

STACJONARNE ODDZIAŁYWANIE UKŁADU DWU NIESKOŃCZENIE MAŁYCH
DOWOLNIE ZORIENTOWANYCH ELEMENTÓW, PORUSZAJĄCEGO SIĘ W OŚRODKU
SWOBODNO-MOLEKULARNYM Z DOWOLNĄ PRĘDKOŚCIĄ

STANISŁAW K O S O W S K I (WARSZAWA)

Wstęp

Wyznaczanie charakterystyk aerodynamicznych ciał, tj. oporu, siły nośnej i przekazywania ciepła, należy do klasycznych zagadnień aerodynamiki. W zależności od potrzeb współczynniki te oblicza się w różnych reżimach przepływów, a więc w reżimie ośrodka ciągłego, w reżimie przejściowym czy wreszcie swobodno-molekularnym. Warunki swobodno-molekularne panują w ośrodku wtedy, jeśli średnia droga swobodna cząsteczek gazu jest znacznie większa od największej ze wzajemnych odległości ciał w nim zanurzonych. Można uważać, że w takich warunkach cząsteczki gazu praktycznie nie zderzają się z sobą, zderzają się natomiast z obiektami znajdującymi się w gazie. Olbrzymi wzrost zainteresowania przepływami w reżimie swobodno-molekularnym i bliskim swobodno-molekularnego nastąpił wraz z otwarciem możliwości przeprowadzania lotów i eksperymentów kosmicznych. Praktyka lotów i eksperymentów kosmicznych domaga się gwałtownie rozwiązania bardziej złożonych problemów; podejmowane są zagadnienia wyznaczania charakterystyk dynamicznych dla ciał bardziej złożonego kształtu, dla ciał niewypukłych, dla ciał znajdujących się w ruchu obrotowym i wreszcie dla prostszych układów ciał.

Zagadnienie opływu ciała wypukłego zasadniczo różni się od zagadnienia opływu dla ciała wklęsłego czy też układu ciał. Konieczność uwzględnienia wielokrotnych odbić cząsteczek gazu pomiędzy różnymi częściami powierzchni ciała wklęsłego lub różnymi powierzchniami dla układu ciał jest źródłem poważnych komplikacji matematycznych. Fakt ten możemy wyrazić inaczej w ten sposób, że dla ciał niewypukłych i układów ciał należy uwzględniać efekty interferencji swobodno-molekularnej. Literatura dotycząca jednak samej interferencji ciał w gazie lub przepływie swobodno-molekularnym jest zaskakująco uboga; na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat ukazało się w piśmiennictwie światowym (powszechnie dostępnym) zaledwie kilkanaście prac, z czego tylko kilka jest sensu stricto związanych z tematem niniejszej pracy. Większość tych prac dotyczy interferencji najprostszyc ciał i w najprostszej geometrii przy założeniu hipersoniczności przepływu i dyfuzyjnego lub maxwellowskiego oddziaływania gazu z powierzchnią.

I tak w pracy [6] rozwiązane jest zadanie o aerodynamicznym oddziaływaniu dwu płytek prostokątnych, tworzących kąt prosty, w strumieniu swobodno-molekularnym nacierającym wzdłuż wspólnej krawędzi płytek, przy założeniu modelu dyfuzyjnego. W pracy [4] rozpatruje się dwie jednakowe, równoległe do siebie, prostokątne płaszczyzny

o tej samej temperaturze w strumieniu swobodno-molekularnym, napływającym pod zerowym kątem natarcia równoległe do jednej z krawędzi, również przy założeniu modelu dyfuzyjnego — siły interakcji starają się odepchnąć płaszczyzny. Z kolei podobny problem dla dwu okrągłych równoległych płytek, położonych w pewnej odległości od siebie na wspólnej osi, rozwiązuje autor [5] numerycznie metodą Monte-Carlo, kontrolując takie parametry, jak liczba Macha napływającego strumienia, kąt natarcia, stosunki promieni i temperatur, współczynniki akomodacji i dyfuzyjności.

Problem oddziaływania dwu ciał skończonych rozmiarów poruszających się w ośrodku swobodno-molekularnym, tj. problem wymiany pędu i energii pomiędzy ciałami i ośrodkiem jest na tyle złożony, że nie daje się w sposób ścisły i analityczny rozwiązać nawet w najprostszym przypadku, tj. spoczywających ciał o najwyższej symetrii (kule), przy założeniu również najprostszego — dyfuzyjnego modelu odbicia [8]. Ścisłe analitycznie udało się jedynie rozwiązać zagadnienie wymiany ciepła dla poruszającego się układu dwu kul o równych temperaturach w założeniu dyfuzyjnego modelu odbicia [11].

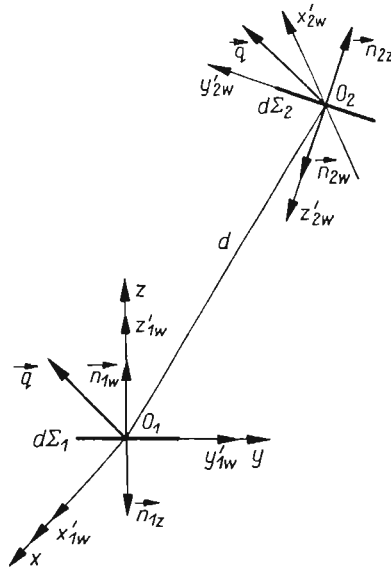
Inne szczególne przypadki np. małych prędkości ciał (w porównaniu z prędkością termiczną ośrodka) i dużych odległości [9], dużych prędkości i dużych odległości [10] lub dużych prędkości i dowolnych odległości, można rozwiązać tylko w sposób przybliżony, przy czym w ostatnim przypadku rozwiązanie nie udaje się w pełni analitycznie doprowadzić do końca [13]. Rozwiązanie to wymaga numerycznego uzupełnienia. Należy wyraźnie podkreślić, że problem oddziaływania ciał w ośrodku swobodno-molekularnym w ogóle nie nadaje się do bezpośredniej analizy numerycznej (wiąże się to z koniecznością obliczania 5-krotnych całek o skomplikowanych obszarach całkowania, wynikających ze złożonej geometrii zasłaniania). We wszystkich wspomnianych wyżej przypadkach, gdzie uzyskanie rozwiązania analitycznego lub numerycznego staje się możliwe, przyjmowano najprostszy dyfuzyjny model odbicia. Konieczność przebadania oddziaływania ciał ze względu na model odbicia, jak również odzyskania dalszych charakterystycznych cech oddziaływania wymykających się przybliżonemu i jednostkowemu traktowaniu zagadnienia, skłoniło do zajęcia się oddziaływaniem nieskończenie małych elementów i analizy tego oddziaływania w możliwie jak najbardziej ogólnym aspekcie. Zauważmy, że zasadniczo są do pomyślenia dwa uproszczenia:

- a) uproszczona geometria (jeden kierunek prędkości), pełny rozkład modułu prędkości,
- b) zaniedbany rozkład modułu prędkości (jedna prędkość), pełna geometria.

Zagadnienie oddziaływania nieskończenie małych elementów dokładnie koresponduje z przypadkiem a).

Ogólne sformułowania zagadnienia

Rozważmy układ dwu nieskończenie małych elementów płaskich $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$ dowolnie względem siebie zorientowanych, poruszających się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością \mathbf{q} . Z układem wiążemy dwa rodzaje układów współrzędnych: globalny x , y , z i lokalny x' , y' , z' (rys. 1). Układ globalny ustalamy tak, aby jego początek leżał na elemencie $d\Sigma_1$, oś z była skierowana prostopadłe do elementu i w stronę elementu $d\Sigma_2$, natomiast oś x leżała w płaszczyźnie (z, \mathbf{q}) . Układy lokalne x' , y' , z' wybieramy tak, by początek leżał na elemencie $d\Sigma_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$). by oś z' była skierowana wzdłuż normalnej



Rys. 1

wewnętrznej lub zewnętrznej do $d\Sigma_\alpha$, zaś oś x' leżała w płaszczyźnie (\mathbf{q}, z') . Normalną do elementu $d\Sigma_1$ skierowaną w stronę $d\Sigma_{2z}$ oznaczamy \mathbf{n}_{1w} (wewnętrzna), skierowaną w stronę przeciwną \mathbf{n}_{1z} (zewnętrzna), analogiczne oznaczenia \mathbf{n}_{2w} , \mathbf{n}_{2z} przyjmujemy dla elementu $d\Sigma_2$. Poszukujemy siły i wymiany ciepła, związanych z ruchem układu.

A. Zagadnienie sił

1. Wyrażenia na siły. Siłę działającą na element $d\Sigma_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) możemy przedstawić jako superpozycję siły niezaburzonej $\mathbf{F}_{\alpha 0}$, jaka występowałaby pod nieobecność elementu $d\Sigma_\beta$ ($\beta = 1, 2$; jeśli $\alpha = 1$ to $\beta = 2$ i na odwrót) i siły iteracyjnej $\mathbf{F}_{\alpha in}$, będącej wynikiem obecności elementu $d\Sigma_\beta$.

Siłę $\mathbf{F}_{\alpha 0}$ można złożyć z siły $\mathbf{F}_{\alpha 0w}$ działającej na wewnętrzną powierzchnię elementu α i z siły $\mathbf{F}_{\alpha 0z}$ działającej na zewnętrzną powierzchnię elementu α

$$(1.1) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha 0} + \mathbf{F}_{\alpha in}.$$

$$(1.2) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0} = \mathbf{F}_{\alpha 0w} + \mathbf{F}_{\alpha 0z}.$$

Siły te, równoważne strumieniom pędu, przekazywanym elementowi $d\Sigma_\alpha$ wyrażają się całkami po przestrzeni prędkości z elementarnych strumieni pędu określonych odpowiednimi funkcjami rozkładu:

$$(1.3) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0w} = -m \left[\int_{\Omega_{1/2}^{(i)}} \mathbf{c}_{0\alpha} (\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0-\alpha}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} + \int_{\Omega_{1/2}^{(r)}} \mathbf{c}_{\alpha\alpha} (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0-\alpha}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha w},$$

$$(1.4) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0z} = -m \left[\int_{\Omega_{1/2}^{(i)}} \mathbf{c}_{0\alpha} (\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha z}) f_{0-\alpha}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} + \int_{\Omega_{1/2}^{(r)}} \mathbf{c}_{\alpha\alpha} (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha z}) f_{0-\alpha}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha z},$$

gdzie m — masa cząsteczek gazu ośrodka, $\mathbf{c}_{0\alpha}$ — prędkość cząsteczki ośrodka względem elementu α , $\mathbf{c}_{\alpha\alpha}$ — prędkość cząsteczki odbitej od elementu $d\Sigma_\alpha$ w układzie tego elementu, $f_{0-\alpha}^{(i)}$ — funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka w układzie elementu α , $f_{0-\alpha}^{(r)}$ —

funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka odbitych od wewnętrznej powierzchni elementu α , $f_{0-\alpha z}^{(r)}$ — funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka odbitych od zewnętrznej powierzchni elementu α , $\Omega_{1/2}^c$ — półprzestrzeń prędkości, $d^3\mathbf{c}$ — element objętości w przestrzeni prędkości.

