

## O MOŻLIWOŚCI OPISU PEŁNEGO PROCESU PEŁZANIA METALI\*

MARCIN CHRZANOWSKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Problemy pełzania metali od kilkadziesiąt lat przyciągają uwagę badaczy nie tylko w związku z konkretnymi zadaniami stawianymi przez dynamicznie rozwijający się przemysł, lecz także jako uogólnienie procesu odkształcania ciał stałych. W istocie pełzanie, jako jeden z działów reologii, przedstawia sobą wielowymiarowy proces opisany równaniem

$$(1.1) \quad \Phi(\varepsilon, \sigma, t, T) = 0,$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza odkształcenie,  $\sigma$  — naprężenie,  $t$  — czas,  $T$  — temperaturę. Mimo nagromadzenia znacznej ilości wyników badań doświadczalnych, prowadzonych głównie w krajach o wysokim stopniu uprzemysłowienia (USA, ZSRR, Angia, Szwecja, Japonia), a także licznych prac teoretycznych, brak jest w chwili obecnej teorii, pozwalającej na opis pełnego procesu narastania odkształceń pełzania od przyłożenia obciążenia aż do zniszczenia materiału w wyniku zachodzących procesów fizycznych, związanych z budową materiału.

Przyjmowane uproszczenia w opisie pełzania metali polegają przede wszystkim na rozdzieleniu zmiennych w (1.1)

$$(1.2) \quad \dot{\varepsilon}_c = g(\varepsilon, \sigma, t)h(T),$$

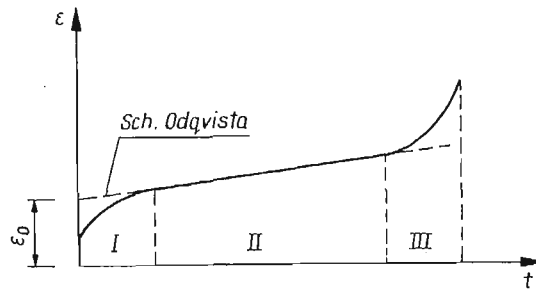
gdzie  $\varepsilon_c$  oznacza odkształcenie pełzania, a kropką oznaczono różniczkowanie po czasie. Dotychczasowe teorie nawet dla funkcji  $g$  nie podają postaci, umożliwiającej opis przebiegu całego procesu. Wyjątek stanowi tu teoria starzenia, sformułowana przez SODERBERGA [18], dla której

$$(1.3) \quad \varepsilon_c = \varphi(\sigma, t).$$

Posługując się krzywymi izochronicznymi, można na jej podstawie wyznaczyć odkształcenia dla kolejnych, ustalonych wartości czasu. Znane niedostatki tej teorii (nieinwariantność w stosunku do zmiany początku osi czasu, przydatność tylko dla słabo zmieniających się obciążeń) powodują, że mimo swej prostoty jest ona stosowana tylko w szczególnych przypadkach i równaniu (1.3) nie można przypisać uniwersalnego znaczenia.

\*) III nagroda na Ogólnopolskim konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Warszawski PTMTS w 1970 r.

Powszechnie przyjętym sposobem prowadzenia obliczeń na pełzanie jest umowne rozbicie typowej (zawierającej wszystkie trzy okresy) krzywej pełzania na trzy odcinki (rys. 1) i wykorzystywanie dla opisu każdego z nich niezależnych równań. Zwykle drugi okres pełzania stanowi znaczną część życia konstrukcji i stąd, a także dzięki swej prostocie,



Rys. 1

szerokie zastosowanie znalazła teoria pełzania ustalonego, dla której związek fizyczny ma postać

$$(1.4) \quad \dot{\varepsilon}_c = f(\sigma).$$

Dla pierwszego okresu pełzania zmianę odkształceń w czasie dobrze opisuje teoria umocnienia, sformułowana przez LUDVIKA [6], a następnie rozwinięta przez NADAIA [7] i DAVENPORTA [3]. Według tej teorii, prędkość odkształceń pełzania jest określona przez wartość działającego naprężenia i aktualną wartość odkształcenia pełzania

$$(1.5) \quad \dot{\varepsilon}_c = g(\sigma, \varepsilon_c).$$

Przy wykorzystaniu podobieństwa krzywych pełzania, które dla pierwszego okresu pełzania jest dobrze potwierdzone doświadczalnie [16], równanie stanu (1.5) można zapisać w postaci

$$(1.6) \quad \dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^n = f(\sigma),$$

gdzie dla funkcji  $f$  przyjmuje się różne postaci, np:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} f(\sigma) &= A\sigma^n, \\ f(\sigma) &= \kappa \exp \frac{\sigma}{C}, \\ f(\sigma) &= \eta \left( 2 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{D} \right)^{n_0}, \end{aligned}$$

zaś  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\eta$ ,  $n$ ,  $n_0$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $D$  oznaczają stałe materiałowe. Zakres stosowania teorii umocnienia jest jednak ograniczony tylko do pierwszego okresu pełzania.

Próba opisu pierwszego i drugiego okresu pełzania jest koncepcja ODQVISTA [11], polegająca na przedłużeniu prostej odpowiadającej odcinkowi pełzania ustalonego do przecięcia z osią odkształceń (rys. 1). Długość odcinka odciętego w ten sposób na osi odkształceń jest funkcją naprężenia i obejmuje odkształcenie sprężyste, natychmiastowe odkształcenie plastyczne oraz częściowo odkształcenie pełzania nieustalonego.

