

WPLYW JEDNOCZESNEGO NIEJEDNORODNEGO TARCIA WEWNĘTRZNEGO
I ZEWNĘTRZNEGO NA STATECZNOŚĆ UKŁADÓW NIEKONSERWATYWNYCH

ANTONI GAJEWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

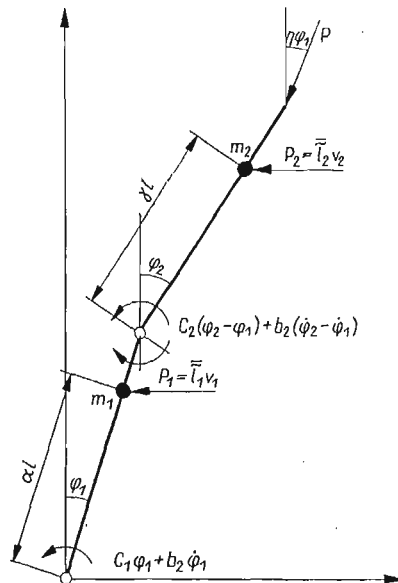
W ostatnich latach wiele uwagi poświęcono paradoksalnemu zjawisku destabilizacji tzn. znacznemu obniżeniu siły krytycznej, powodującej utratę stateczności ruchu układów niekonserwatywnych, w których uwzględniono tarcie wewnętrzne materiału i zastosowano kinetyczne kryterium stateczności; destabilizacja występuje nawet w przypadku, gdy parametr charakteryzujący to tarcie zmierza do zera. Po raz pierwszy zwrócił uwagę na to zjawisko ZIEGLER [14], a w dalszym ciągu ZORIJ i LEONOW [15] zbadali szczegółowo tzw. model Zieglera (układ dwóch sztywnych prętów połączonych przegubowo), obciążony niekonserwatywną siłą ściskającą, dla dowolnych wartości współczynnika śledzenia. Założyli oni, że w przegubach występują momenty tłumiące ruch proporcjonalne do względnej prędkości kątowej prętów modelu. Identyczne zagadnienie rozwiązano w pracach HERRMANNNA i JONGA [4, 5]. Efekt destabilizacji zbadano również w pracy NEMAT-NASSERA, PRASADA i HERRMANNNA [10] na przykładzie wspornikowej, ciągłej rurki przewodzącej płyn ze stałą prędkością. Wykazano, że dowolnie małe siły zależne od prędkości, takie jak zewnętrzne tłumienie i siły Coriolisa mają wpływ destabilizujący, natomiast zewnętrzne tłumienie wiskotyczne nie ma takiego wpływu. Ponadto NEMAT-NASSER i HERRMANN [11] udowodnili, że obciążenia krytyczne, powodujące utratę stateczności układu dyskretnego o N stopniach swobody bez tłumienia, jest kresem górnym dla obciążenia krytycznego tego samego układu poddanego dodatkowo działaniu pewnych dowolnie małych sił, będących liniowymi funkcjami uogólnionych prędkości. Ostatnio w pracy SHIELDA [12] zastosowano uogólnioną metodę wariacyjną do problemów niekonserwatywnych oraz rozwiązano problem stateczności pręta wspornikowego ściskanego siłą śledzącą, z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego (materiał pręta opisany jest modelem Voigta-Kelvina). Porównano wyniki uzyskane za pomocą metody Galerkina z wynikami ścisłymi.

We wszystkich wymienionych pracach uwzględniano niezależnie od siebie tłumienie wewnętrzne lub tłumienie zewnętrzne (opór wiskotyczny). Dopiero DŻYGADŁO i SOLARZ badając wymuszone, parametryczno-samowzbudne i wymuszone parametrycznie pobudzone drgania pręta ściskanego okresowo zmienną lub stałą siłą śledzącą wyznaczyli siłę krytyczną w zależności od parametrów charakteryzujących tłumienie wewnętrzne (model Voigta-Kelvina) i zewnętrzne (opór wiskotyczny).

Celem niniejszej pracy również jest uwzględnienie wpływu obu tych oporów równocześnie na siłę krytyczną, a ponadto zbadanie wpływu niejednorodności tarcia wewnętrznego i zewnętrznego. W części drugiej przeanalizujemy stateczność modelu ZIEGLERA [14], (podwójne wahadło), w którym przyjmiemy dodatkowo istnienie tarcia wiskotycznego w przegubach oraz działanie, na sztywne pręty modelu, skupionych sił oporu, proporcjonalnych do liniowych prędkości w punktach zaczepienia tych sił. W części trzeciej zbadamy stateczność rzeczywistego pręta wspornikowego ściskanego siłą niekonserwatywną o zmieniającym się kierunku (w pełnym zakresie współczynnika śledzenia), zakładając, że materiał pręta może być opisany modelem Voigta-Kelvina (tłumienie wiskotyczne) oraz że pręt porusza się w ośrodku lepkiem o tarcie wiskotycznym (tłumienie zewnętrzne). Wyniki uzyskane w części drugiej będą ścisłymi dla modelu, natomiast w części trzeciej zastosujemy przybliżoną metodę energetyczną, równoważną metodzie Ritz'a.

2. Destabilizacja modelu Zieglera

2.1. Podwójne wahadło przedstawione na rys. 1 poddane jest działaniu ściskającej siły niekonserwatywnej. Kierunek działania siły po wyboczeniu modelu określony jest przez współczynnik śledzenia η , zdefiniowany jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem



Rys. 1

siły (po wyboczeniu) a nieodkształconą osią modelu do kąta nachylenia stycznej na swobodnym końcu. Założymy, że przeguby scharakteryzowane są przez stałe sprężystości c_1 i c_2 oraz przez współczynniki b_1 i b_2 , określające tłumienie (momenty tłumiące są odpowiednio równe: $b_1\dot{\varphi}_1$ i $b_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$), a masy m_1 i m_2 umieszczone są w odległościach αl i γl od przegubów). Przyjmujemy, iż na masy te działają punktowe siły oporu wiskotycznego,

proporcjonalne do prędkości liniowych mas: $P_1 = \bar{\tau}_1 v_1$ i $P_2 = \bar{\tau}_2 v_2$ ($\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ — stałe określające wielkości tych sił).