Z kolei, siłę interakcyjną \mathbf{F}_{in} , możemy złożyć z siły interakcyjnej $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}$, związanej bezpośrednio z obecnością elementu $d\Sigma_\beta$ i siły $\mathbf{F}_{\alpha in0}$ związanej pośrednio z obecnością $d\Sigma_\beta$, mianowicie w taki sposób, że z obecnością $d\Sigma_\beta$ zmienia się funkcja rozkładu cząsteczek odbitych od $d\Sigma_\alpha$

$$(1.5) \quad \mathbf{F}_{in} = \mathbf{F}_{in\beta} + \mathbf{F}_{\alpha in0}.$$

Podobnie jak poprzednio, siły te wyrażają się przez odpowiednie całki z funkcji rozkładu:

$$(1.6) \quad \mathbf{F}_{\alpha in\beta} = m \left[\int_{\Omega^c} \mathbf{c}_{\beta\alpha}(\mathbf{c}_{\beta\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)} d^3\mathbf{c}_{\beta\beta} - \int_{\Omega^c} \mathbf{c}_{0\alpha}(\mathbf{c}_{0\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta}^{(i)} d^3\mathbf{c}_{0\beta} \right] d\Sigma_{\beta w},$$

$$(1.7) \quad \mathbf{F}_{\alpha in0} = m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} - \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0-\alpha}^{(r)} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha w},$$

gdzie $\mathbf{c}_{\beta\alpha}$, $\mathbf{c}_{\beta\beta}$ — prędkość cząsteczek odbitych od elementu $d\Sigma_\beta$ odpowiednio względem elementu $d\Sigma_\alpha$, $d\Sigma_\beta$, $\mathbf{c}_{0\beta}$ — prędkość cząsteczki ośrodka względem elementu $d\Sigma_\beta$, $f_{0\alpha}^{(i)}$ — funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka w układzie $d\Sigma_\beta$, $f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)}$, $f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ — funkcje rozkładu cząsteczek odbitych od powierzchni wewnętrznych odpowiednio elementów $d\Sigma_{\alpha w}$, $d\Sigma_{\beta w}$, a padających z ośrodka i elementów α lub β odpowiednio, Ω^c — przestrzeń modułu prędkości.

W wyrażeniu na siłę $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}$ występuje jedynie całkowanie po przestrzeni modułu prędkości, gdyż mamy tylko jeden kierunek prędkości, od elementu β do α . Funkcje $f_{0\alpha}^{(i)}$, $f_{0\beta}^{(i)}$ są znane, funkcje $f_{0-\alpha w}^{(r)}$, $f_{0-\alpha z}^{(r)}$, $f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)}$, $f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ nieznanne.

O ośrodku zakładamy, że znajduje się w stanie globalnej równowagi termodynamicznej, opisanym funkcją rozkładu Maxwella-Boltzmana. Zgodnie z tym mamy

$$(1.8) \quad f_{0-\alpha}^{(i)} = A^{(i)} \exp \{ -B_0^{(i)} (\mathbf{c}_{0\alpha} + \mathbf{q})^2 \},$$

$$A^{(i)} = n_0 \left(\frac{2\pi k T_0}{m} \right)^{-3/2}, \quad B_0^{(i)} = \frac{m}{2k T_0},$$

gdzie n_0 — gęstość liczbowa cząsteczek ośrodka, T_0 — temperatura ośrodka, k — stała Boltzmana.

Funkcje $f^{(r)}$ dla cząstek odbitych możemy znaleźć z równań ciągłości (zachowania liczby cząstek) postulując model odbicia (model oddziaływania gazu z powierzchnią).

W niniejszej pracy w charakterze modelu odbicia przyjmiemy zmodyfikowany model Maxwella z anizotropową częścią dyfuzyjną, mianowicie

$$(1.9) \quad f^{(r)} = (1 - \varepsilon) f^{(r)(s)} + \varepsilon f^{(r)(D)}.$$

Część molekuł $(1 - \varepsilon)$ odbija się zwierciadlanie z funkcją zwierciadlanego odbicia $f^{(r)(s)}$, pozostała część ε — odbija się dyfuzyjnie anizotropowo z funkcją rozkładu $f^{(r)(D)}$. Zatem

$$(1.10) \quad f^{(r)(s)} = f^i[\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)})],$$

$$(1.11) \quad f^{(r)(D)} = A^D \exp \{ -B^D [\alpha \mathbf{c}^{(r)} - \beta (\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{q}^*]^2 \},$$

$$(1.12) \quad \mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}) = \mathbf{c}^{(r)(s)} - 2(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad B^D = \frac{m}{2k T^{(D)}},$$

gdzie \mathbf{n} jest normalną do ścianki, $T^{(D)}$ temperaturą ścianki; $\alpha, \beta, \mathbf{q}^*$ — parametrami modelu, A^D — nieokreśloną stałą, którą wyznaczyć można z rozwiązania równania ciągłości. Przyjmując w $f^{(r)D}$ $\beta = 0$ otrzymujemy model Nocilli, $q^* = 0$ model odbicia dyfuzyjnego z anizotropią normalną, przyjmując wreszcie $\beta = 0, q^* = 0$ dostajemy zwykły model dyfuzyjny, który w połączeniu z modelem zwierciadlanym, jak w (1.9), daje zwykły model Maxwella.

Model typu (1.9) z dyfuzyjną funkcją rozkładu wydaje się być wystarczająco ogólny, by z rozwiązania zagadnienia oddziaływania w tym modelu można było sądzić o zależności oddziaływania od modelu odbicia.

Do efektywnego obliczenia siły F_α konieczna jest znajomość stałej A_D w funkcjach rozkładu cząstek odbitych. Możemy ją odzyskać z rozwiązania równania ciągłości, przy czym rozwiązanie te znajduje się inaczej na zaburzonych powierzchniach elementów, inaczej na niezaburzonych; a zróżnicowanie to jest prostą konsekwencją faktu, że na powierzchni «niezaburzone» padają tylko cząsteczki z ośrodka, natomiast na «zaburzone» cząsteczki z ośrodka i z elementów i w tych przypadkach zagadnienie staje się znacznie bardziej złożone ze względu na efekty interakcji.

2. Rozwiązanie równań ciągłości (obliczenie stałych A^D). a) *Powierzchnie elementów «niezaburzone».* Równanie ciągłości jest równością strumieni cząstek padającego $N_{0-\alpha(V)}^{(i)}$ i odbitego $N_{0-\alpha(V)}^{(r)}$, mianowicie

$$(2.1) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = N_{0-\alpha(V)}^{(r)}.$$

Wskaźnik $0-\alpha(V)$ oznacza, że cząsteczki padają z ośrodka na powierzchnię α (1 lub 2) wewnętrzną lub zewnętrzną, czemu odpowiada znak alternatywy w nawiasie ($V \equiv zV_W$) Wyrażając strumienie przez funkcje rozkładu mamy

$$(2.2) \quad \int_{\Omega_{i/2}^{\alpha}} (-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} = \int_{\Omega_{i/2}^{\alpha}} (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha}.$$

Przyjmując w charakterze $f^{(r)}$ zmodyfikowany model Maxwella (1.9), możemy napisać

$$(2.3) \quad (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(i)} + \varepsilon_{\alpha(V)} N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(r)S} + \varepsilon_{\alpha(V)} N_{0-\alpha(V)}^{(r)D},$$

gdzie $\varepsilon_{\alpha(V)}$ — jest współczynnikiem mieszania dla powierzchni $\alpha(V)$,

$$(2.4) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(r)S} = \int_{\Omega_{i/2}^{\alpha}} (\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(r)S} d^3 \mathbf{c}^{(r)}, \quad N_{0-\alpha(V)}^{(r)D} = \int_{\Omega_{i/2}^{\alpha}} (\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}^{(r)}.$$

Ponieważ

$$(2.5) \quad (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(r)S},$$

także

$$(2.6) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = N_{0-\alpha(V)}^{(r)D}.$$

Rozpisując wykładnik w wyrażeniu na $f^{(r)D}$ (1.11), można stwierdzić, że we współrzędnych prostokątnych wyrażenie podcałkowe daje się rozdzielić, wobec czego dostajemy:

$$(2.7) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(r)D} = A_{0-\alpha(V)}^D I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(1) I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(2) I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(3) \exp\{-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}\},$$

$$I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_{\alpha(V)}^D [\alpha_{\alpha(V)} c_{\alpha\alpha}^2 - 2\alpha_{\alpha(V)} c_{\alpha\alpha x} q_{0-\alpha(V)x}^*]\} dc_{\alpha\alpha x},$$

$$(2.8) \quad I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_{\alpha(V)}^D [\alpha_{\alpha(V)}^2 c_{\alpha\alpha y}^2 - 2\alpha_{\alpha(V)} c_{\alpha\alpha y} g_{0-\alpha y}^*]\} dc_{\alpha\alpha y},$$

$$I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(3) = \int_0^{\infty} c_{\alpha\alpha z} \exp\{-B_{\alpha(V)}^D [(\alpha_{\alpha(V)} - \beta_{\alpha(V)})^2 c_{\alpha\alpha z}^2 - 2(\alpha_{\alpha(V)} - \beta_{\alpha(V)}) (\mathbf{n}_{\alpha(V)} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha(V)}^*) c_{\alpha\alpha z}]\} dc_{\alpha\alpha z} \cdot z | \mathbf{n}_{\alpha(V)}.$$

Korzystając z tego samego faktu możemy podobnie wyrazić

$$(2.9) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(1) I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(2) I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(3),$$

$$I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0\alpha x}^2 + 2c_{0\alpha x} q_x']\} dc_{0\alpha x},$$

$$(2.10) \quad I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0\alpha y}^2 + 2c_{0\alpha y} q_y']\} dc_{0\alpha y},$$

$$I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(3) = \int_0^{\infty} -c_{0\alpha Vz} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0\alpha Vz}^2 + 2c_{0\alpha Vz} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\} dc_{0\alpha Vz}.$$

Na podstawie (2.6), (2.7) i (2.9) znajdujemy ostatecznie

$$(2.11) \quad A_{0-\alpha(V)}^D = \frac{A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} I_{0-\alpha V}^{(i)}(1) I_{0-\alpha V}^{(i)}(2) I_{0-\alpha V}^{(i)}(3)}{I_{0-\alpha V}^D(1) I_{0-\alpha V}^D(2) I_{0-\alpha V}^D(3) \exp\{-B_{\alpha V}^D q_{0\alpha V}^{*2}\}} \equiv \frac{A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} \bar{I}_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}}{\exp\{-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}\} \bar{I}_{0-\alpha V}^{(D)N}}.$$

b) *Powierzchnie elementów «zaburzone»*. Korzystając z rozważań w p. a) możemy napisać

$$(2.12) \quad N_{0-\alpha w-\beta w}^{(r)D} = N_{0\alpha w-\beta w}^{(i)}, \quad N_{0-\alpha w-\beta w}^{(r)D} = \int_{\Omega_{1j2}^{(r)}} (\mathbf{c}^{(r)} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}^{(r)}.$$

Symbol $0\alpha W-\beta W$ oznacza, że cząstki padają z ośrodka i z wewnętrznej powierzchni elementu α ($\alpha = 1 \vee 2$) na wewnętrzną powierzchnię elementu β ($\beta = 2 \vee 1$), przy czym jeśli $\alpha = 1$ to $\beta = 2$ i odwrotnie. Strumień cząstek padający na wewnętrzną powierzchnię elementu $\beta - N_{0\alpha w-\beta w}^{(i)}$ możemy złożyć z strumienia $N_{0-\beta w}^{(i)}$, padającego tylko z ośrodka i strumienia interakcyjnego $N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}$ pochodzącego z wewnętrznej powierzchni elementu α :

$$(2.13) \quad N_{0\alpha w-\beta w}^{(i)} = N_{0-\beta w}^{(i)} + N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}.$$

Strumienie te wyrażają się poprzez funkcje rozkładu następująco:

$$(2.14) \quad N_{0-\beta w}^{(i)} = \int_{\Omega_{1,2}^c} (-\mathbf{c}_{0\beta w} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\beta},$$

$$(2.15) \quad N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)} = \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{\alpha w-\beta w}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\beta} - \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{0\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta w}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\beta},$$

gdzie $f_{\alpha w-\beta w}^{(i)}$ jest funkcją rozkładu molekuł padających z wewnętrznej powierzchni elementu α na wewnętrzną powierzchnię elementu β . Tę samą funkcję można traktować jako funkcję rozkładu molekuł odbitych od wewnętrznej powierzchni elementu α , przy czym molekuły odbite pochodzą z kolei z padających na element α z ośrodka i z wewnętrznej powierzchni β . Fakt ten można wyrazić związkami

$$(2.16) \quad f_{\alpha w-\beta w}^{(i)} = f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}.$$

W strumieniu $N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}$ całkowanie zachodzi tylko po przestrzeni modułu prędkości. Zauważając, że

$$(2.17) \quad \mathbf{c}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)} = c_{\alpha\alpha}^{(r)} \mathbf{d}_{\alpha}^{(V)},$$

znajdujemy

$$(2.18) \quad d^3 \mathbf{c}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\alpha}^{(r)2} d c_{\alpha\alpha}^{(r)} d\Omega \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)},$$

$$(2.19) \quad d\Omega \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)} = \frac{\mathbf{d}^{(V)} \mathbf{n}_{\alpha w}}{d^2} d\Sigma_{\alpha w}^*,$$

gdzie d — odległość elementów 1, 2, $\mathbf{d}_{\alpha}^{(V)}$ — wektor jednostkowy w kierunku od elementu α do elementu β .