Analiza odkształceń pełzania w trzecim okresie pełzania stała się możliwa (w określonym przedziale naprężeń i temperatur) dzięki opracowaniu i rozwinięciu teorii kruchego zniszczenia w wyniku pełzania. Podstawowymi były tu prace KACZANOWA [5] i RABOTNOWA [14]. Proces narastania uszkodzeń dla jednoosiowego stanu naprężenia opisuje równanie (por. [14])

$$(1.8) \quad \omega^\beta \frac{d\omega}{dt} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^k,$$

gdzie  $\omega$  — parametr charakteryzujący stopień uszkodzenia materiału,  $k$  i  $B$  — stałe materiałowe zależne od temperatury,  $\beta$  — stała zależna od hipotetycznego kształtu rozwijających się szczelin. Warunek początkowy dla równania (1.8) ma postać

$$(1.9) \quad \omega(t=0) = 0,$$

a warunek zniszczenia

$$(1.10) \quad \omega(t=t_*) = 1.$$

Należy tu podkreślić, że warunki te — przyjmowane zresztą w dalszym ciągu pracy — stanowią jedynie idealizację rzeczywistego procesu; warunek (1.9) oznacza, że przyłożenie w chwili  $t=0$  obciążenia nie wywoła natychmiastowego uszkodzenia, zaś warunek (1.10) — pominięcie faktu, że w chwili osiągnięcia pewnej wartości  $\omega_* < 1$  zajdzie natychmiastowe zniszczenie na skutek przekroczenia wytrzymałości doraźnej.

Wykorzystując równania (1.8) (przy  $\beta=0$ ) i (1.4), RABOTNOW [15] zaproponował opis pełzania krótkoczasowego o postaci

$$(1.11) \quad \dot{\epsilon}_c = f(\sigma, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, \omega).$$

O nieprzydatności tego opisu dla drugiego i trzeciego odcinka typowych krzywych pełzania decyduje fakt, że stałe materiałowe występujące w pierwszym z równań (1.11), a wyznaczone na podstawie odcinków krzywych pełzania odpowiadających pełzaniu ustalonomu, są skażone na skutek uszkodzeń materiału, występujących już w tym okresie pełzania [5]. Niedostatkim tym jest również obarczona propozycja SÖDERQUISTA [19] sprzężenia równań teorii Odqvista z równaniem (1.8) przez wprowadzenie funkcji  $\omega$  do związku  $\epsilon-\sigma$ .

W prezentowanej pracy podano opis procesu pełzania w oparciu o równania teorii umocnienia i kruchego zniszczenia. Opis taki nie może jednak stanowić celu samego dla siebie; skonstruowana teoria musi spełniać dwa podstawowe warunki: z jednej strony musi ona lepiej niż dotychczasowe teorie opisywać i wyjaśniać znane fakty doświadczalne, z drugiej — lepiej przewidywać zachowanie się materiału pod obciążeniem. W dalszym ciągu skupiono uwagę głównie na pierwszym z wymienionych warunków, który jest warunkiem koniecznym akceptacji każdej teorii.

## 2. Podstawowe równania dla jednoosiowego stanu naprężenia

Podstawą proponowanego opisu jest doświadczalnie obserwowany fakt zachodzenia w czasie pełzania metali i ich stopów dwu zjawisk: umocnienia i narastania uszkodzeń (mikrospekkań). Założymy, że oba te procesy rozpoczynają się w chwili przyłożenia obciążenia i rozwijają się równoległe aż do momentu zniszczenia, przy czym proces umocnienia

przebiega z malejącą prędkością, zaś proces narastania uszkodzeń — ze wzrastającą. Występowanie umocnienia w pierwszym okresie pełzania jest widoczne z przebiegu krzywych pełzania. Podobnie, kształt krzywej pełzania w trzecim okresie można wyjaśnić uszkodzeniami, intensywnie narastającymi w tym okresie i powodującymi osłabienie materiału ( $\dot{\varepsilon}_c > 0$ ). Rozwój uszkodzeń był jednak także stwierdzany już we wczesnych stadiach pełzania [17]. Tak więc, spośród przyjętych założeń, jedynie założenie o trwaniu procesu umocnienia na dalszych etapach pełzania ma charakter czysto hipotetyczny.

Równanie opisujące odkształcenia pełzania — przy wykorzystaniu powyższych założeń — otrzymamy, wprowadzając do równań teorii umocnienia (1.6) naprężenie efektywne (odniesione do nieuszkodzonej powierzchni przekroju poprzecznego próbki)

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^\alpha = A \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n,$$

gdzie dla funkcji  $\omega$  zachowuje swą ważność równanie teorii zniszczenia kruchego

$$(2.2) \quad \dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^k,$$

a  $\alpha, n, k, A, B$  są stałymi materiałowymi.

W dalszym ciągu przyjęto, że pełne odkształcenie jest sumą odkształcenia pełzania i odkształcenia sprężystego

$$(2.3) \quad \varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_e,$$

przy czym zakłada się, że rozwijające się uszkodzenia materiału nie mają wpływu na odkształcenia sprężyste

$$(2.4) \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}.$$

Równania (2.1), (2.2) są ważne tylko dla  $\sigma > 0$ . Dla  $\sigma < 0$  należy położyć  $\omega = 0$ , gdyż teoria zniszczenia kruchego zaproponowana w pracach [5, 14] nie obejmuje przypadku ściskania. Warto jednak zauważyć, że i dla  $\sigma < 0$  będą się rozwijały uszkodzenia, które ponadto będą wpływały na odkształcenia pełzania przy rozciąganiu poprzedzonym ściskaniem. Proponowany opis nie obejmuje tych zjawisk.