Aby zbadać stateczność układu dla dowolnych wartości η , przeanalizujemy ruch układu (małe drgania) w pobliżu położenia równowagi. Wykorzystamy w tym celu równania Lagrange'a drugiego rodzaju, w których siły dysypatywne ujęto dodając wyrazy $\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_i}$ [7]

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2.$$

W równaniach tych, przy założeniu, że kąty φ_1 i φ_2 są małe, należy przyjąć:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} l^2 \left[\left(m_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} m_2 \right) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \gamma \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 \gamma^2 \dot{\varphi}_2^2 \right], \\ V &= \frac{1}{2} [(c_1 + c_2) \varphi_1^2 - 2c_2 \varphi_1 \varphi_2 + c_2 \varphi_2^2], \\ D &= \frac{1}{2} [(b_1 + b_2) \dot{\varphi}_1^2 - 2b_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left((\alpha^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2) \dot{\varphi}_1^2 + \gamma \tau_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \gamma^2 \tau_2 \dot{\varphi}_2^2 \right) \right], \\ Q_1 &= \frac{1}{2} Pl(\varphi_1 - \eta \varphi_2), \quad Q_2 = \frac{1}{2} Pl(1 - \eta) \varphi_2, \end{aligned}$$

T oznacza tu energię kinetyczną układu, V — potencjał sił sprężystych, D — funkcję dysypacji, Q_1 i Q_2 — siły uogólnione (niepotencjalne), $\tau_1 = l^2 \bar{\tau}_1$, $\tau_2 = l^2 \bar{\tau}_2$. Równania (2.1) prowadzą do układu równań różniczkowych liniowych:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \left(m_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} m_2 \right) l^2 \ddot{\varphi}_1 + \left[(b_1 + b_2) + \left(\alpha^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2 \right) \right] \dot{\varphi}_1 + \left(c_1 + c_2 - \frac{1}{2} Pl \right) \varphi_1 + \\ + \frac{1}{2} m_2 \gamma l^2 \ddot{\varphi}_2 + \left(-b_2 + \frac{1}{2} \gamma \tau_2 \right) \dot{\varphi}_2 + \left(\frac{1}{2} Pl \eta - c_2 \right) \varphi_2 = 0, \\ \frac{1}{2} m_2 \gamma l^2 \ddot{\varphi}_1 + \left(-b_2 + \frac{1}{2} \gamma \tau_2 \right) \dot{\varphi}_1 - c_2 \varphi_1 + m_2 \gamma^2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + \\ + (b_2 + \gamma^2 \tau_2) \dot{\varphi}_2 + \left[c_2 - \frac{1}{2} Pl(1 - \eta) \right] \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci

$$(2.4) \quad \varphi_1 = C_1 e^{\omega t}, \quad \varphi_2 = C_2 e^{\omega t},$$

oraz wprowadzając bezwymiarowe wielkości:

$$\begin{aligned} \Omega = l \left(\frac{m_2}{c_2} \right)^{1/2} \omega, \quad \beta = \frac{Pl}{c_2}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \psi = \frac{c_1}{c_2}, \\ B_i = \frac{b_i}{l \sqrt{m_2 c_2}}, \quad T_i = \frac{\tau_i}{l \sqrt{m_2 c_2}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

otrzymujemy układ liniowych i jednorodnych równań na stałe C_1 i C_2 :

$$(2.6) \quad \left\{ \left(\mu\alpha^2 + \frac{1}{4} \right) \Omega^2 + \left[(B_1 + B_2) + \left(\alpha^2 T_1 + \frac{1}{4} T_2 \right) \right] \Omega + \left(1 + \psi - \frac{1}{2} \beta \right) \right\} C_1 + \\ + \left\{ \frac{1}{2} \gamma \Omega^2 + \left(-B_2 + \frac{1}{2} \gamma T_2 \right) \Omega + \left(\frac{1}{2} \beta \eta - 1 \right) \right\} C_2 = 0, \\ \left\{ \frac{1}{2} \gamma \Omega^2 + \left(-B_2 + \frac{1}{2} \gamma T_2 \right) \Omega - 1 \right\} C_1 + \\ + \left\{ \gamma^2 \Omega^2 + (B_2 + \gamma^2 T_2) \Omega + \left(1 - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \beta \eta \right) \right\} C_2 = 0.$$

Wyznacznik tego układu przyrównany do zera określa bezwymiarowy, na ogół zespolony, parametr częstości (urojonej częstości) Ω w zależności od wielkości siły ściskającej β , parametrów charakteryzujących tłumienie B_i i T_i oraz pozostałych parametrów:

$$(2.7) \quad 8\mu\alpha^2\gamma^2\Omega^4 + [8\gamma^2 B_1 + 2(1+4\gamma+4\gamma^2+4\mu\alpha^2)B_2 + 8\alpha^2\gamma^2 T_1 + 8\mu\alpha^2\gamma^2 T_2] \Omega^3 + \\ + \{ [2(1+4\mu\alpha^2) + 8\gamma^2(1+\psi) + 8\gamma] - \beta[(1-\eta)(1+4\mu\alpha^2) + 4\gamma^2 + 2\eta\gamma] + \\ + 8B_1 B_2 + 8\gamma^2 B_1 T_2 + 2(1+4\gamma+4\gamma^2)B_2 T_2 + 8\alpha^2 B_2 T_1 + 8\alpha^2\gamma^2 T_1 T_2 \} \Omega^2 + \\ + \{ 4(2-\beta+\eta\beta)B_1 + 8(\psi+\eta\beta-\beta)B_2 + 4(2\alpha^2-\alpha^2\beta+\alpha^2\eta\beta)T_1 + \\ + [2(1+4\gamma+4\gamma^2) + 8\gamma^2\psi + \beta(\eta-1-4\gamma^2-2\eta\gamma)]T_2 \} \Omega + \\ + [8\psi - 4(1-\eta)(2+\psi)\beta + 2(1-\eta)\beta^2] = 0.$$

Jeśli tylko wszystkie pierwiastki równania (2.7) mają ujemne części rzeczywiste, to ruch układu jest stateczny; ruch przestaje być stateczny, gdy chociaż jeden z pierwiastków będzie miał część rzeczywistą dodatnią. Przyrównanie części rzeczywistych pierwiastków równania (2.7) do zera prowadzi do tzw. kinetycznego kryterium stateczności, pozwalającego na obliczenie siły krytycznej, powodującej zamianę drgań ustalonych z malejącą amplitudą na drgania z amplitudą rosnącą w czasie. W przypadku równania czwartego stopnia kryterium Routha-Hurwita pozwala na obliczenie poszukiwanej siły krytycznej.