Podstawiając w poszczególnych strumieniach funkcje rozkładu $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D}$, $f_{0-\beta w}^{(i)}$, $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} &= A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp\{-B_{\beta w}^D [\alpha^{\beta w} \mathbf{c}_{\beta w} - \beta_{\beta w} (\mathbf{c}_{\beta w} \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{n}_{\beta w} - \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*]^2\}, \\ f_{0-\beta w}^{(i)} &= A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0-\beta w}^{(i)} + \mathbf{q}]^2\}, \\ f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} &= (1 - \varepsilon_{\alpha w}) f_{0-\alpha w}^{(r)S} + \varepsilon_{\alpha w} f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} \end{aligned}$$

i obliczając strumienie $N_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D}$ oraz $N_{0-\beta w}^{(i)}$ we współrzędnych prostokątnych (w wyrażeniach podcałkowych można w tych współrzędnych dokonać separacji zmiennych), natomiast strumień $N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}$ we współrzędnych sferycznych (w strumieniu tym całkowanie przeprowadza się tylko po przestrzeni modułu prędkości) dostajemy:

$$(2.21) \quad N_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = A_{0\alpha w-\beta w}^D I_{0\alpha w-\beta w}^D (1) I_{0\alpha w-\beta w}^D (2) I_{0\alpha w-\beta w}^D (3) \exp\{-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2}\} \equiv A_{0\alpha w-\beta w}^D \bar{I}_{0\alpha w-\beta w}^D,$$

$$(2.22) \quad N_{0-\beta w}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} I_{0-\beta w}^{(i)(N)} (1) I_{0-\beta w}^{(i)(N)} (2) I_{0-\beta w}^{(i)(N)} (3) \equiv A_0^{(i)} \bar{I}_{0-\beta w}^{(i)(N)},$$

$$(2.23) \quad \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{0\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\beta} = -d\Omega \mathbf{c}_{0\beta} (\mathbf{d}_{\alpha}^{(V)} \mathbf{n}_{\beta w}) I_{0\beta w}^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} \equiv A_0^{(i)} I_{0\beta w}^{(i)el} d\Sigma_{\alpha w}^*,$$

$$d\Omega \mathbf{c}_{0\beta} \equiv d\Omega \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)},$$

$$(2.24) \quad \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{z\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{\alpha w - \beta w}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\beta} = -[(1 - \varepsilon_{zw})(\mathbf{d}_z^{(V)} \mathbf{n}_{\beta w}) A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(V)} q^2\} I_{0-\alpha w}^{(r)s} + \\ + \varepsilon_{zw}(\mathbf{d}_z^{(V)} \mathbf{n}_{\beta w}) I_{0\beta w - \alpha w}^{(r)D} A_{0\beta w - \alpha w}^D \exp\{-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}\}] \frac{(\mathbf{d}_\alpha^{(V)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} \equiv$$

$$\equiv A_0^{(i)} I_{0-\alpha w}^{(r)(s)el} d\Sigma_{\alpha w} + A_{0\beta w - \alpha w}^D I_{0-\beta w - \alpha w}^{(D)(r)el} d\Sigma_{\alpha w},$$

$$(2.25) \quad I_{0-\alpha w}^{(r)sel} = \int_0^\infty c^{(r)3} \exp(-B_0^{(i)} \{c^{(r)2} + 2c^{(r)}[(\mathbf{d}_V \mathbf{q}) - (\mathbf{d}_V \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{n}_{\alpha w} \mathbf{q})]\}) dc^{(r)},$$

$$(2.26) \quad I_{0\beta w - \alpha w}^{(r)Del} = \int_0^\infty c^{(r)3} \exp\{-B_{\alpha w}^D c^{(r)2} [\alpha_{\alpha w}^2 + (\beta_{\alpha w}^2 - 2\alpha_{\alpha w} \beta_{\alpha w})(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2]\} \times \\ \times \exp\{2B_{\alpha w}^D c^{(r)} [\alpha_{\alpha w} (\mathbf{d}_V \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^* - \beta_{\alpha w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}))] dc^{(r)}\}.$$

Wielkości $I_{0\alpha w - \beta w}^D$ można uzyskać z wielkości $I_{0-\alpha(V)}^D$, figurujących w (2.8) przez formalną zamianę symboli $0-\alpha(V)$ na $0\alpha W-\beta W$; podobnie wielkości $I_{0-\beta w}^{(i)}$ z wielkości $I_{0-\alpha(V)}^{(i)}$ [wzór (2.10)] przez zamianę $0-\alpha(V)$ na $0-\beta(V)$. Stałe $A_{0\alpha w - \beta w}^D$ i $A_{0\beta w - \alpha w}^D$ są nieznane. Możemy je wyznaczyć z równania (2.12), które w rzeczywistości reprezentuje sobą układ dwu równań: jedno dla $\alpha = 1, \beta = 2$, drugie dla $\alpha = 2, \beta = 1$. Rozwiązując układ (2.12) znajdujemy ostatecznie:

$$(2.27) \quad A_{01w-2w}^D = \frac{b_1 a_2 + c_1 b_2}{a_1 a_2 - c_1 c_2},$$

$$(2.28) \quad A_{02w-1w}^D = \frac{a_1 b_2 + c_2 b_1}{a_1 a_2 - c_1 c_2},$$

gdzie

$$(2.29) \quad a_1 = \bar{I}_{01w-2w}^D, \quad c_1 = I_{02w-1w}^{(D)(r)el} d\Sigma_{1w}, \\ b_1 = A_0^{(i)} \bar{I}_{0-2w}^{(i)} + d\Sigma_{1w} (I_{0-1w}^{(s)(r)el} - I_{0-2w}^{(i)(el)}) A_0^{(i)},$$

a_2, b_2, c_2 zaś otrzymujemy przez formalną zamianę wskaźników $1 \rightleftharpoons 2$.

Fakt, że układ równań ciągłości (2.12) daje się ściśle analitycznie rozwiązać, wiąże się z tym, że w naszym zagadnieniu odpada cała geometria związana ze skończonymi rozmiarami ciał. W przypadku ciał o rozmiarach skończonych w strumieniu (2.15) w pierwszej całce nie można wynieść stałej $A_{0\beta w - \alpha w}^D$ przed znak całki (stała ta zależy od punktu na powierzchni ciała, a różnym kierunkom $\mathbf{c}^{\alpha\beta}$ odpowiadałyby różne punkty) i w ten sposób układ równań ciągłości (2.12) stanowi układ dwu skomplikowanych równań całkowych w 4 zmiennych (punktowi na powierzchni jednego ciała odpowiadają dwie zmienne), który praktycznie można próbować rozwiązać jedynie w sposób przybliżony.

Zaniedbując w rozwiązaniach równań ciągłości (2.27) i (2.28) nieskończenie małe uzyskujemy:

$$(2.30) \quad A_{01w-2w}^D = \frac{\tilde{b}_1}{a_1}, \quad A_{02w-1w}^D = \frac{\tilde{b}_2}{a_2}, \quad \tilde{b}_1 = A_0^{(i)} \bar{I}_{0-2w}^{(i)}, \quad \tilde{b}_2 = A^{(i)} \bar{I}_{0-1w}^{(i)},$$

co odpowiada rozwiązaniom przy pominięciu drugiego elementu. Zaniedbując natomiast w rozwiązaniach nieskończenie małe drugiego rzędu dostajemy:

$$(2.31) \quad A_{01w-2w}^D = \frac{b_1 a_2 + c_1 \tilde{b}_2}{a_1 a_2}, \quad A_{02w-1w}^D = \frac{a_1 b_2 + c_2 \tilde{b}_1}{a_1 a_2}.$$

Jest oczywiste, że dla uchwycenia oddziaływania nieskończenie małych elementów musimy w rozwiązaniach równań ciągłości zachować co najmniej wyrazy proporcjonalne do $d\Sigma$, gdyż one, między innymi, są odpowiedzialne za to oddziaływanie. Przyjęcie w całkach oddziaływania (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) rozwiązań niezaburzonych (2.30) prowadziłoby do błędnego wyniku, gdyż nie uzyskalibyśmy wszystkich przyczynków do oddziaływania interakcyjnego proporcjonalnych do $d\Sigma$, na ten fakt zwrócimy jeszcze uwagę przy obliczaniu całek oddziaływania.

3. Specyfikacja całek oddziaływania. Całki oddziaływania wyrażamy najpierw w układach lokalnych $x^{(l)}, y^{(l)}, z^{(l)}$, oś $z^{(l)}$ takiego układu jest skierowana wzdłuż normalnej do elementu, oś $x^{(l)}$ leży w płaszczyźnie $(z^{(l)}, z)$, a następnie transformujemy do układu globalnego x, y, z według macierzy transformacyjnej a_{kl} :

$$(3.1) \quad a_{kl} = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_{nV} \cos \varphi_{nV}, & \sin \varphi_{nV}, & \sin \vartheta_{nV} \cos \varphi_{nV} \\ -\cos \vartheta_{nV} \sin \varphi_{nV}, & -\cos \varphi_{nV}, & \sin \vartheta_{nV} \sin \varphi_{nV} \\ \sin \vartheta_{nV}, & 0, & \cos \vartheta_{nV} \end{pmatrix},$$

gdzie $\vartheta_{n\alpha V}$, $\varphi_{n\alpha V}$ są kątami azymutalnym i biegunowym normalnej $\mathbf{n}_{\alpha V}$ (wewnętrznej lub zewnętrznej elementu 1 lub 2) w układzie absolutnym x, y, z . Całki typu \mathbf{F}_{10w} , \mathbf{F}_{10z} określone wewnątrz i zewnątrz, dla elementu 1 i 2, możemy przedstawić w postaci jednej całki:

$$(3.2) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0V}^{(i)} = -m \int_{\Omega_{1/2}^{(i)}} \mathbf{c}_{0\alpha} (\mathbf{c}_{0\alpha} \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} d\Sigma_{\alpha}, \quad V \equiv wVz.$$

Podstawiając (3.3) $f_{0-\alpha V}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}[\mathbf{c}_{0\alpha} + \mathbf{q}]^2\}$ i uwzględniając fakt, że w współrzędnych prostokątnych wyrażenie podcałkowe daje się rozdzielić, znajdujemy w układzie lokalnym:

$$(3.4) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0V}^{(i)'} = mA_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}q^2\} d\Sigma_{\alpha} \mathbf{I}_{\alpha 0V}^{(i)'}.$$

$$(3.5) \quad I_{\alpha 0V k}^{(i)'} = I_{\alpha 0V k}^{(i)}(1) I_{\alpha 0V k}^{(i)}(2) I_{\alpha 0V k}^{(i)}(3), \quad k = 1, 2, 3 \equiv (x, y, z),$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} I_{\alpha 0V k}^{(i)}(1) &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_{0\alpha x})^{\delta 1k} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha x}^2 + 2c_{0\alpha x} q'_{\alpha V x}]\} dc_{0\alpha x}, \\ I_{\alpha 0V k}^{(i)}(2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_{0\alpha y})^{\delta 2k} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha y}^2 + 2c_{0\alpha y} q'_{\alpha V y}]\} dc_{0\alpha y}, \\ I_{\alpha 0V k}^{(i)}(3) &= -\int_0^{-\infty} (c_{0\alpha z})^{(1+\delta 3k)} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha z}^2 + 2c_{0\alpha z} q'_{\alpha V z}]\} dc_{0\alpha z}, \end{aligned}$$

δ Kroneckera.