Na zakończenie tego rozdziału zaznaczmy, że układ równań (2.1), (2.2) nie opisuje niesprężystego nawrotu (odwrotnego pełzania) ani starzenia metali czy ich stopów w wyniku długotrwałego działania podwyższonej temperatury. Proponowaną koncepcję można więc stosować dla metali o stabilnej strukturze, które nie wykazują powyższych własności.

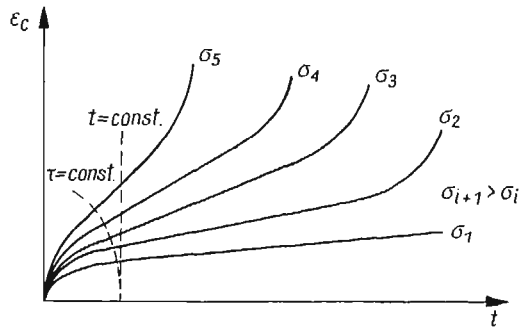
### 3. Stałe materiałowe

W równaniach (2.1) i (2.2) figuruje pięć stałych materiałowych:  $\alpha, n, k, A, B$ . Stałe  $\alpha, n, A$  można wyznaczyć jak dla zwykłej teorii umocnienia (teorii sformułowanej dla naprężeń nominalnych, tzn. odniesionych do początkowej, nieuszkodzonej elementarnej powierzchni), wykorzystując jednak tylko początkowe odcinki krzywych pełzania, dla których stopień uszkodzenia materiału jest pomijalnie mały. Stałą  $\alpha$  wyznacza się wprost

z krzywych pełzania, przedstawionych w układzie dwulogarytmicznym. Dla wyznaczenia stałych  $n$  i  $A$  konieczne jest sporządzenie wykresu zależności odkształcenia pełzania od naprężenia. Jeśli wykres ten sporządzić dla ustalonego czasu  $t = \text{const}$ , okazuje się, że stałe  $n$  i  $A$  zależą od naprężenia (zob. np. [9]) i równanie teorii umocnienia nie może być stosowane dla pełnego zakresu naprężeń, jakie może przenosić materiał. Porównywanie wartości odkształceń pełzania, wywołanych różnymi naprężeniami, dla ustalonego czasu fizycznego  $t$  nie wydaje się jednak słuszne. Porównywalne mogą być jedynie odkształcenia pełzania dla ustalonego czasu względnego

$$(3.1) \quad \tau = \frac{t}{t_*} = \text{const},$$

gdzie  $t_* = t_*(\sigma)$  jest czasem zniszczenia próbki przy danym, stałym naprężeniu  $\sigma$  (rys. 2). Tak wyznaczone punkty krzywej, obrazującej zależność  $\epsilon_c$  od  $\sigma$  będą się teraz układać wokół jednej prostej, a więc  $n$  i  $A$  nie będą zależały od naprężenia.



Rys. 2

Stałe  $k$  i  $B$  można wyznaczać tak, jak zwykle się to robi — z krzywej wytrzymałości czasowej (tzn. zależności  $t_* - \sigma$ ). Jest to jednak kłopotliwe, gdyż wymaga przeprowadzania długotrwałych badań przy niezbyt wysokim poziomie naprężeń, tak dobranym, aby przełom w chwili zniszczenia miał charakter kruchy. Proponowany opis pozwolić może na łatwiejsze i szybsze wyznaczenie stałych materiałowych  $k$  i  $B$ . Znając stałe  $\alpha$ ,  $n$ ,  $A$  stałe  $k$  i  $B$  możemy wyznaczyć, żądając spełnienia w dowolnej chwili czasu zgodności wartości odkształcenia i jego prędkości, wyliczonych na podstawie proponowanego opisu z odpowiednimi wartościami zmierzonymi doświadczalnie. Ten sposób postępowania pozwoli uniknąć długotrwałych badań, doprowadzanych aż do chwili zniszczenia próbki i szacować czas zniszczenia na podstawie stosunkowo krótkotrwałych badań.

#### 4. Pełzanie przy stałym naprężeniu rozciągającym

Dla  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  z (2.2) otrzymujemy

$$(4.1) \quad \omega = 1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{k+1}},$$

gdzie  $\tau = t/t_*$ , a  $t_* = [B(k+1)\sigma_0^k]^{-1}$  jest czasem kruchego zniszczenia. Podstawiając (4.1) do (2.1) otrzymamy po rozdzielaniu zmiennych

$$\varepsilon_c^\alpha d\varepsilon_c = \frac{A}{B} \frac{1}{k+1} \sigma_0^{n-k} \frac{1}{(1-\tau)^{\frac{n}{k+1}}} d\tau.$$

Scałkowanie powyższej równości przy założeniu  $n \neq k+1$  daje

$$(4.2.1) \quad \varepsilon_c^{\alpha+1} = \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \left[ \frac{1}{(1-\tau)^{\frac{n}{k+1}}} - 1 \right],$$

a dla  $n = k+1$

$$(4.2.2) \quad \varepsilon_c^{\alpha+1} = \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{k+1} \sigma_0^{n-k} \ln \frac{1}{1-\tau}.$$

Ze związków tych widać, że podobieństwo krzywych pełzania zachodzi w przybliżeniu tylko dla małych wartości  $\tau$ , tzn. tylko dla początkowego okresu pełzania. Fakt ten był obserwowany doświadczalnie [16].