Układ traci również stateczność (przez wyboczenie), gdy istnieje sąsiednie, dowolnie bliskie, odkształcone położenie równowagi trwałej. Zachodzi to wówczas, gdy wyraz wolny równania (2.7) jest równy zero (kryterium statyczne, $\Omega = 0$).

Siła krytyczna obliczona w oparciu o kryterium statyczne (w zakresie, w którym to jest możliwe) jest na ogół niższa od siły krytycznej obliczonej z kryterium kinetycznego, chociaż, jak wykazano w pracy [3], nie jest to ogólna reguła.

Dla uproszczenia dalszych obliczeń założymy, że równe sobie masy są umieszczone w środku sztywnych prętów oraz, że stałe sprężystości w przegubach są również sobie równe, tzn. przyjmiemy: $\alpha = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\mu = 1$, $\psi = 1$. Równanie (2.7) przybiera wobec tego postać

$$(2.8) \quad \Omega^4 + (16B_1 + 160B_2 + T_1 + T_2) \Omega^3 + [176 - 24(2-\eta)\beta + 256B_1 B_2 + \\ + 16B_1 T_2 + 144B_2 T_2 + 16B_2 T_1 + T_1 T_2] \Omega^2 + \{ 128(2-\beta+\eta\beta)B_1 + \\ + 256(1+\eta\beta-\beta)B_2 + 8(2+\eta\beta-\beta)T_1 + [160 + 8(2\eta-5)\beta]T_2 \} \Omega + \\ + 64[4 - 6(1-\eta)\beta + (1-\eta)\beta^2] = 0.$$

Kryterium statyczne pozwala na obliczenie siły krytycznej tylko w pewnym zakresie zmienności współczynnika śledzenia η i polega na przyrównaniu do zera wyrazu wolnego równania (2.8). Otrzymana w ten sposób siła krytyczna

$$(2.9) \quad \beta_{1,2} = \frac{3(1-\eta) \mp \sqrt{(1-\eta)(5-9\eta)}}{1-\eta}$$

nie zależy od parametrów charakteryzujących tłumienie.

W przedziale, w którym kryterium statyczne nie prowadzi do rozwiązania (w naszym przypadku $5/9 < \eta < 1$), musimy stosować kryterium kinetyczne. Ruch typu (2.4) jest stateczny, jeśli częstość kołowa Ω nie ma dodatniej części rzeczywistej. Warunkiem koniecznym stateczności w przypadku wielomianu czwartego stopnia typu (2.8)

$$(2.10) \quad L\Omega^4 + M\Omega^3 + N\Omega^2 + S\Omega + R = 0$$

jest spełnienie nierówności

$$(2.11) \quad LS^2 - MNS + M^2R < 0.$$

Jeśli dodatkowo wszystkie współczynniki równania (2.10) są dodatnie, to jest to również warunek wystarczający, znany pod nazwą kryterium stateczności ruchu Routha-Hurwitza [7]. Przyrównanie do zera wyrażenia (2.11) pozwoli rozgraniczyć stateczny obszar ruchu od niestatecznego.

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, iż nieuwzględnienie tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego, tzn. założenie od początku, że $B_1 = B_2 = T_1 = T_2 = 0$ prowadzi do równania dwukwadratowego na częstość drgań ($M = S = 0$), dla którego kryterium kinetyczne stateczności ma postać

$$(2.12) \quad N^2 - 4LR = 0.$$

Kryterium to można otrzymać z (2.11) tylko przy założeniu, że współczynniki M i S zmierzają do zera w ten sposób, aby spełniona była zależność

$$(2.13) \quad \frac{M}{S} = \frac{N}{2R},$$

która, oczywiście, na ogół nie jest spełniona. Wobec tego, kryterium (2.11) pozwala obliczyć siłę krytyczną przy tłumieniu zmierzającym do zera z reguły różną od obliczonej w oparciu o kryterium (2.12).

Tak więc w przypadku braku tłumienia z równania (2.12) otrzymujemy

$$(2.14) \quad \beta_{1,2} = \frac{6(20-9\eta) \pm 12\sqrt{-9\eta^2 + 14\eta - 4}}{9\eta^2 - 32\eta + 32}.$$

Uwzględniając tłumienie korzystamy z kryterium (2.11), które prowadzi do równania kwadratowego na siłę krytyczną

$$(2.15) \quad A\beta^2 - B\beta + C = 0, \quad \beta_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad & A = b^2 - bce + 64(1-\eta)c^2, \\
 & B = 2ab - bcd - ace + 384(1-\eta)c^2, \\
 & C = a^2 - acd + 256c^2, \\
 & a = 256 + 256\zeta + 16\kappa + 160\xi\kappa, \\
 & b = (1-\eta)(128 + 256\zeta + 8\kappa) - 8(2\eta - 5)\xi\kappa, \\
 & c = 16 + 160\zeta + \kappa + \xi\kappa, \\
 & d = 176 + B_1^2(256\zeta + 16\xi\kappa + 144\zeta\xi\kappa + 16\zeta\kappa + \xi\kappa^2), \\
 & e = 24(2-\eta).
 \end{aligned}$$

Wprowadzono tu następujące parametry:

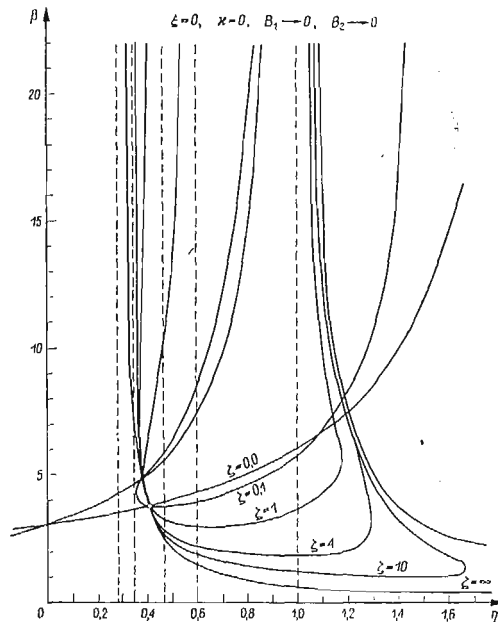
$B_2/B_1 = \zeta$ — charakteryzuje niejednorodność tłumienia wewnętrznego;

$T_2/T_1 = \xi$ — charakteryzuje niejednorodność tłumienia zewnętrznego;

$T_1/B_1 = \kappa$ — charakteryzuje stosunek wielkości tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego.