Zamiast całek $\mathbf{F}_{10w}^{(r)}$, $\mathbf{F}_{10z}^{(r)}$ rozważamy całkę ogólniejszą

$$(3.7) \quad \mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)} = -m \int_{\Omega_{1/2}^{(r)}} \mathbf{c}_{\alpha\alpha V} (\mathbf{c}_{\alpha\alpha V} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha V} d\Sigma_{\alpha V}.$$

Podstawiając

$$(3.8) \quad f_{0-\alpha V}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)S} + \varepsilon_{\alpha V} f_{0-\alpha V}^{(r)D},$$

gdzie

$$(3.9) \quad f_{0-\alpha V}^{(r)s} = f_{0-\alpha V}^{(i)} [c_{0-\alpha V}^{(i)}(c_{0-\alpha V}^{(r)})], \quad c_{0-\alpha V}^{(i)}(c_{0-\alpha V}^{(r)}) = c_{0-\alpha V}^{(r)} - 2(c_{0-\alpha V}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \mathbf{n}_{\alpha V},$$

$$(3.10) \quad f_{0-\alpha V}^{(r)D} = A_{0-\alpha V}^D \exp \{ -B_{\alpha V}^D [\alpha_{\alpha V} c_{0-\alpha V}^{(r)} - \beta_{\alpha V} (c^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \mathbf{n}_{\alpha V} - \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*]^2 \},$$

znajdujemy

$$(3.11) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0 V}^{(r)} = -m(1 - \varepsilon_{\alpha V}) d\Sigma_{\alpha V} A_0^{(i)} \exp \{ -B_0^{(i)} q^2 \} [I_{\alpha 0 V}^{(i)} - 2\mathbf{n}_{\alpha V} I_{\alpha 0 V}^{(i)}] + \\ - m\varepsilon_{\alpha V} d\Sigma_{\alpha V} A_{0-\alpha V}^D \exp \{ -B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2} \} I_{0-\alpha V}^{(r)D},$$

$$(3.12) \quad I_{0-\alpha V k}^{(r)D} = I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(1) I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(2) I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(3),$$

$$I_{0-\alpha(V)k}^{(r)D}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^{(r)})^{\delta 1k} \exp \{ -B_{\alpha V}^D [\alpha_{\alpha V}^2 c_x^{(r)2} - 2\alpha_{\alpha V} c_x^{(r)} q_{0-\alpha V}^*] \} dc_x^{(r)},$$

$$(3.13) \quad I_{0-\alpha(V)k}^{(r)D}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^{(r)})^{\delta 2k} \exp \{ -B_{\alpha V}^D [\alpha_{\alpha V}^2 c_y^{(r)2} - 2c_y^{(r)} \alpha_{\alpha V} q_{0-\alpha V}^*] \} dc_y^{(r)},$$

$$I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(3) = \int_0^{\infty} (c_z^{(r)})^{1+\delta 3k} \exp \{ -B_{\alpha V}^D \{ (\alpha_{\alpha V}^2 + \beta_{\alpha V}^2 - 2\alpha_{\alpha V} \beta_{\alpha V}) c_z^{(r)2} \} \} \times \\ \times \exp \{ -2B_{\alpha V}^D c_z^{(r)} [-\alpha_{\alpha V} q_{0-\alpha V}^* + \beta_{\alpha V} (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*)] \} dc_z^{(r)}.$$

W całce $F_{\alpha i n \beta}$ występuje tylko całkowanie po przestrzeni modułu prędkości; zachodzi więc konieczność obliczenia elementów kątów bryłowych $d\Omega \mathbf{c}_{\beta\beta}$, $d\Omega \mathbf{c}_{0\beta\beta}$. Jeśli przez $d\mathbf{v}$ oznaczyć wersor w kierunku od elementu 1 do 2, to wektory prędkości $\mathbf{c}_{\beta\beta}$ (skierowany do elementu β do α) i $\mathbf{c}_{0\beta\beta}$ (skierowany również do elementu β do α) można przedstawić w postaci:

$$(3.14) \quad \mathbf{c}_{\beta\beta} = c_{\beta\beta} \mathbf{d}_V (-1)^{1+\beta}, \quad \mathbf{c}_{0\beta\beta} \equiv \mathbf{c}_{\beta\beta}.$$

Na podstawie tych związków mamy

$$(3.15) \quad d\Omega \mathbf{c}_{\beta\beta} \equiv d\Omega \mathbf{c}_{0\beta\beta} = (-1)^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Podstawiając

$$(3.16) \quad f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D},$$

gdzie

$$(3.17) \quad f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp \{ -B_{\beta w}^D [\alpha_{\beta w} c_{\beta\beta} - \beta_{\beta w} (c_{\beta\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{n}_{\beta w} - \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*]^2 \},$$

znajdujemy:

$$(3.18) \quad \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} = -m d\Sigma_{\beta w} (-1)_{ii}^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{d}_V \times [(1 - \varepsilon_{\beta w}) I_{\alpha i n \beta}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} - I_{\alpha i n \beta}^{(i)}],$$

$$(3.19) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp \{ -B_0^{(i)} q^2 \} \int_0^\infty c_{0\beta}^4 \exp \{ -B_0^{(i)} [c_{0\beta}^2 + 2c_{0\beta} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q})] \} dc_{0\beta},$$

$$(3.20) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} = A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp \{ -B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2} \} \int_0^\infty c_{\beta\beta}^4 \exp \{ -B_{\beta w}^D (c_{\beta\beta}^2 \gamma + 2\delta c_{\beta\beta}) \} dc_{\beta\beta},$$

$$\gamma = \alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w}) (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2,$$

$$\delta = (-1)^{1+\beta} \beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) (\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*),$$

$$(3.21) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)s} = \int_0^\infty c_{\beta\beta}^4 f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} dc_{\beta\beta}.$$

W funkcji rozkładu $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ kierunek $c_{\beta\beta}$ od elementu β do elementu α musi mieć odpowiednik w prędkości cząstki padającej $\mathbf{c}_{0-\beta w}^{(i)}$ z otoczenia na element β_w ($\mathbf{c}_{0-\beta w}^{(i)}$ nie może pochodzić z elementu α , bo element jest nieskończenie mały). Mamy zatem

$$(3.22) \quad \begin{aligned} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} &= f_{0-\beta w}^{(i)}[\mathbf{c}_{0-\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)})] = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}[\mathbf{c}_{0\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)}) + \mathbf{q}]^2\}, \\ \mathbf{c}_{0\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)}) &= \mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)} - 2(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta w})\mathbf{n}_{\beta w}. \end{aligned}$$

Korzystając z relacji (3.14), otrzymujemy $I_{\alpha i n \beta}^{(r)s}$ w postaci jawnej

$$(3.23) \quad \begin{aligned} I_{\alpha i n \beta}^{(r)s} &= A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} \int_0^\infty c_{\beta\beta}^4 \exp\{-B_0^{(i)}\{c_{\beta\beta}^2 + 2(-1)^{1+\beta} c_{\beta\beta} [(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - \\ &\quad - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})]\} dc_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Określenie $F_{\alpha i n 0}$

Podstawiamy

$$(3.24) \quad \begin{aligned} f_{0-\alpha w}^{(r)} &= (1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0-\alpha w}^{(r)D}, \\ f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} &= (1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}. \end{aligned}$$

Pamiętając, że

$$(3.25) \quad f_{0-\alpha w}^{(r)s} = f_{0-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)})), \quad \mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}) = \mathbf{c}^{(r)} - 2(\mathbf{c}^{(r)} \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w},$$

dostajemy

$$(3.26) \quad -m \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})f_{0-\alpha w}^{(r)s} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} = -F_{0-\alpha w}^{(i)} d\Sigma_{\alpha w}^{-1} - 2m \mathbf{n}_{\alpha w} I_{0-\alpha w}^{(i)s} A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\},$$

gdzie

$$(3.27) \quad I_{0-\alpha w}^{(i)s} = \int_{\Omega_{1/2}^c} (\mathbf{c}_{0-\alpha w}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w})^2 \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0-\alpha w}^2 + 2\mathbf{c}_{0\alpha w} \cdot \mathbf{q}]\} dc_{0\alpha-wx} dc_{0-\alpha wy} dc_{0-\alpha wz}.$$

Podobnie funkcja rozkładu molekuł odbitych $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s}$ związana jest z funkcją rozkładu molekuł padających $f_{0\beta w-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}))$. Możemy napisać

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} &= \\ &= \int_{\Omega_{1/2}^c} [\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)} - 2(\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w}]f_{0\beta w-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)})(-\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})d^3 \mathbf{c}_{0\alpha w-\beta w}. \end{aligned}$$

Całkowanie po półprzestrzeni prędkości $\Omega_{1/2}^c$ prowadzimy w ten sposób, że obszar całkowania $\Omega_{1/2}^c$ rozbijamy na dwa: jeden ($\Omega_{1/2}^c - \Omega_{\Sigma\beta w}^c$), w którym na element αW przychodzą tylko cząsteczki z otoczenia o funkcji rozkładu $f_{0-\alpha w}^{(i)}$, drugi $\Omega_{\Sigma\beta w}^c$, w którym na element αw przychodzą cząsteczki z elementu β o funkcji rozkładu $f_{\beta w-\alpha w}^{(i)}$. Zgodnie z tym mamy

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} &= \int_{\Omega_{1/2}^c - \Omega_{\Sigma\beta w}^c} [\mathbf{c}_{0\alpha}^{(i)} - 2(\mathbf{c}_{0\alpha}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w}]f_{0-\alpha w}^{(i)}(-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} + \\ &\quad + \int_{\Omega_{\Sigma\beta w}^c} [\mathbf{c}_{\beta w}^{(i)} - 2(\mathbf{c}_{\beta w\alpha}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w}](-\mathbf{c}_{\beta w\alpha}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w})f_{\beta w-\alpha w}^{(i)}d^3 \mathbf{c}_{\beta\alpha}^{(i)}, \\ \Omega_{\Sigma\beta w}^c &\equiv \Omega^c \times d\Omega_{\Sigma\beta w}. \end{aligned}$$

Funkcja rozkładu cząstek padających $f_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}$ ($\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}$) równoważna jest funkcji rozkładu molekuł odbitych od elementu β_w , a przychodzących z otoczenia i z elementu α_w , mianowicie

$$(3.30) \quad f_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}) = f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}).$$

Dla funkcji tej mamy

$$(3.31) \quad f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}) = (1 - \varepsilon_{\beta_w})f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)S}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}) + \varepsilon_{\beta_w}f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)D}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}).$$