W chwili zniszczenia jest  $t = t_*$  (czyli  $\tau = 1$ ), a wartość odkształcenia pełzania wynosi

$$(4.3) \quad \varepsilon_{c*} = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \geq k+1, \\ \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{-n+k+1} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} & \text{dla } n < k+1. \end{cases}$$

Przypadek  $n < k+1$  zachodzi rzadko (zob. np. stałe materiałowe przytoczone w [13]) i proponowany opis daje na ogół  $\varepsilon_{c*} = \infty$ . Ten niedostatek teorii wynika z idealizacji warunku brzegowego (1.10) dla  $\omega$  w chwili zniszczenia.

### 5. Skokowa zmiana obciążenia

Porównanie doświadczalnych krzywych pełzania przy skokowej zmianie obciążenia z krzywymi teoretycznymi stanowi przejrzystą weryfikację różnych teorii pełzania. Najlepszą zgodność z doświadczeniami daje teoria umocnienia, choć i dla niej krzywe teoretyczne układają się poniżej krzywych doświadczalnych. Dla poprawienia ich przebiegu proponowano ulepszenie teorii umocnienia przez wprowadzenie jako miary umocnienia nie wartości aktualnego odkształcenia  $\varepsilon_c$ , lecz parametrów:

$$q = \int \varepsilon_c d\sigma,$$

jak w pracy [10], lub

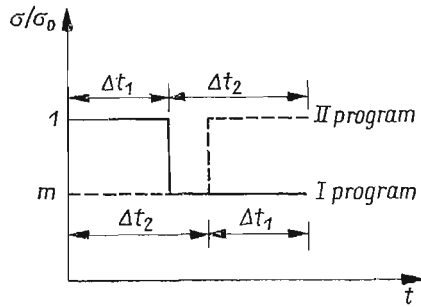
$$q = \int \sigma d\varepsilon_c$$

jak w [20]. Otrzymywano w ten sposób lepszą zgodność przy skokowym zwiększaniu naprężenia, lecz gorszą — w stosunku do zwykłej teorii umocnienia — przy skokowym zmniejszaniu obciążenia.

Zgodnie z proponowanym opisem, prędkość odkształcenia pełzania przy skokowej zmianie obciążenia zależy nie tylko od aktualnej wartości odkształcenia, lecz także od

wielkości nagromadzonego uszkodzenia w momencie zmiany obciążenia. Prędkość ta będzie — jak to widać z wyjściowych równań (2.1), (2.2) — większa niż to wynika z zwykłej teorii umocnienia.

Dla opisu pełzania przy zmiennych naprężeniach Odqvist sformułował komutatywne prawo pełzania [12], zgodnie z którym odkształcenie pełzania w wyniku działania kilku stałych, lecz różnych naprężeń nie zależy od kolejności ich przyłożenia, pod warunkiem, że czas ich działania jest taki sam. Zasada komutatywności nie jest na ogół potwierdzana doświadczeniami, na co zresztą zwracał uwagę już jej autor. Poniżej pokażemy, że proponowany opis również nie potwierdza tej zasady a więc daje wyniki jakościowo zgodne



Rys. 3

z doświadczeniami. W tym celu rozważmy w oparciu o proponowaną koncepcję, odkształcenia pełzania dla obciążenia zrealizowanego według dwóch programów (rys. 3). Wykorzystując rozwiązanie podstawowego układu równań (2.1), (2.2) i przyjmując  $n > k + 1$ , otrzymamy następujące wartości odkształceń:

dla I programu obciążenia

$$0 \leq t \leq \Delta t_1, \quad \sigma = \sigma_0$$

$$(5.1) \quad \varepsilon_{cI}(\Delta t_1) = \varepsilon_{cI1} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

$$\Delta t_1 \leq t \leq \Delta t_1 + \Delta t_2 = t_2, \quad \sigma = m\sigma_0, \quad m < 1,$$

$$(5.2) \quad \varepsilon_{cI}(t_2) = \varepsilon_{cI2} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [1 - m^{n-k}] + \right. \\ \left. + m^{n-k} \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

dla II programu obciążenia

$$0 \leq t \leq \Delta t_2, \quad \sigma = m\sigma_0, \quad m < 1,$$

$$(5.3) \quad \varepsilon_{cII}(\Delta t_2) = \varepsilon_{cII1} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} m^{\frac{n-k}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

$$\Delta t_2 \leq t \leq \Delta t_2 + \Delta t_1 = t_2, \quad \sigma = \sigma_0,$$

$$(5.4) \quad \varepsilon_{cII}(t_2) = \varepsilon_{cII2} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [m^{n-k} - 1] + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{n+1-k}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