Przedstawimy teraz kilka szczególnych przypadków rozwiązania równania (2.15).

2.2. Brak tłumienia zewnętrznego: $T_1 = T_2 = 0$. Na rys. 2 przedstawiono zależność siły krytycznej β od współczynnika śledzenia η w przypadku, gdy tłumienie wewnętrzne zmierza

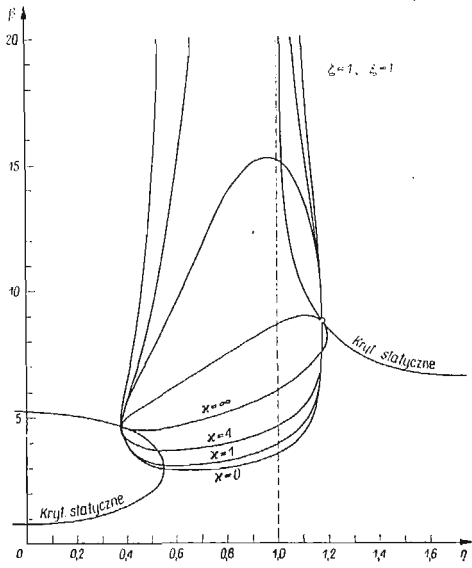


Rys. 2

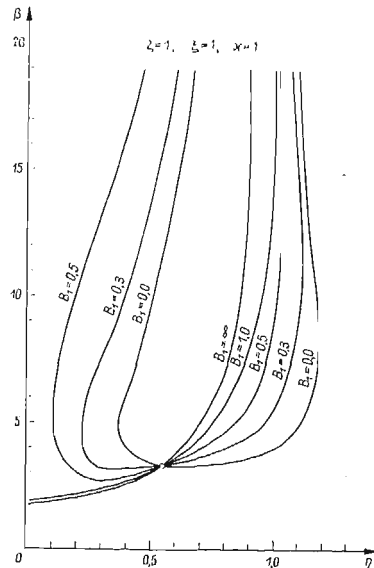
do zera, a stosunek tłumień w przegubach jest stały ($\xi = 0, \kappa = 0, B_1 \rightarrow 0, B_2 \rightarrow 0, \frac{B_2}{B_1} = \zeta$). Stopień destabilizacji zależy tu w istotny sposób od parametru ζ ; dla $\zeta \rightarrow \infty$ destabilizacja jest największa. Gdy $\eta = 1$, siła krytyczna jest dziesięciokrotnie mniejsza od siły krytycznej obliczonej bez uwzględnienia tłumień.

2.3. Brak tłumienia wewnętrznego: $B_1 = B_2 = 0$, $T_1 \rightarrow 0$, $T_2 \rightarrow 0$. Zależnie od parametru ξ otrzymujemy krzywe $\beta(\eta)$ niewiele odbiegające od przypadku, gdy nie ma tłumienia. Na przykład dla $\xi = 0$ i $\xi = \infty$ otrzymujemy krzywą $\zeta = 0$ z rys. 2, dla $\xi = 1$ wykres $\beta(\eta)$ pokrywa się z wykresem otrzymanym w przypadku gdy nie ma tłumienia. Wyniki obliczeń świadczą o tym, iż niejednorodne tłumienie zewnętrzne może również powodować destabilizację układu, chociaż w naszym przypadku jest ona bardzo mała. Przy sile śledzącej ($\eta = 1$) destabilizacja nie występuje w ogóle.

2.4. Jednorodne równoczesne tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne. Gdy tłumienia są jednorodne ($\zeta = 1$, $\xi = 1$) i zbiegają do zera, jednak w ten sposób, aby ich stosunek był stały, otrzymujemy krzywe przedstawione na rys. 3. Jak widać stopień destabilizacji zależy od sto-



Rys. 3



Rys. 4

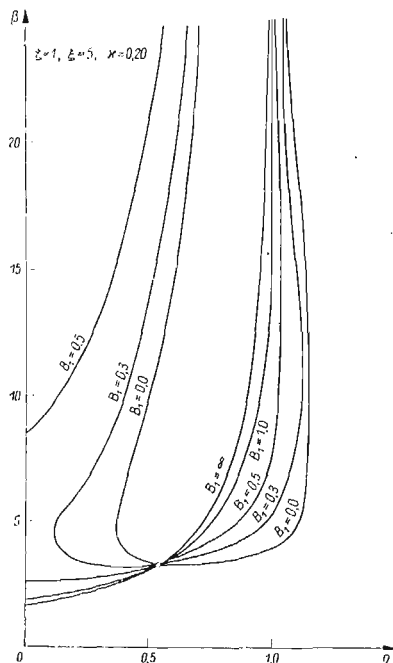
sunku tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego i nie jest tak duży jak w przypadku 2.2. W przypadku jednorodnych tłumień ($\zeta = 1$, $\xi = 1$) i $\kappa = 1$ nie zbiegających do zera, otrzymujemy wykresy przedstawione na rys. 4. Wzrost tłumienia powoduje wzrost siły krytycznej, jednak tylko do pewnej granicy.