W odbiciu zwierciadlanym, prędkości «odbitej» $\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}$ odpowiada wektor prędkości cząsteczki padającej $\mathbf{c}_{0-\beta_w}^{(i)}$ ($\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}$) pochodzącej z otoczenia według relacji:

$$(3.32) \quad \mathbf{c}_{0-\beta_w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}) = \mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} - 2(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})\mathbf{n}_{\beta_w}.$$

Funkcja rozkładu $f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)S}$ molekuł odbitych zwierciadlanie jest więc następująca:

$$(3.33) \quad f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)S} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}[\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} - 2(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})\mathbf{n}_{\beta_w} + \mathbf{q}]^2\}.$$

Dalej mamy

$$(3.34) \quad f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)D} = A_{0\alpha_w-\beta_w}^D \exp\{-B_{\beta_w}^D[\alpha_{\beta_w}\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} - \beta_{\beta_w}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})\mathbf{n}_{\beta_w} + \mathbf{q}_{0\alpha_w-\beta_w}^*]^2\}.$$

Uwzględniając jeszcze, że

$$(3.35) \quad \mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} = \mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)} = (-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}^i \mathbf{d}_V,$$

$$d\Omega_{\Sigma\beta_w} \equiv d\Omega_{\Sigma\beta_w}^{(i)} = (-1)^{1+\beta} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})}{d^2} d\Sigma_{\beta_w},$$

oraz, podstawiając znalezione wielkości do (3.29), znajdujemy

$$(3.36) \quad \int_{\Omega_{1/2}^F} \mathbf{c}_{\alpha_w}(\mathbf{c}_{\alpha_w} \cdot \mathbf{n}_{\alpha_w})f_{0\beta_w-\alpha_w}^{(r)S} d^3\mathbf{c}_{\alpha_w} = \mathbf{F}_{0-\alpha_w}^{(i)}(md\Sigma_{\alpha_w}) + 2\mathbf{n}_{\alpha_w}A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)}q^2)I_{0-\alpha_w}^{(i)S} +$$

$$- (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha_w})[\mathbf{d}_V - 2\mathbf{n}_{\alpha_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha_w})](-1)^{1+\beta} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})}{d^2} d\Sigma_{\beta_w} \times$$

$$\times \{A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)}q^2)I_{0-\alpha_w}^{(i)F} - (1 - \varepsilon_{\beta_w})A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)}q^2)I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)S} +$$

$$- \varepsilon_{\beta_w}A_{0\alpha_w-\beta_w}^D \exp(-B_{\beta_w}^D q_{0\alpha_w-\beta_w}^{*2})I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)D}\},$$

gdzie

$$(3.37) \quad I_{0-\alpha_w}^{(i)F} = \int_0^\infty c_{\beta_w-\alpha_w}^4 \exp\langle -B_0^{(i)}[c_{\beta_w-\alpha_w}^2 + 2(-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q})] \rangle dc_{\beta_w-\alpha_w},$$

$$(3.38) \quad I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)S} = \int_0^\infty c_{\beta_w-\alpha_w}^4 \exp\langle -B_0^{(i)}\{c_{\beta_w-\alpha_w}^2 + 2(-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}[(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})(\mathbf{n}_{\beta_w} \cdot \mathbf{q})]\} \rangle dc_{\beta_w-\alpha_w},$$

$$(3.39) \quad I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)D} = \int_0^\infty c_{\beta_w-\alpha_w}^4 \exp\langle -B_{\beta_w}^D\{[\alpha_{\beta_w}^2 + \beta_{\beta_w}^2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})^2 - 2\alpha_{\beta_w}\beta_{\beta_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})^2]\} c_{\beta_w-\alpha_w}^2 \rangle \times$$

$$\times \exp\langle -2B_{\beta_w}^D(-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}[-\alpha_{\beta_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0-\beta_w}^*) + \beta_{\beta_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})(\mathbf{n}_{\beta_w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha_w-\beta_w}^*)] \rangle dc_{\beta_w-\alpha_w}.$$

Pierwsze dwa wyrazy (3.36) i pierwszy wyraz w nawiasie klamrowym odpowiadają strumieniowi cząstek odbitych zwierciadlanie od powierzchni α_w w obszarze bryłowym $(\Omega_{1/2} - \Omega_{\Sigma\beta_w})$, dwa pozostałe wyrazy w nawiasie klamrowym odpowiadają strumieniowi cząstek odbitych zwierciadlanie od powierzchni α_w w obszarze bryłowym $\Omega_{\Sigma\beta_w}$. Warto

zwrócić uwagę na fakt, że dwa pierwsze wyrazy (przed nawiasem klamrowym) są identyczne z wyrazami w całce (3.26), co nie powinno być zaskoczeniem, gdyż reprezentują strumień odbity od powierzchni α_w pod nieobecność drugiego elementu β . Pozostałe całki w wyrażeniu na $\mathbf{F}_{\alpha in 0}$ znajdujemy bez trudu. Mamy

$$(3.40) \quad \int_{\Omega_{\alpha 1}^D} \mathbf{c}_{\alpha z} (\mathbf{c}_{\alpha z} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0-\alpha w}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}_{\alpha z} = A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D},$$

$$(3.41) \quad \int_{\Omega_{\beta 2}^D} \mathbf{c}_{\alpha z} (\mathbf{c}_{\alpha z} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}_{\alpha z} = A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D},$$

gdzie wektor $\mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}$ jest wektorem, który występował już przy obliczaniu $\mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)}$, natomiast wektor $\mathbf{I}_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}$ daje się utworzyć z wektora $\mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}$ przez zamianę $\mathbf{q}_{0-\alpha w}^*$ na $\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*$. W ten sposób otrzymujemy

$$(3.42) \quad \mathbf{F}_{\alpha in 0} = -m \{ -(1 - \varepsilon_{\alpha w})(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})[\mathbf{d}_V - 2\mathbf{n}_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})] \times \\ \times (-1)^{1+\beta} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2} d\Sigma_{\beta w} [A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(i)F} - (1 - \varepsilon_{\beta w}) A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0\alpha w-\beta w}^{(s)F} + \\ - \varepsilon_{\beta w} A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp(-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2}) \mathbf{I}_{0\alpha w-\beta w}^{(D)F}] + \\ + \varepsilon_{\alpha w} A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(D)} (\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) - \varepsilon_{\alpha w} A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D} \}.$$

Ostateczne wyrażenie na siłę, działającą na którykolwiek element układu dwu dowolnie zorientowanych nieskończenie małych elementów, poruszających się w ośrodku swobodno-molekularnym ze stałą dowolnie zorientowaną prędkością \mathbf{q} , uzyskane przy założeniu zmodyfikowanego modelu odbicia Maxwella z anizotropową częścią dyfuzyjną, jest następujące:

$$(3.43) \quad \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha 0} + \mathbf{F}_{\alpha in \beta},$$

$$(3.44) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0} = \mathbf{F}_{0\alpha}^{(i)} + \mathbf{F}_{0\alpha}^{(r)} = \mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(i)} + \mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(r)} + \mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(r)},$$

$$(3.45) \quad \mathbf{F}_{\alpha in} = \mathbf{F}_{\alpha in 0} + \mathbf{F}_{\alpha in \beta}^{(i)},$$

$$(3.46) \quad \mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(i)} = m A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(i)} d\Sigma_{\alpha},$$

$$(3.47) \quad \mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)} = -m(1 - \varepsilon_{\alpha V}) d\Sigma_{\alpha V} A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) [\mathbf{I}_{\alpha 0 V}^{(i)} - 2\mathbf{n}_{\alpha V} \mathbf{I}_{\alpha 0 V z}^{(i)}] + \\ - m \varepsilon_{\alpha V} d\Sigma_{\alpha V} A_{0-\alpha V}^D \exp(-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(r)D},$$

$$(3.48) \quad \mathbf{F}_{\alpha in \beta}^{(i)} = -m d\Sigma_{\beta w} (-1) \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{d}_V \times \\ [(1 - \varepsilon_{\beta w}) \mathbf{I}_{\alpha in \beta}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} \mathbf{I}_{\alpha in \beta}^{(r)D} - \mathbf{I}_{\alpha in \beta}^{(i)}],$$

$$(3.49) \quad \mathbf{F}_{\alpha in 0} = -m \left\{ -(1 - \varepsilon_{\alpha w}) \left\{ (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})[\mathbf{d}_V - 2\mathbf{n}_{\alpha V}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})] (-1)^{1+\beta} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2} d\Sigma_{\beta w} \times \right. \right. \\ \times [A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(i)F} - (1 - \varepsilon_{\beta w}) A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0\beta w}^{(s)F} - \\ - \varepsilon_{\beta w} A_{0-\beta w}^D \exp(-B_{\beta w}^D q_{0-\beta w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\beta w}^{(D)F}] \left. \right\} + \varepsilon_{\alpha w} A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(D)} (\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) + \\ \left. - \varepsilon_{\alpha w} A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D} \right\} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Wielkości wektorowe $\mathbf{I}_{0\alpha V}^{(i)}$ i $\mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(r)(D)}$ możemy uzyskać z wyspecyfikowanych uprzednio w układzie lokalnym wielkości wektorowych $\mathbf{I}_{0\alpha V}^{(i)}$ i $\mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(r)(D)}$, przez transformację z układu lokalnego do globalnego według reguły transformacji tensorów:

$$(3.50) \quad I_{0\alpha V m}^{(i)} = a_{mn} I_{0\alpha V n}^{(i)'},$$

gdzie a_{mn} jest macierzą transformacyjną przejścia

$$(3.51) \quad a_{mn} = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta_{nV} \cos\varphi_{nV}, & \sin\varphi_{nV}, & \sin\vartheta_{nV} \cos\varphi_{nV} \\ -\cos\vartheta_{nV} \sin\varphi_{nV}, & -\cos\varphi_{nV}, & \sin\vartheta_{nV} \sin\varphi_{nV} \\ \sin\vartheta_{nV}, & 0, & \cos\vartheta_{nV} \end{pmatrix},$$

zaś φ_{nV} , ϑ_{nV} oznaczają kąty biegunowy i azymutalny normalnej \mathbf{n}_V , reprezentującej układ lokalny (oś $z^{(i)}$ układu lokalnego skierowana równoległe do \mathbf{n}_V) w układzie globalnym.

4. Obliczenie całek oddziaływania pędowego. Dla pełnego rozwiązania zagadnienia musimy jeszcze obliczyć całki, które występują w stałych $A_{0-\alpha V}^D$ i $A_{0-\beta w}^D$, uzyskanych z rozwiązania równań ciągłości, oraz całki oddziaływania, występujące w wyrażeniach $\mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(i)}$, $\mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)}$, $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}$ i $\mathbf{F}_{\alpha in0}$. Stała $A_{0-\alpha V}^D$ określona jest przez całki $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$ (1), $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$ (2), $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$ (3), $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ (1), $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ (2), $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ (3).