We wzorach tych oznaczono

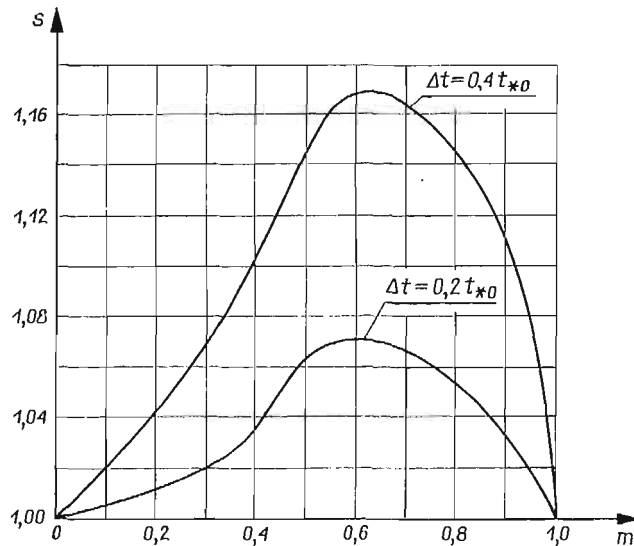
$$t_{*0} = \frac{1}{B(k+1)\sigma_0^k}$$

Stosunek końcowych wartości odkształceń pełzania dla obu programów (5.2), (5.4) wynosi

$$(5.5) \quad s = \frac{\varepsilon_{cII2}}{\varepsilon_{cI2}} = \frac{\left[ 1 - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [m^{n-k} - 1] + \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - m^{n-k}}{\left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [1 - m^{n-k}] + m^{n-k} \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1}$$

Dla zwykłej teorii umocnienia wartości odkształceń w chwili  $t_2$  dla obu programów potwierdzają zasadę komutatywności i wynoszą

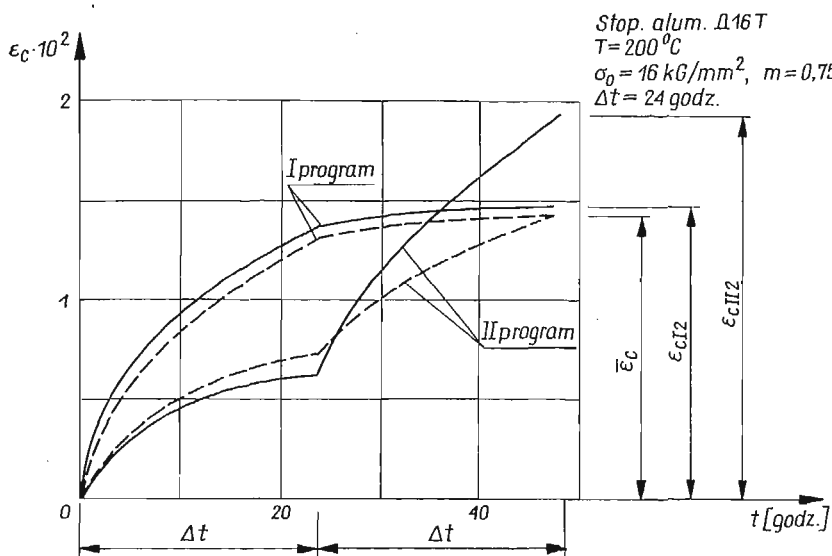
$$(5.6) \quad \bar{\varepsilon}_{cI2} = \bar{\varepsilon}_{cII2} = \{A(\alpha+1)\sigma_0^n(\Delta t_1 + m^n \Delta t_2)\}^{\frac{1}{\alpha+1}}$$



Rys. 4

Dla przypadku  $\Delta t_1 = \Delta t_2$  i wybranych wartości stałych materiałowych ( $n = 4$ ,  $k = 2$ ) sporządzono wykres zależności stosunku  $s$  od  $m$  (rys. 4). Do obliczeń przyjęto  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = = 0,2 t_{*0}$  oraz  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0,4 t_{*0}$ . Dla wszystkich  $0 < m < 1$  odkształcenie w chwili  $t_2$  jest większe przy zwiększaniu obciążenia (program II) niż przy jego zmniejszaniu (pro-





Rys. 5

gram I). Zjawisko to było pokazane doświadczalnie; na rys. 5 przytoczono wyniki doświadczeń z pracy [9] oraz — liniami przerywanymi — krzywe teoretyczne dla teorii umocnienia.

### 6. Relaksacja naprężeń

Dla opisu zjawiska relaksacji naprężeń konieczne jest scałkowanie równań (2.1), (2.2) przy założeniu  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$  z warunkami początkowymi  $\sigma(0) = \sigma_0$  i  $\omega(0) = 0$ , oraz uwzględnienie odkształceń sprężystych. Dla poszukiwanych funkcji  $\sigma(t)$  i  $\omega(t)$  otrzymujemy teraz układ

$$(6.1) \quad \int_0^t \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n (1-\omega)^{-n} dt = t_0 \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\alpha+1}, \quad (1-\omega)^{k+1} = 1 - \frac{1}{t_{*0}} \int_0^t \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^k dt,$$

gdzie  $t_0 = \sigma^{\alpha+1-n} / AE^{\alpha+1}(\alpha+1)$ .

