieniu energii potencjalnej.

9. Przykład

Przedstawimy przykład równań ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego wielokrotnego otrzymanych za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju wyprowadzonych w tej pracy.

Weźmy jeden pręt sprężysty o sztywności $EJ = a_1 = \text{const}$ poddany wyboczeniu siłą $P = a_2 = \text{const}$. W tym przypadku zerowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$a_1 y'' + a_2 y = 0.$$

Otrzymujemy je z zerowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

gdzie T jest energią kinetyczną pręta.

Weźmy następnie ciąg n prętów sprężystych usytuowanych na jednym odcinku i na przykład utwierdzonych sztywno jednym końcem. Swobodne końce są połączone sprężyście. Każdy pręt jest obciążony jedną siłą.

Jednowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$^2_1\overline{a}\,\overline{y}'' + {^2_2\overline{a}}\,\overline{y} = \overline{0},$$

czyli

$$\begin{aligned} &{_1a_{11}}y_1'' + \ldots + {_1a_{1n}}y_n'' + {_2a_{11}}y_1 + \ldots + {_2a_{1n}}y_n = 0, \\ &\vdots \\ &{_1a_{n1}}y_1'' + \ldots + {_1a_{nn}}y_n' + {_2a_{n1}}y_1 + \ldots + {_2a_{nn}}y_n = 0. \end{aligned}$$

Otrzymujemy je z jednowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial^1\overline{y}'} - \frac{\partial T}{\partial^1\overline{y}} = {^1\overline{0}},$$

które wyprowadzono w pracy [6].

[11]) Wynika to stąd, że współrzędne niezależne s-ciągu $^s\overline{q}$ mają zupełnie dowolne przyrosty $\delta^s\overline{q}$.

W przypadku ogólnym mamy $n_1, \ldots, n_w$ prętów sprężystych usytuowanych na przykład sztywno jednymi końcami w płaszczyźnie. Końce swobodne są połączone sprężyście. Każdy pręt jest obciążony jedną siłą.

Wielowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$^{2w}_{1}\bar{a}\,{}^{w}\bar{y}'' + {}^{2w}_{2}\bar{a}\,{}^{w}\bar{y} = {}^{w}\bar{0},$$

przy czym charakter przyjętych iloczynów wyjaśniono w pracach [3, 4]. Równania te otrzymujemy z wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial T}{\partial\, {}^{w}\bar{y}'} - \frac{\partial T}{\partial\, {}^{w}\bar{y}} = {}^{w}\bar{0}$$

wyprowadzonych w niniejszej pracy.

Rozważania szczegółowe dotyczące wykorzystania tych równań (z podaniem ciągu wielowskaźnikowego energii) do otrzymania przytoczonych równań ruchu przez analogię zawarte są w pracy [13]. Przypadek ciągów dwuwskaźnikowych ugięć ilustrujący rozważane w tej pracy pojęcia rozpatrzono w pracy [7], która tym samym jest przykładem do powyższych wywodów wielowskaźnikowych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. Złonkiewicz, *A cracovien method for solving equations of motion of dynamics systems*, Rozpr. Inż., **11** (1963).
2. R. Kulikowski, *Sterowanie w wielkich systemach*, WNT, Warszawa 1970.
3. R. Krzywiec, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagadn. Drgań Nieliniowych, 11, PWN, Warszawa 1970.
4. R. Krzywiec, *Wielociągi* (praca doktorska).
5. R. Krzywiec, *O stabilności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych w-ciągowych* (w druku).
6. R. Krzywiec, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Zagadn. Drgań Nieliniowych (w druku).
7. R. Krzywiec, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie dwuwskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mech. Teoret. i Stos., 2, **8**, (1970).
8. R. Krzywiec, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadn. Drgań Nieliniowych, 11, PWN, Warszawa 1970.
9. R. Krzywiec, *Wyboczenie sprężyste układu wielowskaźnikowego prętów jako ruch przez analogię*, Archiwum Budowy Maszyn, **18** (1971).
10. M. T. Huber, *Stereomechanika Techniczna*, 1951.
11. R. Krzywiec, *Wielowskaźnikowe prawo Hooke'a wielkich systemów stereomechanicznych*, Archiwum Budowy Maszyn (w druku).
12. R. Krzywiec, *Uogólnione prawo Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych (w druku).

Резюме

МЕХАНИКО-СТЕРЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ В КЛАССЕ МНОГОИНДЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

В статье сформулирована и обоснована механико-стереомеханическая аналогия для класса многоиндексных уравнений Лагранжа второго рода, которые используются для вывода (по аналогии) уравнений движения большой многоиндексной системы стержней в условиях упругой потери устойчивости.

Summary

THE MECHANICAL-STEREOMECHANICAL ANALOGY IN THE CLASS OF MULTI-INDICIAL LAGRANGE EQUATIONS OF SECOND KIND

In the paper the mechanical-stereomechanical analogy is formulated and proved to hold true within the class of multi-indicial Lagrange equations of second kind; these equations have been derived and applied in order to obtain (by the analogy) the equations of motion of a multi-indicial great system of rods subject to elastic buckling.

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 27 września 1970 r.; po raz drugi dnia 1 marca 1971 r.