Wyrażają się one następująco:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} n = 1, 2 \quad I_{0-\alpha V}^{(i)(N)'}(n) &= \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp(q_n'^2 B_0^{(i)}), \\ n = 3 \quad I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}(3) &= \\ &= \frac{1}{2B_0^{(i)}} + \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp[B_0^{(i)}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})^2] \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\}, \end{aligned}$$

gdzie Φ — całka prawdopodobieństwa oraz

$$(4.2) \quad \begin{aligned} n = 1, 2 \quad I_{0-\alpha V}^{D(N)'}(n) &= \frac{1}{\alpha_{\alpha V}} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D}} \exp(q_{0-\alpha V n}^{D*2} B_{\alpha V}^D), \\ n = 3 \quad I_{0-\alpha V}^{D(N)'}(3) &= \frac{1}{2B_{\alpha V}^D(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*)}{\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2}} \times \\ &\times \exp(B_{\alpha V}^D(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*)^2) \times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{B_{\alpha V}^D} \frac{(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})}{|\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}|} (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wielkości $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$, $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ są skalarami i dlatego w układach lokalnym i globalnym wyrażają się tak samo. W oparciu o (4.1), (4.2) uzyskujemy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{I}_{0-\alpha V}^{(i)(N)} &= \frac{\pi}{2B_0^{(i)2}} \exp[B_0^{(i)}(q^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})^2)] + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \left(\frac{\pi}{B_0^{(i)}} \right)^{2/3} \exp(B_0^{(i)} q^2) \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\}, \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \bar{I}_{0-\alpha V}^{D(N)} &= \frac{\pi}{2B_{\alpha V}^{D2}(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2 \alpha_{\alpha V}^2} \exp[B_0^{(i)}(q_{0-\alpha V}^{*2} - (\mathbf{q}_{0-\alpha V}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}))] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*)}{\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2}} \times \frac{\pi}{\alpha_{\alpha V}^2 B_{\alpha V}^D} \exp[B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}] \times \\ &\times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{B_{\alpha V}^D} \frac{(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})}{|\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}|} (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Z kolei stała A_0^D w-βw jest określona przez całki I_0^D w-βw(1),

$$I_{0\alpha w-\beta w}^D(2), \quad I_{0\alpha w-\beta w}^D(3), \quad I_{0-\beta w}^{(i)}(1), \quad I_{0-\beta w}^{(i)}(2), \quad I_{0-\beta w}^{(i)}(3)$$

oraz

$$I_{0-\alpha w}^{(r)s} \text{ i } I_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}.$$

Całki typu $I_{0\alpha w-\beta w}^{(D)}$ (n), n = 1, 2, 3, można uzyskać z całek typu $I_{0-\beta w}^{(D)(N)}(n)$ przez formalną zamianę symboli 0-α(V) na 0αW-βW; podobnie całki $I_{0-\beta w}^{(i)(N)}(n)$ z całek $I_{0-\alpha(V)}^{(i)}$ przez zamianę 0-α(V) na 0-β(V). Dla całek $I_{0-\alpha w}^{(r)s}$ i $I_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}$ dostajemy:

$$(4.5) \quad I_{0-\alpha w}^{(r)s} = (2B_N^{(s)})^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{1}{8} \frac{\gamma_N^{(s)2}}{\beta_N^{(s)}}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma_N^{(s)}}{\sqrt{2\beta_N^{(s)}}}\right),$$

$$\beta_N^{(s)} = \beta_0^{(i)}, \quad \gamma_N^{(s)} = 2B_0^{(i)}[(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{n}_{\alpha w} \cdot \mathbf{q})],$$

$$(4.6) \quad I_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} = (2\beta_N^{(D)})^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{\gamma_N^{(D)2}}{8\beta_N^{(D)}}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma_N^{(D)}}{\sqrt{2\beta_N^{(D)}}}\right),$$

$$\beta_N^{(D)} = B_{\alpha w}^D[\alpha_{\alpha w}^2 + (-2\alpha_{\alpha w}\beta_{\alpha w} + \beta_{\alpha w}^2)(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2],$$

$$\gamma_N^{(D)} = -2B_{\alpha V}^D[\alpha_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{\beta w-\alpha w}^*) - \beta_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{q}_{\beta w-\alpha w}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})],$$

gdzie D_{-n} jest funkcją walca parabolicznego.

Całki występujące w wyrażeniu $F_{\alpha 0V}^{(i)}$ można przedstawić następująco:

$$(4.7) \quad \begin{cases} n = 1, 2 & \left\{ \begin{array}{l} n \neq k \quad I_{\alpha 0V_k}^{(i)'}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp(q_{\alpha V_n}^{\prime 2} B_0^{(i)}), \\ n = k \quad I_{\alpha 0V_k}^{(i)'}(n) = -q_{\alpha V_n}' \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp(q_{\alpha V_n}^{\prime 2} B_0^{(i)}), \end{array} \right. \\ k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \begin{cases} n \neq k \quad I_{\alpha 0V_k}^{(i)'}(3) = \frac{1}{2B_0^{(i)}} + \frac{1}{2} q_{\alpha V_z}' \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} [1 - \Phi(-\sqrt{B_0^{(i)}} q_{\alpha V_z}')] \times \\ \times \exp(B_0^{(i)} q_{\alpha V_z}^{\prime 2}), \\ n = 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$n = k \quad I_{\alpha 0V_k}^{(i)'}(3) = -\frac{q_{\alpha V_z}'}{2B_0^{(i)}} - \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)5}}} \frac{1}{4} (2B_0^{(i)2} q_{\alpha V_z}^{\prime 2} + B_0^{(i)2}) \times \\ \times \exp(B_0^{(i)} q_{\alpha V_z}^{\prime 2}) [1 - \Phi(-\sqrt{B_0^{(i)}} q_{\alpha V_z}')] .$$

Po prostych przekształceniach, wektor $I_{\alpha 0V}^{(i)'}$ można zapisać w postaci:

$$(4.9) \quad I_{\alpha 0V_x}^{(i)'} \equiv q_{\alpha V_x}' I_{xy}^{(i)}, \quad I_{\alpha 0V_y}^{(i)'} = q_{\alpha V_y}' I_{xy}^{(i)}, \quad I_{\alpha 0z}^{(i)'} = q_{\alpha V_z}' I_{xy}^{(i)} + I_z^{(i)},$$

gdzie $I_{xy}^{(i)}$, $I_z^{(i)}$ są skalarami, zaś

$$(4.10) \quad I_{xy}^{(i)} = -\frac{\pi}{2B_0^{(i)2}} \exp\{B_0^{(i)}[q^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})^2]\} - \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \left(\frac{\pi}{B_0^{(i)}}\right)^{3/2} \exp(B_0^{(i)} q^2) \times \\ \times \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\},$$

$$(4.11) \quad I_z^{(i)} = -\frac{1}{4} \frac{\pi^{3/2}}{B_0^{(i)5/2}} \exp(B_0^{(i)} q^2) \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\}.$$

Korzystając z reguły transformacyjnej dla tensorów mamy

$$(4.12) \quad I_{\alpha 0V_x}^{(i)} = a_{xn} I_{\alpha V_n}^{(i)'} \equiv a_{xn} q_{\alpha V_n}' I_{xy}^{(i)} + a_{x3} I_z^{(i)}.$$

Zauważając, że

$$(4.13) \quad a_{xn} q'_{avn} = q_x,$$

dostajemy

$$(4.14) \quad I_{a_0 v x}^{(i)} = q_x I_{xy}^{(i)} + n_{avx} I_z^{(i)},$$

bez dodatkowej konieczności transformowania q'_{avn} do układu globalnego.

Okazuje się, że analogicznie

$$(4.15) \quad I_{a_0 v y}^{(i)} = q_y I_{xy}^{(i)} + n_{avy} I_z^{(i)},$$

$$(4.16) \quad I_{a_0 v z}^{(i)} = q_z I_{xy}^{(i)} + n_{avz} I_z^{(i)}.$$

Ogólnie zatem

$$(4.17) \quad \mathbf{I}_{a_0 v}^{(i)} = \mathbf{q} I_{xy}^{(i)} + \mathbf{n}_{av} I_z^{(i)}.$$

Całki określające $\mathbf{F}_{a_0 v}^{(r)}$ są typu podobnego do występujących w wyrażeniu $\mathbf{F}_{a_0 v}^{(i)}$. Znajdujemy:

$$(4.18) \quad \left. \begin{array}{l} n = 1, 2 \\ k = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \begin{cases} n \neq k & I_{0_{-av}^{(r)D}k}(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha_{av}^2 B_{av}^D}} \exp(B_{av}^D q_{0_{-av}^{*2}} n), \\ n = k & I_{0_{-av}^{(r)D}k}(n) = \frac{q_{0_{-av}^{*2}}}{\alpha_{av}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{av}^2 B_{av}^D}} \exp(B_{av}^D q_{0_{-av}^{*2}} n), \end{cases}$$

$$(4.19) \quad \left. \begin{array}{l} n = 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \begin{cases} n \neq k & I_{0_{-av}^{(r)D}k}(3) = \frac{1}{2B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2} + \frac{\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av}}{2(\beta_{av} - \alpha_{av})} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2}} \exp\{B_{av}^D(\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av})^2\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D}} \frac{\beta_{av} - \alpha_{av}}{|\beta_{av} - \alpha_{av}|} (\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av}) \right] \right\}, \\ n = k & I_{0_{-av}^{(r)D}k}(3) = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av}}{B_{av}^D(\beta_{av} - \alpha_{av})^2} + \frac{1}{4B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2}} [2B_{av}^D q_{0_{-av}^{*2}} + 1] \exp\{B_{av}^D q_{0_{-av}^{*2}}\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D}} q_{0_{-av}^{*2}} \frac{\beta_{av} - \alpha_{av}}{|\beta_{av} - \alpha_{av}|} \right] \right\}. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, po dokonaniu transformacji wielkości »primowanych«, wektor $I_{0_{-av}^{(r)D}}$ można sprowadzić do postaci:

$$(4.20) \quad \mathbf{I}_{0_{-av}^{(r)D}} = \mathbf{q}_{0_{-av}^*} I_{xy}^{(r)D} + \mathbf{n}_{av} I_z^{(r)D},$$

gdzie

$$(4.21) \quad I_{xy}^{(r)D} = \frac{\pi}{2\alpha_{av}^3(\alpha_{av} - \beta_{av})^2 B_{av}^{D2}} \exp\{B_{av}^D [q_{0_{-av}^{*2}} - (\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av})^2]\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \frac{\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av}}{\alpha_{av}^3(\beta_{av} - \alpha_{av}) B_{av}^D} \sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D}} (\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av}) \frac{\beta_{av} - \alpha_{av}}{|\alpha_{av} - \beta_{av}|} \right] \right\} \exp(B_{av}^D q_{0_{-av}^{*2}}),$$

$$I_z^{(r)D} = I_{0_{-av}^{(r)D}z} - I_{xy}^{(r)D} (\mathbf{q}_{0_{-av}^*} \cdot \mathbf{n}_{av}),$$

$$I_{0_{-av}^{(r)D}z} = I_{0_{-av}^{(r)D}z}(1) I_{0_{-av}^{(r)D}z}(2) I_{0_{-av}^{(r)D}z}(3).$$

Pozostałe całki, występujące w składowych $F_{\alpha i n \beta}$ i $F_{i n 0}$ i wyrażają się następująco:

$$(4.22) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)S} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) (2\beta^{(s)})^{-5/2} \Gamma(5) \exp\left(\frac{\gamma^{(s)2}}{8\beta^{(s)}}\right) D_{-5} \left(\frac{\gamma^{(s)}}{\sqrt{2\beta^{(s)}}}\right),$$

$$\gamma^{(s)} = 2B_0^{(i)}(-1)^{1+\beta}[(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})], \quad \beta^{(s)} = B_0^{(i)},$$

$$(4.23) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} = A_{0\alpha w - \beta w}^D \exp\{-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w - \beta w}^{*2}\} (2\beta^{(D)})^{-5/2} \Gamma(5) \exp\left(\frac{\gamma^{(D)2}}{8\beta^{(D)}}\right) D_{-5} \left(\frac{\gamma^{(D)}}{\sqrt{2\beta^{(D)}}}\right),$$

$$\beta^{(D)} = B_{\beta w}^D [\alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w})(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2],$$

$$\gamma^{(D)} = 2B_{\beta w}^D (-1)^{1+\beta} [\beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*)],$$

$$(4.24) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) (2\beta^{(i)})^{-5/2} \Gamma(5) \exp\left(\frac{\gamma^{(i)2}}{8\beta^{(i)}}\right) D_{-5} \left(\frac{\gamma^{(i)}}{\sqrt{2\beta^{(i)}}}\right),$$

$$\beta^{(i)} = B_0^{(i)}, \quad \gamma^{(i)} = 2B_0^{(i)}(-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}),$$

$$(4.25) \quad I_{0-\alpha w}^{(i)F} \equiv I_{\alpha i n \beta}^{(i)} / (A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\}),$$

$$(4.26) \quad I_{0-\beta w}^{(r)(s)F} \equiv I_{\alpha i n \beta}^{(r)S} / (A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\}),$$

$$(4.27) \quad I_{0-\beta w}^{(r)(D)F} \equiv I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} / (A_{0\alpha w - \beta w}^D \exp\{-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w - \beta w}^{*2}\}),$$

$$(4.28) \quad \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) = \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^* I_{xy}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0-\alpha w}^* \rightarrow \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) + \mathbf{n}_{\alpha w} I_z^{(r)D}(\mathbf{q}_{0-\alpha w}^* \rightarrow \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*).$$

5. Dyskusja wyrażenia na siły. Siłę działającą na element „ α ” układu można przedstawić jeszcze w innej, dogodnej do interpretacji postaci:

$$(5.1) \quad \mathbf{F}_\alpha = (\mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}) + (\mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(i)} + \mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(r)}) + \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}.$$

Pierwsze dwa wyrazy przedstawiają składową siły, pochodzącą od cząstek padających na wewnętrzną powierzchnię elementu α z otoczenia i z elementu β , następne dwa wyrazy przedstawiają składową siły, pochodzącą od cząstek padających na zewnętrzną powierzchnię elementu α i od niej odbitych; ostatni wyraz jest składową pochodzącą od cząstek odbitych od wewnętrznej powierzchni elementu α .