Analityczne rozwiązywanie układu (6.1) jest dosyć kłopotliwe, podobnie jak to jest dla zwykłej teorii umocnienia, gdzie na ogół stosuje się metody numeryczne. Wygodnym wydaje się tu całkowanie układu (6.1) krokami po naprężeniu. Oznaczając przez  $\sigma_i$  naprężenie w chwili  $t_i$ , położymy:

$$(6.2) \quad \sigma_i = \sigma_0(1-i\delta), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{1}{\delta},$$

gdzie  $0 < \delta < 1$  jest krokiem po  $\sigma_i$  (np.  $\delta = 0, 1$ ). Przyjmijmy, że naprężenie  $\sigma_i$  jest stałe w przedziale czasu  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Teraz układ (6.1) można zapisać w postaci:

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^i (1-j\delta)^n (1-\omega_j)^{-n} \Delta t_j = t_0 (i\delta)^{\alpha+1}, \quad (1-\omega_i)^{k+1} = 1 - \frac{1}{t_{*0}} \sum_{j=1}^i (1-j\delta)^k \Delta t_j.$$

Z równań tych można wyznaczać  $\Delta t_i$  i  $\omega_i$  dla każdego kroku. Ten sposób postępowania wymaga jednak rozwiązywania równań algebraicznych wysokiego stopnia ze względu na  $\omega_i$ . Aby tego uniknąć, można — szczególnie przy zastosowaniu maszyn cyfrowych — wyznaczyć  $\Delta t_i$  z równań zwykłej teorii umocnienia, które w przyjętych oznaczeniach mają postać:

$$(6.4) \quad \sum_{j=1}^i (1-j\delta)^n \Delta t_j = t_0 (i\delta)^{\alpha+1},$$

a następnie z drugiego z równań (6.3) obliczać  $\omega_i$ . Podstawiając  $\omega_i$  do pierwszego z równań (6.3) wyznaczmy poprawioną wartość  $\Delta t_i$ , na podstawie której z drugiego równania wyznaczamy kolejne przybliżenie dla  $\omega_i$ . Ten proces iteracyjny należy prowadzić aż do uzyskania żądanej dokładności obliczeń.

Przebieg krzywych relaksacji, wyznaczonych na podstawie (6.1) [bądź (6.3)] zależy od wartości stosunku  $t_0/t_{*0}$ , który np. dla stali i przy naprężeniach  $\sigma_0 < \sigma_e$  ( $\sigma_e$  — granica sprężystości) jest rzędu  $10^{-6}$ . Tym niemniej krzywe te układają się poniżej krzywych otrzymanych na podstawie teorii umocnienia, a więc tak, jak i krzywe doświadczalne (zob. np. [2]). Różnice ilościowe pomiędzy obiema teoriami są jednak bardzo małe, gdyż wpływ szybko malejących naprężeń na uszkodzenia, a co za tym idzie na odkształcenia, jest mały.

## 7. Zniszczenie mieszane

Równanie (1.8) opisuje proces narastania uszkodzeń materiału, w wyniku którego następuje zniszczenie kruche. Realizuje się ono dla małych wartości naprężeń. Dla dużych naprężeń HOFF [4] zaproponował opis zniszczenia lepkiego, uwzględniając duże odkształcenia dla pełzania ustalonego. Propozycję uwzględnienia obu rodzajów zniszczenia podał KACZANOW [5], nie biorąc jednak pod uwagę wpływu uszkodzeń na odkształcenia i opierając się na teorii pełzania ustalonego. Dla pełzania nieustalonego koncepcje Hoffa i Kaczanowa rozwinął NAMIESTNIKOW [8]. Opis pełzania dla teorii pełzania ustalonego, przy uwzględnieniu dużych odkształceń i wpływu na nie uszkodzeń, zaproponował RABOTNOW [16].

Przyjmując logarytmiczną miarę odkształceń i wykorzystując warunek nieściśliwości, otrzymamy z (2.1) i (2.2) układ równań

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^\alpha &= A \left( \frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^n \exp(n\varepsilon_c), \\ \dot{\omega} &= B \left( \frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^k \exp(k\varepsilon_c). \end{aligned}$$

W dalszym ciągu przyjmiemy  $n > k+1$ . Dzieląc równania (7.1) stronami przez siebie i obustronnie całkując, otrzymamy

$$\int_0^{\varepsilon_c} \varepsilon_c^\alpha \exp[(k-n)\varepsilon_c] d\varepsilon_c = \frac{A}{B} \sigma_0^{n-k} \int_0^{\omega} (1-\omega)^{k-n} d\omega.$$

Dla całkowitych  $\alpha$  całkę po lewej stronie powyższej równości można obliczyć; otrzymamy stąd związek pomiędzy  $\varepsilon_c$  i  $\omega$  w postaci

$$(7.2) \quad \varepsilon_c = \frac{1}{n-k} \ln \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-i)!} \frac{\varepsilon_c^{\alpha-i}}{(n-k)^i} = -\frac{1}{n-k} \ln \left\{ \frac{\alpha!}{(n-k)^\alpha} + \nu \frac{\nu}{(1-\omega)^{n-(k+1)}} \right\},$$

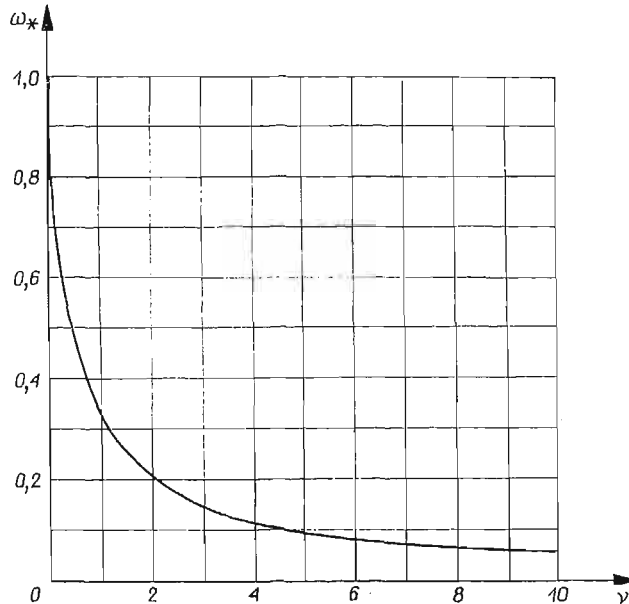
gdzie oznaczono

$$(7.3) \quad \nu = \frac{A}{B} \frac{n-k}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k}.$$