Ogólnie, gdy $B_1 \rightarrow \infty$ otrzymujemy:

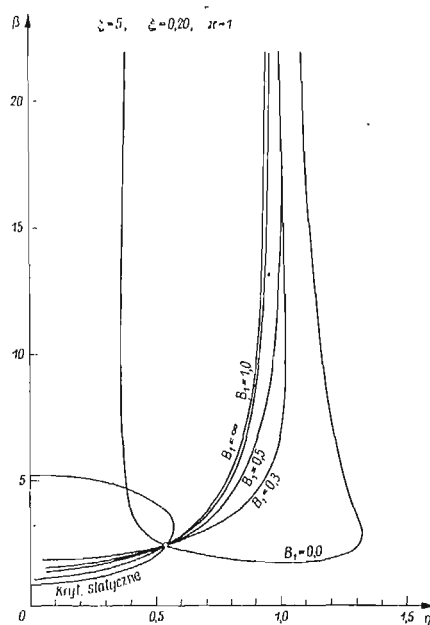
$$(2.17) \quad \beta = \frac{256 + 256\zeta + 16\kappa + 160\xi\kappa}{(1-\eta)(128 + 256\zeta + 8\kappa) - 8(2\eta - 5)\xi\kappa}$$

2.5. Niejednorodne równoczesne tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne. Na rys. 5 i 6 przedstawiono rodziny krzywych w przypadkach silnych niejednorodności tłumień, wybierając następujące parametry: $\zeta = 1$, $\xi = 5$, $\kappa = 1/5$ na rys. 5 i $\zeta = 5$, $\xi = 1/5$, $\kappa = 1$, na rys. 6.

Z przedstawionych rys. 2, 3, 4, 5 i 6 wynika, iż siła krytyczna bardzo silnie zależy od niejednorodności tłumień oraz ich stosunku. Dla ustalonych parametrów ζ , ξ i κ różnie



Rys. 5



Rys. 6

ona ze wzrostem tłumienia do pewnej wartości granicznej. Przy tłumieniach zmierzających do zera stopień destabilizacji jest znacznie mniejszy, gdy uwzględnimy tłumienie zewnętrzne.

3. Destabilizacja pręta wspornikowego (metoda energetyczna)

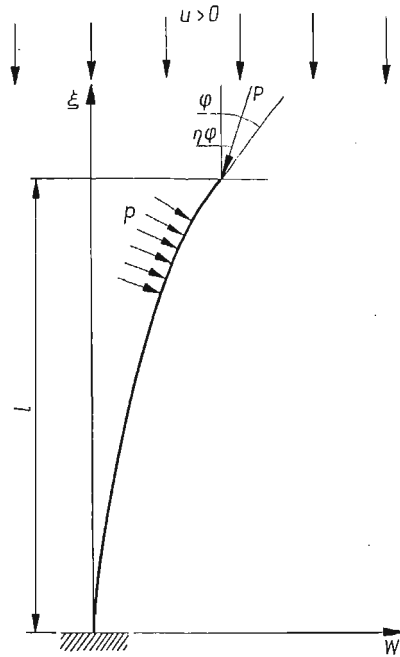
Przejdziemy obecnie do zbadania wpływu tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego na siłę krytyczną powodującą utratę stateczności pręta jednostronnie utwierdzonego. Założymy ogólnie, że niepryzmatyczny pręt (rys. 7) znajduje się w strumieniu płynu, poruszającym się z prędkością U w kierunku równoległym do jego nieodkształconej osi. Przyjmijmy, że niepryzmatyczność pręta opisana jest funkcją określającą zmianę momentu bezwładności przekroju poprzecznego

$$(3.1) \quad g(\xi) = \frac{J(\xi)}{J_0}, \quad J_0 = J(0).$$

Zastosujemy proste, tzw. «łukowe» prawo opływu pręta (podobnie jak w pracy KORDAS [8]), zgodne z którym obciążenie boczne wywierane na jednostkę długości pręta jest równe

$$(3.2) \quad p = 2Bb(\xi) \left(U \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad b(\xi) = b_0 f_3(\xi),$$

gdzie $B = (p_0 \gamma_0) / c_0$ jest stałą charakteryzującą własności płynu. Dla gazu c_0 oznacza prędkość dźwięku, γ_0 — wykładnik politropy, U — prędkość strumienia, $b(\xi)$ — zmienną szerokość płytki, w — ugięcie pręta w punkcie ξ . Jak łatwo można wykazać [8], człon $2Bb(\xi) \partial w / \partial t$ we wzorze (3.2) stanowi ciśnienie wywierane przez płyn na pręt, wynikające z dodatkowego ruchu drgającego pręta w poruszającym się strumieniu. Tak więc, w przypadku płynu spoczywającego ($U = 0$) funkcja $2Bb(\xi)$ charakteryzuje tłumienie zewnętrzne (wiskotyczne) ruchu pręta w płynie i może być, niezależnie od zmiennej szerokości pręta, przyjęta dowolnie jako funkcja określająca niejednorodność tłumienia zewnętrznego. Składową pionową ciśnienia występującą przy opływie pręta niepryzmatycznego pomijamy



Rys. 7

jako małą drugiego rzędu. Oprócz ciśnienia bocznego na swobodny koniec pręta działa niekonserwatywna siła ściskająca, której kierunek działania ulega zmianom w czasie ruchu pręta i jest określony przez współczynnik śledzenia η (rys. 7).

Aby uwzględnić również tłumienie wewnętrzne materiału pręta założymy, iż może on być opisany prostym modelem Voigta–Kelvina

$$(3.3) \quad \sigma = E(\xi) \varepsilon + \lambda(\xi) \dot{\varepsilon}, \quad E(\xi) = E_0 f_1(\xi), \quad \lambda(\xi) = \lambda_0 f_2(\xi),$$

gdzie $E(\xi)$ jest to zmieniający się wzdłuż długości pręta moduł Younga, a $\lambda(\xi)$ — zmieniający się współczynnik lepkości charakteryzujący tłumienie wewnętrzne. Zmienność modułu Younga i współczynnika lepkości pozwala na zbadanie wpływu niejednorodności sprężystej i lepkościowej na stateczność pręta.

Aby zbadać stateczność pręta obciążanego w opisany powyżej sposób, rozważymy ruch układu (małe drgania) stosując przybliżoną metodę energetyczną. Analizę dokładności tej metody (ale bez uwzględnienia tłumienia) przeprowadzono w pracy KORDAS i ŻYCZKOWSKIEGO [9]. Wprowadzając zmienne bezwymiarowe

$$x = \xi/l, \quad y = w/l,$$

zapiszemy linię ugięcia pręta w postaci przybliżonej

$$(3.4) \quad y(x, t) = \sum_{i=1}^n y_i(x) q_i(t),$$

w której funkcje $y_i(x)$ powinny spełniać wymagane warunki brzegowe.