Ostatnią składową $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ podobnie jak funkcję rozkładu molekuł odbitych można rozbić na składowe: «odbity» zwierciadlanie i «odbity» dyfuzyjnie, mianowicie

$$(5.2) \quad \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)} = -(1 - \varepsilon_{\alpha w}) \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(s)} - \varepsilon_{\alpha w} \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^D,$$

gdzie

$$(5.3) \quad \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(s)} = \mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - 2[(\mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}) \mathbf{n}_{\alpha w}] \mathbf{n}_{\alpha w},$$

$$(5.4) \quad \mathbf{F}_D = m A_{0\beta w - \alpha w}^D \exp\{-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w - \alpha w}^{*2}\} \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0-\alpha w}^* \rightarrow \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) d\Sigma_{\alpha w}.$$

Wektor składowej «odbitej» zwierciadlanie ma analogiczną postać do wektora prędkości «odbitej» zwierciadlanie. Pojawienie się znaków minus w wyrażeniu na $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ (w $f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ występują znaki +) związane jest z faktem, że impuls przekazywany ścianie przez cząstki odbite jest w odbiciu zwierciadlanym tak samo skierowany jak impuls pochodzący od cząstek padających na ściankę (podczas gdy wektor prędkości odbitej skierowany jest od ścianki).

Oddziaływanie iterakcyjne zawarte jest w wyrazach $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$ i $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ i scharakteryzowane jest jedynie wyrazem $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$, gdyż interakcja zawarta w $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ wyraża się również poprzez $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$. Wyraz $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$ jest proporcjonalny do elementarnego kąta bryłowego $d\Omega_\alpha$, pod jakim

widać element $d\Sigma_\beta$ z elementu α $\left(d\Omega_\alpha = d\Sigma_{\beta w} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2}\right)$. Interakcja znika, jeśli którykolwiek z elementów leży na linii łączącej elementy. Analiza ogólnego wyrażenia na siły jest bardzo uciążliwa. Dla uzyskania czytelnych wyników możemy przeprowadzić ją jednak w uproszczony sposób.

I tak zakładając najprostszy model «odbicia» gaz-powierzchnia (model dyfuzyjny) i najprostszą orientację elementów możemy zbadać wpływ prędkości na oddziaływanie; przyjmując najprostszy model «odbicia» i kładąc $q = 0$ możemy prześledzić wpływ orientacji elementów i wreszcie przyjmując najprostszą orientację elementów i biorąc $q = 0$ możemy przebadać zjawisko oddziaływania ze względu na model «odbicia», co zresztą było głównym celem pracy.

W charakterze przykładu rozważymy oddziaływanie elementów o różnych temperaturach spoczywających w ośrodku, równoległych do siebie i prostopadłych do łączącej ich osi. Równość $q = 0$ pociąga za sobą $q^* = 0$ [12]. Dla uproszczenia przyjmujemy jeszcze że strony wewnętrzne i zewnętrzne elementów są sobie równoważne pod względem własności fizycznych. Uwzględniając powyższe, znajdujemy z wzorów ogólnych następujące wyrażenie na siłę działającą na element α ($\alpha, \beta = 1 \vee 2, \alpha \neq \beta$) dla probabilistyczno-deterministycznego modelu odbicia:

$$(5.5) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - m \varepsilon_\alpha \frac{d\Sigma_{\alpha w} d\Sigma_{\beta w}}{d^2} \frac{1}{\alpha_\beta} \left[b_\beta^{(1)*} + \frac{b_\alpha^0}{\alpha_\alpha} c_\beta^* \right] \Gamma_{0-\alpha w}^{(r)D} + \\ - (1 - \varepsilon_\alpha) [\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - 2(\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w}) \mathbf{n}_{\alpha w}],$$

gdzie

$$(5.6) \quad \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} = -\frac{3}{8} m \sqrt{\pi} \frac{d\Sigma_\alpha d\Sigma_\beta \mathbf{d}_V}{d^2} [(2\beta_\beta^D)^{-5/2} A_{0-\beta}^D - (2B_0^{(i)})^{-5/2} A_0^{(i)}], \\ \alpha_\beta = \frac{\pi}{2(B_\alpha^D)^2 \alpha_\alpha^2 (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2}, \quad b_\beta^0 = \frac{\pi}{(2B_0^{(i)})^2} A_0^{(i)}, \\ b_\beta^{(1)*} = -2\varepsilon_\beta A_0^{(i)} (2B_0^{(i)})^{-2}, \quad c_\beta^* = 2\varepsilon_\beta (2\beta_{N\beta}^D)^{-2}, \\ \beta_{N\beta}^D = B_\beta^D [\alpha_\beta^2 + (-2\alpha_\beta \beta_\beta + \beta_\beta^2) (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2], \\ \Gamma_{0-\alpha w}^{(r)D} = \frac{\pi}{4(B_\alpha^D)^2 \alpha_\alpha^2 (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2} \sqrt{\frac{\pi}{B_\alpha^D (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2}} \mathbf{n}_{\alpha w}, \\ \beta_\beta^D = B_\beta^D [\alpha_\beta^2 + (\beta_\beta^2 - 2\alpha_\beta \beta_\beta) (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_\beta)^2], \\ A_{0-\beta}^D = A_0^{(i)} \frac{(B_\alpha^D)^2 \alpha_\alpha^2 (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2}{(B_0^{(i)})^2}.$$

Wielkości różniące się tylko wskaźnikami można otrzymać przez zamianę wskaźników.

Zakładając dalej model Maxwella, tzn. kładąc $\alpha_\beta = 1, \beta_\beta = 0$ dostajemy:

$$(5.7) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - (1 - \varepsilon_\alpha) [\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - 2(\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) \mathbf{n}_{\alpha w}], \\ \mathbf{F}_{\alpha i n \beta} = -\frac{3}{8} m \sqrt{\pi} \frac{d\Sigma_\alpha d\Sigma_\beta \varepsilon_\beta \mathbf{d}_V}{d^2} A_0^{(i)} (2B_0^{(i)})^{-5/2} \left[\left(\frac{B_0^{(i)}}{B_\beta} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

W szczególności dla zwykłego modelu dyfuzyjnego

$$(5.8) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}.$$

Na podstawie wzorów (5.7), (5.8), uzyskanych dla modeli Maxwella i dyfuzyjnego, możemy wyciągnąć następujące wnioski:

- 1) Wyrażenie na siłę \mathbf{F}_α określone jest tylko przez człon interakcyjny $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$.
- 2) Charakterystyczne jest, że wielkość siły działającej na element nie zależy od temperatury tego elementu: \mathbf{F}_α zależy jedynie od stosunków energetycznych otoczenie–element β i od wielkości współczynników dyfuzyjności (mieszania) $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$.
- 3) Oddziaływanie znika, jeśli $\varepsilon_\beta = 0$ tj. w przypadku, gdy element β odbija czysto zwierciadlanie.
- 4) Dla $\varepsilon_\alpha = 0$, czyli dla przypadku gdy element α odbija cząstki w sposób czysto zwierciadlany, siła \mathbf{F}_α osiąga wartość maksymalną (przy zadanym ε_β) — efektywny pęd przycho-dzący z obszaru brylowego, wyznaczonego powierzchnią elementu β jest wskutek odbicia zreprodukowany dwukrotnie (dla $\varepsilon_\alpha = 0$, $\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_{i n \beta}^\alpha$).
- 5) Jeśli element β jest gorętszy od gazu otoczenia, to wywiera na α działanie odpychające, jeśli zimniejszy — to przyciągające.

6) Wynik (5.8) jest potwierdzeniem wyniku pracy [8], w której uzyskano wyrażenia na siły dla kul spoczywających w ośrodku dla modelu dyfuzyjnego. Potwierdzenie zawiera się w proporcjonalności siły \mathbf{F}_α do wyrazu $[(B_0^{(i)}/B_\beta)^{1/2} - 1]$ — fakt ten oznacza, że rozwiązania równań ciągłości dla elementów spoczywających przy założeniu modelu dyfuzyjnego są takie same jak w przypadku, gdy każdy z elementów spoczywa w ośrodku samotnie.

Zależność sił od odległości jest trywialna — mianowicie niezależnie od orientacji elementów, prędkości układu i modelu odbicia, siły są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości — jest to zresztą prostą konsekwencją specyfiki zagadnienia mianowicie tego faktu, że powierzchnie oddziaływujące są nieskończenie małe.