Z warunku istnienia prawej strony równości (7.2) otrzymujemy

$$(7.4) \quad \omega \leq \omega_* = 1 - \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{\nu} \frac{\alpha!}{(n-k)^\alpha}} \right]^{\frac{1}{n-(k+1)}},$$

gdzie  $\omega_*$  oznacza stopień zniszczenia kruchego w chwili, gdy odkształcenia pełzania narastają nieograniczenie (tzn. przekrój poprzeczny próbki zmierza do zera).



Rys. 6

Czas zniszczenia mieszanego można teraz wyznaczyć z drugiego z równań (7.1)

$$(7.5) \quad t_m = \frac{1}{B\sigma_0^k} \int_0^{\omega_*} (1-\omega)^k \exp[-k\varepsilon_c(\omega)] d\omega.$$

Warto zauważyć, że w ustalonej temperaturze, wzrost przyłożonego naprężenia  $\sigma_0$  powoduje zmniejszanie wartości  $\omega_*$  do wartości granicznej  $\omega_* = 0$ , co odpowiada przypadkowi zniszczenia idealnie lepkiego. Drugi przypadek graniczny  $\sigma_0 \rightarrow 0$  (tzn.  $\omega_* \rightarrow 1$ ) stanowi przejście do zniszczenia idealnie kruchego. Zależność  $\omega_*$  od  $\nu$  (a więc i od  $\sigma_0$ ) dla  $n = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\alpha = 1$  pokazuje rys. 6.

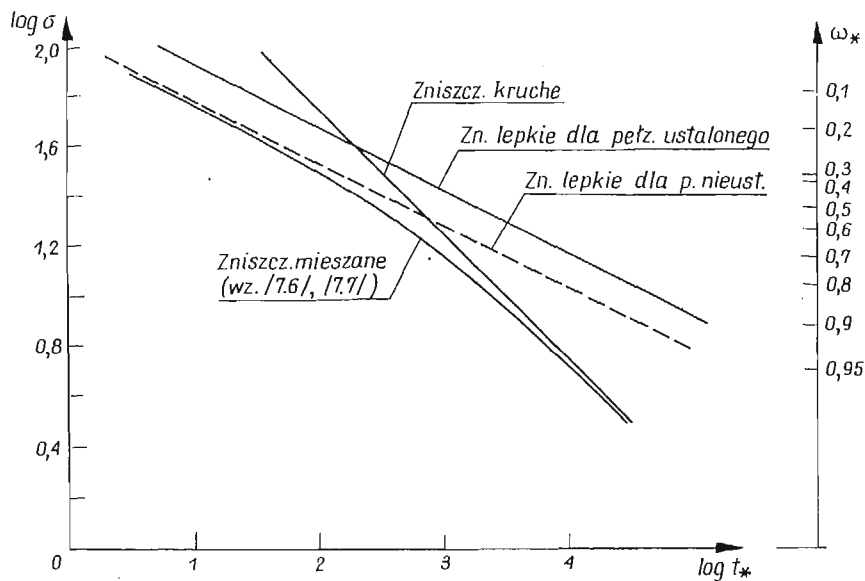
Posługiwanie się równaniami (7.1) w postaci analitycznej jest niewygodne, szczególnie gdy  $\alpha$  jest niecałkowite. Prostim sposobem będzie całkowanie krokami po  $\omega$  w przedziale  $0 \leq \omega \leq \omega_*$ . Przyjmując przyrosty  $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$  na tyle małe, aby małe były odpowiadające im przyrosty czasu  $\Delta t_i$  i zakładając, że  $\varepsilon_{ci}$  jest stałe w tych przedziałach czasu, otrzymamy równanie

$$(7.6) \quad \varepsilon_{ci}^{\alpha} \exp[(k-n)\varepsilon_{ci}] \Delta\varepsilon_{ci} = \frac{A}{B} \sigma_0^{n-k} \frac{1}{n-(k+1)} \left[ \frac{1}{(1-\omega_i)^{n-(k+1)}} - \frac{1}{(1-\omega_{i-1})^{n-(k+1)}} \right],$$

z którego możemy wyznaczyć  $\varepsilon_{ci}$ , a następnie z równania

$$(7.7) \quad (1-\omega_{i-1})^{k+1} - (1-\omega_i)^{k+1} = B\sigma_0^k(k+1) \exp(k\varepsilon_{ci}) \Delta t_i,$$

wyliczyć  $\Delta t_i$ . Krzywą wytrzymałości czasowej, zbudowaną w oparciu o wzory (7.6) i (7.7) pokazano na rys. 7. Jak widać z tego rysunku, proponowany opis zniszczenia mieszanego



Rys. 7

odpowiada zastąpieniu schematycznego wykresu  $\log t_* - \log \sigma_0$  w postaci dwu prostych — jedną krzywą. Asymptotyczne zbliżanie się tej krzywej do prostych wykresu schematycznego odpowiada przejściu do zniszczenia idealnie lepkiego (lewa gałąź) i idealnie kruchego (prawa gałąź wykresu).