Dalszy tok postępowania polega na rozwiązaniu układu równań różniczkowych zwyczajnych (wynikających z równań Lagrange'a) na funkcje $q_i(t)$, określających w sposób przybliżony ruch układu i jest szczegółowo przedstawiony w pracy Kordas [8] dla przyrmatycznego pręta idealnie sprężystego. Powtórzmy tu podstawowe wzory

$$(3.5) \quad T = \frac{1}{2} ml^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \int_0^1 g^{\kappa_1} y_i y_j dx;$$

T oznacza tu energię kinetyczną układu, m — masę jednostki długości pręta. Wykładnik κ_1 w najczęściej spotykanych przypadkach przyjmuje wartości: $\kappa_1 = 1$ dla pręta płasko-zbieżnego o stałej wysokości przekroju poprzecznego, $\kappa_1 = 1/2$ dla pręta równomiernie wszechstronnie zbieżnego, $\kappa_1 = 1/3$ dla pręta płasko-zbieżnego o stałej szerokości przekroju.

$$(3.6) \quad V = \frac{1}{2} \frac{EJ}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \int_0^1 f_1(x) g(x) y_i''(x) y_j''(x) dx,$$

V jest tu potencjalną energią sprężystą przy zginaniu;

$$(3.7) \quad A_1 = \frac{1}{2} Pl \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j, \quad c_{ij} = \int_0^1 y_i'(x) y_j'(x) dx,$$

A_1 jest pracą składowej pionowej siły P (stałej dla małych ugięć pręta).

Poza tym należy jeszcze obliczyć uogólnione siły niekonserwatywne, pochodzące od składowej poziomej ciśnienia płynu (składowa pionowa jest zanedbywalnie mała), od składowej poziomej siły skupionej P oraz od członu charakteryzującego lepkość materiału w równaniu (3.2). Jak łatwo można wykazać obliczając elementarną pracę wymienionych sił na przemieszczeniach wirtualnych δq_i , siły uogólnione mają postać

$$(3.8) \quad Q_i = -Pl\eta \sum_{j=1}^n d_{ij} q_j + 2Bb_0 l^2 \left(U \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j - l \sum_{j=1}^n s_{ij} \dot{q}_j \right) - \frac{\lambda_0 J_0}{l} \sum_{j=1}^n z_{ij} \dot{q}_j,$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} d_{ij} &= y_i(1)y_j'(1), \\ e_{ij} &= \int_0^1 f_3(x)y_i(x)y_j'(x) dx, \\ s_{ij} &= \int_0^1 f_3(x)y_i(x)y_j(x) dx, \\ z_{ij} &= \int_0^1 f_2(x)g(x)y_i''(x)y_j''(x) dx. \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

w których

$$W = T - V + A_1,$$

określają ruch układu w sposób przybliżony. Korzystając ze wzorów (3.5)–(3.9) i podstawiając je do równań (3.10) otrzymujemy

$$(3.11) \quad \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{m_0 l^4}{E_0 J_0} a_{ij} \ddot{q}_j + \left(\frac{2Bb_0 l^4}{E_0 J_0} s_{ij} + \frac{\lambda_0}{E_0} z_{ij} \right) \dot{q}_j + \left[b_{ij} - \frac{Pl^2}{E_0 J_0} (c_{ij} - \eta d_{ij}) - U \frac{2Bb_0 l^3}{E_0 J_0} e_{ij} \right] q_j \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zakładając w dalszym ciągu, że współrzędne uogólnione $q_i(t)$ są następującymi funkcjami czasu:

$$(3.12) \quad q_i(t) = A_i e^{\omega \frac{t}{\gamma}}, \quad \gamma^2 = \frac{m_0 l^4}{E_0 J_0}, \quad [\gamma] = \text{sek},$$

gdzie: ω — bezwymiarowa częstość, A_i — stałe współczynniki, sprowadzamy układ równań różniczkowych (3.11) do układu jednorodnych równań algebraicznych ze względu na stałe A_i

$$(3.13) \quad \sum_{j=1}^n \{ a_{ij} \omega^2 + (\alpha s_{ij} + \delta z_{ij}) \omega + [b_{ij} - \beta (c_{ij} - \eta d_{ij}) - U^* e_{ij}] \} A_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

W równaniach (3.13) wprowadzono następujące parametry bezwymiarowe:

$$(3.14) \quad \alpha = \frac{2Bb_0 l^4}{\gamma E_0 J_0}, \quad \delta = \frac{\lambda_0}{\gamma E_0}, \quad U^* = U \frac{2Bb_0 l^3}{E_0 J_0}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0 J_0}$$

charakteryzujące odpowiednio tłumienie zewnętrzne, tłumienie wewnętrzne, prędkość płynu i siłę ściskającą.

Wyznacznik główny układu równań (3.13) przyrównany do zera określa bezwymiarową częstość ω w zależności od siły ściskającej β , parametrów tłumienia α i δ oraz pozostałych parametrów. W przypadku dwóch stopni swobody otrzymujemy równanie czwartego stopnia ze względu na częstość ω o postaci (2.10) i badanie stateczności układu przebiega tak samo jak w części drugiej pracy.

Ponieważ chodzi nam tu przede wszystkim o zbadanie efektu destabilizacji z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego, więc w dalszym ciągu uczynimy szereg uproszczeń; założymy mianowicie, że badany pręt jest jednorodny (sprężyste i lepkościowo), pryzmatyczny oraz że porusza się w ośrodku spoczywającym, tzn. przyjmujemy $f_1(x) \equiv 1, f_2(x) \equiv 1, f_3(x) \equiv 1, g(x) \equiv 1$ oraz $U^* = 0$.

Przechodząc do szczegółowych obliczeń założymy równanie linii ugięcia w postaci dwuparametrowej, w której funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są równe [8]:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= x^4 - 4x^3 + 6x^2, \\ y_2(x) &= -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2, \end{aligned}$$

a więc spełniają następujące warunki brzegowe:

$$(3.16) \quad y_i(0) = y_i'(0) = y_i''(1) = y_i'''(1) = 0.$$

Warunki te odpowiadają obciążeniu pręta siłą śledzącą ($\eta = 1$) i funkcje (3.15) nie spełniają warunku brzegowego na siłę poprzeczną dla dowolnych wartości współczynnika śledzenia η . Jednak, jak wykazano w pracy [8], uproszczenie to w małym stopniu wpływa na dokładność wyników, przynajmniej w zakresie siły podśledzającej ($\eta < 1$), do którego się obecnie ograniczymy.