## 8. Uwagi końcowe

Przedstawiona propozycja opisu pełnego procesu pękania metali jest uogólnieniem hipotezy RABOTNOWA [15] dzięki wprowadzeniu do rozważań zjawiska umocnienia. Jak pokazano, koncepcja niniejsza dobrze odpowiada stronie empirycznej zjawiska pękania. Pozwala ona nie tylko wyjaśniać fakty obserwowane doświadczalnie, lecz także przewidywać zachowanie się konstrukcji, pracujących w podwyższonych temperaturach.

Пропонowany opis daje możliwość opisanja redystrybucji naprężeń, zachodzącej w statycznie niewyznaczalnych konstrukcjach, a w konsekwencji na precyzyjniejsze wyznaczenie czasu zniszczenia tych konstrukcji. Przy umownym podziale krzywej pełzania na trzy odcinki, redystrybucję naprężeń można opisać tylko dla pełzania nieustalonego. Problem ten był niedawno omawiany w pracy CALLADINE [1]. Przedstawiona propozycja opisu pełzania, dla której nie wydziela się poszczególnych okresów pełzania, pozwoli na prześledzenie zmiany rozkładu naprężeń w ciągu całego procesu.

Poprawny opis pełzania przy skokowej zmianie naprężeń daje także możliwość opisu ruchu frontu zniszczenia dla złożonych konstrukcji.

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. R. CALLADINE, *Time-scales for redistribution of stress in creep of structures*, Proc. Roy. Soc., 1498. A 309, (1969).
2. В. И. Даниловская, Т. М. Иванова, Ю. Н. Работнов, *Ползучесть и релаксация хромомолибденовой стали*, Изв. АН СССР, ОТН, 5 (1955).
3. C. C. DAVENPORT, *Correlation of creep and relaxation properties of copper*, J. Appl. Mech., A 56, 10 (1938).
4. N. J. HOFF, *The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads*, J. Appl. Mech., 20 (1953).
5. Л. М. Качанов, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН, 8 (1958).
6. P. LUDVIK, *Elemente der technologischen Mechanik*, Berlin 1908.
7. A. NADAI, *On the creep of solids at elevated temperatures*, J. Appl. Phys., 6, 8 (1937).
8. В. С. Наместников, *О времени до разрушения при ползучести*, ПМТФ, 1 (1961)
9. В. С. Наместников, А. А. Хвостунков, *Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках*, ПМТФ, 4 (1960).
10. В. С. Наместников, Ю. Н. Работнов, *О гипотезе уравнения состояния при ползучести*, ПМТФ, 3 (1961).
11. F. K. G. ODQVIST, *Influence of primary creep on stresses in structural parts*, Trans. Roy. Inst. Techn., 66, Stockholm 1953.
12. F. K. G. ODQVIST, *Engineering theories of metallic creep*, Proc. Symp. su la plasticita nella scinza delle costruzioni, Varenna 1956.
13. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Oxford 1967.
14. Ю. Н. Работнов, *О механизме длительного разрушения*, Вопросы прочности мат. и констр., Москва 1959.
15. Yu. N. Работнов, *On the equations of state for creep*, Progress in Appl. Mech., New York 1963.
16. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Москва 1966.
17. В. М. Розенберг, *Ползучесть металлов*, Москва 1967.
18. R. SODERBERG, *The interpretation of creep tests for machine design*, Trans. ASME, 8, 58 (1936).
19. B. SODERQUIST, *Some aspects of creep and creep rupture*, Acta Polyt. Scand., Phys. Nucl. Ser., 58 (1968).
20. Н. С. Вилесова, В. С. Наместников, *Об одном параметре упрочнения*, ПМТФ, 3 (1964).

#### Р е з ю м е

#### О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ ВСЕГО ПРОЦЕССА ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ

Предложено полное описание всего процесса ползучести металлов, охватывающее все три условных участка кривой ползучести. Построена математическая модель в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, основанная на предположении параллельности процессов упрочнения и нарастания повреждений. При помощи этой модели исследована

ползучесть в условиях одноосного растяжения под действием как постоянной, так и внезапно изменяющейся нагрузки, что дало возможность более полно объяснить некоторые явления, наблюдаемые в экспериментах. Рассмотрена задача об определении материальных констант, а также указаны возможности прогнозирования временной прочности, основанные на предлагаемой теории. Рассмотрены процессы релаксации напряжений и смешанного вязко-хрупкого разрушения при конечных деформациях.

#### S u m m a r y

#### ON A POSSIBILITY OF DESCRIPTION OF FULL CREEP PROCESSES FOR METALS

A method of description of full creep processes of metals is proposed in the paper for all three conventional parts of typical creep curves. Under the assumption of parallel course for hardening and damage increase processes, the mathematical model is built in the form of a set of non-linear differential equations of the first order. Using the above model the creep under axial extension is analyzed for the cases of constant and jump variable loadings. In this way a richer explanation of experimentally observed facts is acquired. The problem of material constants determination as well as the possibility of predicting the time-dependent strength are discussed. The course of the stress relaxation process and, taking into account large deformations, the case of mixed visco-brittle fracture are also considered.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1971 r.*