W celu uproszczenia obliczeń numerycznych, początek układu odniesienia będziemy w dalszym ciągu pracy przyjmować na swobodnym końcu nieodkształconego pręta (układ stały). W układzie tym funkcje (3.15) mają postać

$$(3.17) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= x^4 - 4x + 3, \\ y_2(x) &= x^5 - 5x + 4. \end{aligned}$$

Współczynniki $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, e_{ij}, s_{ij}$ i z_{ij} pozostają bez zmiany, a współczynniki d_{ij} zmieniają jedynie znak. Po prostych obliczeniach otrzymujemy:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= s_{ij}, \quad a_{11} = \frac{104}{45}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{664}{210}, \quad a_{22} = \frac{1000}{231}, \\ b_{ij} &= z_{ij}, \quad b_{11} = \frac{144}{5}, \quad b_{12} = b_{21} = 40, \quad b_{22} = \frac{400}{7}, \\ c_{11} &= \frac{721}{7}, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{27}{2}, \quad c_{22} = \frac{160}{9}, \\ d_{11} &= 12, \quad d_{12} = 15, \quad d_{21} = 16, \quad d_{22} = 20, \\ e_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Równanie określające częstości (2.10) ma w naszym przypadku następujące współczynniki:

$$\begin{aligned}
 L &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \\
 M &= \alpha(a_{11}s_{22} + a_{22}s_{11} - 2a_{12}s_{12}) + \delta(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}), \\
 N &= B_1 - \beta B_2 + B_3, \\
 B_1 &= a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}, \\
 B_2 &= a_{11}\bar{c}_{22} + a_{22}\bar{c}_{11} - a_{12}\bar{c}_{21} - a_{21}\bar{c}_{12}, \\
 B_3 &= \alpha^2(s_{11}s_{22} - s_{12}^2) + \alpha\delta(s_{11}b_{22} + s_{22}b_{11} - 2s_{12}b_{12}) + \delta^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2); \\
 S &= C_1 - \beta C_2, \\
 C_1 &= \alpha(s_{11}b_{22} + s_{22}b_{11} - 2s_{12}b_{12}) + 2\delta(b_{11}b_{22} - b_{12}^2), \\
 C_2 &= \alpha(s_{11}\bar{c}_{22} + s_{22}\bar{c}_{11} - s_{12}\bar{c}_{21} - s_{21}\bar{c}_{12}) + \delta(b_{11}\bar{c}_{22} + b_{22}\bar{c}_{11} - b_{12}\bar{c}_{21} - b_{21}\bar{c}_{12}); \\
 R &= D_1 - \beta D_2 + \beta^2 D_3, \\
 D_1 &= b_{11}b_{22} - b_{12}^2, \\
 D_2 &= b_{11}\bar{c}_{22} + b_{22}\bar{c}_{11} - b_{12}\bar{c}_{21} - b_{21}\bar{c}_{12}, \\
 D_3 &= \bar{c}_{11}\bar{c}_{22} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{21}, \\
 \bar{c}_{ij} &= c_{ij} - \eta d_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Wprowadzając pomocniczy parametr \varkappa określony jako stosunek tłumienia wewnętrznego do zewnętrznego

$$\varkappa = \delta/\alpha
 \tag{3.20}$$

otrzymujemy przy przyjętych uproszczeniach i założonych funkcjach (3.17)

$$\begin{aligned}
 L &= 0,00716828, \\
 M &= \alpha(0,0143366 + 3,786435\varkappa), \\
 B_1 &= 3,786435, \\
 B_2 &= 0,241893 - 0,151227\eta, \\
 B_3 &= \alpha^2(0,00716828 + 3,786435\varkappa + 45,71428\varkappa^2), \\
 C_1 &= \alpha(3,786435 + 91,42856\varkappa), \\
 C_2 &= \alpha[(0,241893 - 0,151227\varkappa) + (19,75510 - 21,71428\eta)\varkappa], \\
 D_1 &= 45,71428, \\
 D_2 &= 19,75510 - 21,71428\eta, \\
 D_3 &= 0,607143 - 0,547619\eta.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Statyczne kryterium stateczności, $R = 0$, prowadzi do rozwiązania

$$\beta = \frac{D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1D_3}}{2D_3},
 \tag{3.22}$$

które przedstawiono wykreślić na rys. 8.

Kinetyczne kryterium stateczności (2.11) przybiera postać równania kwadratowego:

$$\begin{aligned}
 (AC_2^2 + M^2D_3 - MB_2C_2)\beta^2 + (MB_1C_2 + MC_1B_2 - M^2D_2 - 2AC_1C_2 + \\
 + MC_2B_3)\beta + (AC_1^2 + M^2D_1 - MB_1C_1 - MC_1B_3) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

z którego obliczamy siłę krytyczną w zależności od η , α i δ .

Przedstawimy tu rozwiązania szczególne w przypadku, gdy tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne zmierzają do zera, jednak w ten sposób aby stosunek $\kappa = \delta/\alpha$ był stały.

1) $\kappa = 0$, brak tłumienia wewnętrznego,

$$(3.24) \quad \beta = \frac{633,831}{(30,7853 - 12,71432\eta) \pm \sqrt{-319,9269 + 989,2586\eta - 543,6581\eta^2}};$$

2) $\kappa = 0,05$,

$$(3.25) \quad \beta = \frac{329,7198}{(16,01457 - 6,614013\eta) \pm \sqrt{-402,9733 + 1246,0507\eta - 684,7800\eta^2}};$$

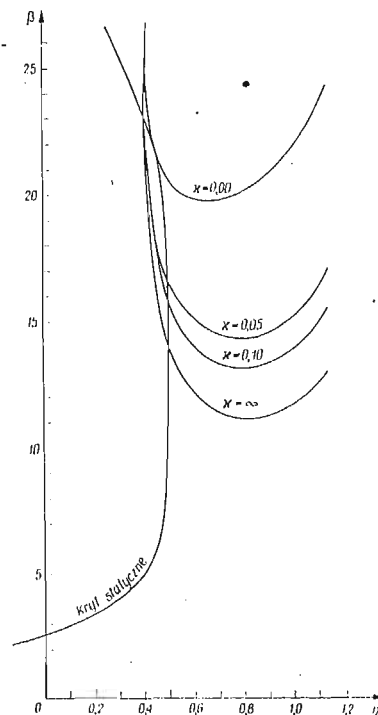
3) $\kappa = 0,10$,

$$(3.26) \quad \beta = \frac{268,5542}{(13,04374 - 5,387061\eta) \pm \sqrt{-366,9693 + 1134,7211\eta - 623,5974\eta^2}};$$

4) $\kappa = \infty$, brak tłumienia zewnętrznego,

$$(3.27) \quad \beta = \frac{180,678}{(8,77559 - 3,624316\eta) \pm \sqrt{-284,3457 + 879,2444\eta - 483,1985\eta^2}}.$$

Zależności (3.24)–(3.27) przedstawiono na rys. 8. Potwierdzają one wnioski wyciągnięte w poprzedniej części pracy. Stopień destabilizacji zależy w istotny sposób od stosunku



Rys. 8

wielkości tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego. Z powodu małej dokładności metody energetycznej, przy przyjętych funkcjach (3.15), dalszych obliczeń nie przeprowadzono.

Błąd obliczeń sięga 10% w zakresie $\eta < 1$ (ściśła wartość siły krytycznej dla $\kappa = \infty$ i $\eta = 1$ jest równa $\beta = 10,76$, a nie $\beta = 11,50$), natomiast jest znacznie większy dla $\eta > 1$.

Być może, iż uzyskane w niniejszej pracy wyniki tłumaczą rozbieżność między danymi doświadczalnymi [6, 13] i wartością śledzącej siły krytycznej, obliczoną z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego malejącego do zera. Doświadczenia wykazują raczej zgodność z górną wartością siły krytycznej ($\beta \approx 20$), obliczoną bez uwzględnienia tłumień. W przeprowadzonych eksperymentach, obok znikomego tarcia wewnętrznego, występowało pewne znikome tłumienie zewnętrzne i dopiero ich stosunek decyduje o wielkości siły krytycznej.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. DŻYGADŁO, L. SOLARZ, *On nonautonomous vibrations of a self-excited system with tangential force*, Proc. of Vibration Problems, 2, **11** (1970), 157–178.
2. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności*, Prace Komisji Mech. Stos. Oddz. Kraków, PAN, Mechanika Nr 4, 1970, 3–27.
3. A. GAJEWSKI, *Badanie postaci drgań prętów ściskanych obciążeniem niekonserwatywnym*, Czas. Techn. 10-M(141), (1970), 1–8
4. G. HERRMANN, I. C. JONG, *On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems*, J. of Appl. Mech., 3, **32** (1965), 592–597.
5. G. HERRMANN, I. C. JONG, *On nonconservative stability problems of elastic systems with slight damping*, J. of Appl. Mech., 1, **33** (1966), 125–133.
6. Ю. И. ЯГН, Л. К. ПАРШИН, *Экспериментальное изучение устойчивости стержня при сжатии следящей силой*, Проч. Мат. и Констр., Труды Л.П.И. № 278, 52–54.
7. T. v. KÁRMÁN, M. A. BIOT, *Metody matematyczne w technice*, PWN, Warszawa 1958.
8. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływanego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inż., 1, **13** (1965), 19–41.
9. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czas. Techn., 9, **35** (1960), 1–8.
10. S. NEMAT-NASSER, S. N. PRASAD, G. HERRMANN, *Destabilizing effect of velocity-dependent forces in nonconservative continuous systems*, A. I. A. A. Journal, 7, **4** (1966), 1276–1280.
11. S. NEMAT-NASSER, G. HERRMANN, *Some general consideration concerning the destabilizing effect in nonconservative systems*, ZAMP, 2, **17** (1966), 305–313.
12. R. C. SHIEN, *Variational method in the stability analysis of nonconservative problems*, ZAMP, 1, **21** (1970), 88–100.
13. W. G. WOOD, S. S. SAW, P. M. SAUNDERS, *The kinetic stability of a tangentially loaded strut*, Proc. Roy. Soc. Lond., A. **313** (1969), 239–248.
14. H. ZIEGLER, *On the concept of elastic stability*, Advances in Appl. Mech. V. 4, Acad. Press. Inc., N. York 1956.
15. Л. М. Зорий, М. Я. Леонов, *Влияние трения на устойчивость неконсервативных систем*, Вопросы машиностроения и прочности в машиностроении, 7, **7** (1961), 127–136.

Р е з ю м е

СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

В работе исследована устойчивость модели Циглера и закрепленного стержня, находящихся под воздействием сжимающего неконсервативного усилия. Учитывается наличие неоднородного внутреннего и внешнего трения. Показано, что эффект дестабилизации неконсервативных систем

зависит существенным образом от соотношения параметров, характеризующих внутренне и внешнее трение, а также от степени неоднородности демпфирования.

Получена зависимость критического усилия от показателя следящего эффекта усилия, от параметров, характеризующих неоднородность демпфирования, а также от величины трения. Для случая модели Циглера получено точное решение, для закрепленного стержня результат получен при помощи приближенного энергетического метода оценки устойчивости.

Полученные зависимости свидетельствуют о том, что внешнее трение ослабляет эффект дестабилизации, вызванной внутренним трением.

S u m m a r y

INFLUENCE OF SIMULTANEOUS NON-HOMOGENEOUS EXTERNAL AND INTERNAL DAMPING UPON THE STABILITY OF NON-CONSERVATIVE SYSTEMS

The paper presents the problem of stability of Ziegler's model and of a cantilever beam compressed by non-conservative load. The existence of non-homogeneous internal and external damping is taken into consideration. It has been proved that the effect of destabilization substantially depends on the ratio of parameters characterizing the internal and external damping, and on the degree of non-homogeneity of these dampings.

The critical force has been expressed in terms of the direction of compressive force, the non-homogeneous damping parameters and their ratio, and of the magnitude of damping. The results are accurate in the case of Ziegler's model and approximate in the case of cantilever beam where the approximate energy method of investigation of the stability problem has been applied.

The results obtained prove that the external damping decreases the destabilization effect produced by the internal damping.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 marca 1971 r.