W szczególności, zaniehbując we wzorach ogólnych oddziaływanie interakcyjne wywołane obecnością drugiego elementu, możemy w prosty sposób otrzymać oddziaływanie z ośrodkiem płaskiej skończonej płytki o różnych własnościach «odbicia» po obu stronach powierzchni: dla modelu dyfuzyjnego anizotropowego

$$(5.9) \quad \mathbf{F} = \frac{\pi}{4} m \frac{A_0^{(i)}}{(B_0^{(i)})^2} \left[\sqrt{\frac{\pi}{B_z^D(\alpha_z - \beta_z)^2}} - \sqrt{\frac{\pi}{B_w^D(\alpha_w - \beta_w)^2}} \right] d\Sigma \mathbf{n}_w.$$

B. Zagadnienie wymiany ciepła

1. Wyrażenie na wymianę ciepła. Postępując podobnie jak w przypadku zagadnienia sił, całkowite ciepło Q_α przekazywane elementowi α ($\alpha = 1V2$) można złożyć z ciepła «nieburzonego» $Q_{\alpha 0}$, jakie byłoby przekazywane elementowi α pod nieobecność elementu β i ciepła $Q_{\alpha i n}$, które jest wynikiem interakcji elementów

$$(1.1) \quad Q_\alpha = Q_{\alpha 0} + Q_{\alpha i n}.$$

Ciepło $Q_{\alpha 0}$ jest sumą ciepła $Q_{\alpha 0 w}$ i $Q_{\alpha 0 z}$ przekazywanych odpowiednio stronie wewnętrznej i zewnętrznej elementu α

$$(1.2) \quad Q_{\alpha 0} = Q_{\alpha 0 w} + Q_{\alpha 0 z}.$$

Ciepło interakcyjne Q_{ain} można traktować jako złożenie ciepła $Q_{ain\beta}$, będącego różnicą pomiędzy ciepłem przychodzącym od elementu β i ciepłem, które przychodziłoby do elementu α z ośrodka, z obszaru zasłoniętego przez element β , i ciepła Q_{ain0} , które jest różnicą ciepła «wyemitowanego» z elementu α i ciepła «wyemitowanego» z elementu α pod nieobecność elementu β :

$$(1.3) \quad Q_{ain} = Q_{ain\beta} + Q_{ain0}.$$

Poszczególne ciepła wyrażają się poprzez całki po przestrzeni prędkości z elementarnych strumieni energii, określonych odpowiednimi funkcjami rozkładu w sposób następujący:

$$(1.4) \quad Q_{\alpha 0V} = m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} c_{0\alpha}^2 (-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\alpha}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} - \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha V},$$

$$(1.5) \quad Q_{ain0} = -m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} - \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha V},$$

$$(1.6) \quad Q_{ain\beta} = m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\beta\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\beta\alpha} - \int_{\Omega^c} c_{0\alpha}^2 (\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta z}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} \right] d\Sigma_{\beta w}.$$

W interakcyjnym strumieniu energii $Q_{ain\beta}$, pochodzącym od elementu β funkcja rozkładu cząsteczek padających z elementu β została zastąpiona funkcją rozkładu cząsteczek odbitych od elementu β (zresztą jest to zastąpienie formalne). Jeśli skorzystać z gotowych wzorów wyprowadzanych w rozważaniach dotyczących zagadnienia sił:

$$(1.7) \quad \mathbf{c}_{\beta\alpha} = \mathbf{c}_{\beta\beta} = \mathbf{c}_{0\alpha} = c(-1)^{1+\beta} \mathbf{d}_V, \quad d^3 \mathbf{c} = c^2 dc d\Omega_c,$$

$$d\Omega_1 = (-1)^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w}, \quad \mathbf{c}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{n}_{\beta w} = c_{\beta\beta} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}),$$

$$(1.8) \quad f_{0-\beta z}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) [c_{0\alpha}^2 + 2c_{0\alpha} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q})],$$

$$(1.9) \quad f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D},$$

$$(1.10)$$

$$f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \exp(-B_0^{(i)} \{c_{\beta\beta}^2 + 2(-1)^{1+\beta} c_{\beta\beta} [(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})]\}),$$

$$(1.11) \quad f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp(-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2}) \exp\{-B_{\beta w}^D c_{\beta\beta}^2 [\alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w}) \times$$

$$\times (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2] - 2B_{\beta w}^D c_{\beta\beta} (-1)^{1+\beta} [\beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*)]\},$$

to $Q_{ain\beta}$ daje się przedstawić w postaci

$$(1.12) \quad Q_{ain\beta} = m d\Sigma_{\beta w} (-1)^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \times$$

$$\times \{(1 - \varepsilon_{\beta w}) J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} - J_{ain\beta}^{(i)}\},$$

$$(1.13) \quad J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} = \int_0^\infty c_{\beta\beta}^5 f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} dc_{\beta\beta}, \quad J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = \int_0^\infty c_{\beta\beta}^5 f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} dc_{\beta\beta},$$

$$J_{ain\beta}^{(i)} = \int_0^\infty c_{0\alpha}^5 f_{0-\beta z}^{(i)} dc_{0\alpha}.$$

W charakterze funkcji rozkładu $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ cząsteczek odbitych zwierciadlanie od elementu β wzięliśmy funkcję rozkładu molekuł padających na element β z otoczenia, dla takiej prędkości «padającej», która po zwierciadlanym odbiciu od elementu β osiągnie element

$\alpha(f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}(\mathbf{c}^{(r)})) = f_{0-\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}))$ (można tak postąpić, gdyż w $Q_{\alpha in\beta}$ znamy tylko możliwy jeden kierunek prędkości mianowicie od β do α — w przypadku ogólnym, kiedy dopuszczony jest określony zbiór kierunków prędkości «odbitych» (np. przy liczeniu $Q_{\alpha in0}$ zbiór ten jest półprzestrzenią kierunków) w charakterze $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ musimy wziąć funkcję rozkładu cząsteczek padających, nie tylko z otoczenia, ale również z elementu $\alpha : f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}(\mathbf{c}^{(r)}) = f_{0\alpha w-\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}))$. Podstawiając dalej do $Q_{\alpha in0}$ funkcję $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$ w postaci jawnej

$$(1.14) \quad f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0\beta w-\alpha w}^D,$$

dostajemy

$$(1.15) \quad Q_{\alpha in0} = -m \left\{ \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) [(1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0\beta w-\alpha w}^D] d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} + \right. \\ \left. - \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) [(1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0-\alpha w}^D] d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right\} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Korzystając z właściwości funkcji zwierciadlanej $f_{0-\alpha w}^{(r)s}$ mamy natychmiast

$$(1.16) \quad m \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha w}^{(r)s} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = Q_{0\alpha w}^{(i)},$$

co możemy zinterpretować w ten sposób, że strumień energii «odbitej» zwierciadlanie jest równy strumieniowi energii «padającej». Nietrudno również udowodnić, rozbijając półprzestrzeń prędkości $\Omega_{1/2}^c$ na dwa obszary $\Omega_{1/2}^c - d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\Sigma\beta)$ i $d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\Sigma\beta)$ (i uwzględniając, że $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} = f_{0\beta w-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}_w^{(r)}(\mathbf{c}^{(i)})) = f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)}$ oraz fakt, że funkcja $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ dla prędkości $\mathbf{c}^{(r)}$ o kierunku od β do α jest związana z funkcją rozkładu $f_{0-\beta w}^{(i)}$ cząsteczek padających tylko z otoczenia), że zachodzi związek

$$(1.17) \quad m \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha in\beta}, \\ Q_{0-\alpha w}^{(i)} = m \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{0\alpha}^2(-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\alpha}^{(i)} d^3\mathbf{c}_{0\alpha}.$$

Dla pozostałych całek w wyrażeniu $Q_{\alpha in0}$ dostajemy:

$$(1.18) \quad \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha w}^{(r)D} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) J_{0-\alpha w}^{(r)D},$$

$$(1.19) \quad J_{0-\alpha w}^{(r)D} = \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) \exp\{-B_{\alpha w}^D[\alpha_{\alpha w}^2 + (\beta_{\alpha w}^2 - 2\alpha_{\alpha w}\beta_{\alpha w})(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2] + \\ -B_{\alpha w}^D[-2\alpha_{\alpha w}(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha w}^*) + 2\beta_{\alpha w}(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{n}_{\alpha w} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha w}^*)]\} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)},$$

$$(1.20) \quad \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) J_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*).$$

Uwzględniając (1.16), (1.17), (1.18) i (1.19) możemy przedstawić $Q_{\alpha in0}$ w postaci

$$(1.21) \quad Q_{\alpha in0} = -m \{ (1 - \varepsilon_{\alpha w}) [Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha in\beta}] + \varepsilon_{\alpha w} A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \times \\ \times J_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) - (1 - \varepsilon_{\alpha w}) Q_{0-\alpha w}^{(i)} - \varepsilon_{\alpha w} A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) J_{0-\alpha w}^{(r)D} \} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Wreszcie dla ostatniej komponenty $Q_{\alpha 0V}$ w ogólnym wyrażeniu na ciepło w lokalnym układzie współrzędnych o osi $z^{(i)} \parallel \mathbf{n}_{\alpha V}^*$, znajdujemy

$$(1.22) \quad Q_{\alpha 0V} = -m \{ A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) [J_{0-\alpha V}^{(i)} - (1 - \varepsilon_{\alpha V}) J_{0-\alpha V}^{(i)}] + \\ + \varepsilon_{\alpha V} A_{0-\alpha V}^D \exp(-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}) J_{0-\alpha V}^{(r)D} \},$$

gdzie

$$(1.23) \quad J_{0-\alpha V}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 J_{0\alpha V}^{(i)(k)},$$

$$(1.24) \quad J_{0-\alpha V}^{(r)D} = \sum_{k=1}^3 J_{0\alpha V}^{(r)D(k)},$$

$$(1.25) \quad J_{0\alpha V}^{(i)(k)} = J_{0\alpha V}^{(i)(k)}(1) J_{0V}^{(i)}(2) J_{0\alpha V}^{(i)(k)}(3), \quad k = 1, 2, 3 \equiv x, y, z;$$

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{0\alpha V}^{(i)x}(1) &= \int_{-\infty}^{\infty} c_{0\alpha x}^2 \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha x} + 2c_{0\alpha x} q'_x]\} dc_{0\alpha x}, \\ J_{0\alpha V}^{(i)y}(2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha y}^2 + 2c_{0\alpha y} q'_y]\} dc_{0\alpha y}, \\ J_{0\alpha V}^{(i)z}(3) &= - \int_0^{\infty} c_{0\alpha z}^* \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha z}^{*2} - 2c_{0\alpha z}^* q'_z]\} dc_{0\alpha z}^*, \quad c_{0\alpha z}^* = -c_{0\alpha z}. \end{aligned} \right.$$

$$(1.27) \quad J_{0\alpha V}^{(i)y}(1) = J_{0\alpha V}^{(i)x}(2)(q'_x), \quad J_{0\alpha V}^{(i)y}(2) = J_{0\alpha V}^{(i)x}(1)(q'_y), \quad J_{0\alpha V}^{(i)y}(3) = J_{0\alpha V}^{(i)x}(3),$$

$$(1.28) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{0\alpha V}^{(i)z}(1) &= J_{0\alpha V}^{(i)y}(1), \quad J_{0-\alpha V}^{(i)z}(2) = J_{0\alpha V}^{(i)x}(2), \\ J_{0\alpha V}^{(i)z}(3) &= - \int_0^{\infty} c_{0\alpha z}^* \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha z}^{*2} - 2c_{0\alpha z}^* q'_z]\} dc_{0\alpha z}^*, \end{aligned} \right.$$

$$(1.29) \quad J_{0\alpha V}^{(r)D(k)} = J_{0\alpha V}^{(r)D(k)}(1) J_{0\alpha V}^{(r)D(k)}(2) J_{0\alpha V}^{(r)D(k)}(3),$$

$$(1.30) \quad \left\{ \begin{aligned} J_{0\alpha V}^{(r)Dx}(1) &= \int_{-\infty}^{\infty} c_{\alpha\alpha x}^2 \exp\{-B_{\alpha V}^D[\alpha_{\alpha V}^2 c_x^{(r)2} - 2\alpha_{\alpha V} c_x^{(r)} q_{0-\alpha V}^*]\} dc_{\alpha\alpha x}, \\ J_{0\alpha V}^{(r)Dy}(2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_{\alpha V}^D[\alpha_{\alpha V}^2 c_y^2 - 2\alpha_{\alpha V} c_y q_{0-\alpha V}^*]\} dc_{\alpha\alpha y}, \\ J_{0\alpha V}^{(r)Dz}(3) &= \int_0^{\infty} c_{\alpha\alpha z} \exp\{-B_{\alpha V}^D[(\alpha_{\alpha V}^2 + \beta_{\alpha V}^2 - 2\alpha_{\alpha V} \beta_{\alpha V}) c_z^2] + \\ &\quad - 2B_{\alpha V}^D c_z (-\alpha_{\alpha V} + \beta_{\alpha V})(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*)\} dc_z, \end{aligned} \right.$$

$$(1.31) \quad J_{0\alpha V}^{(r)Dy}(1) = J_{0\alpha V}^{(r)Dx}(2)(q_{0\alpha V}^*), \quad J_{0\alpha V}^{(r)Dy}(2) = J_{0\alpha V}^{(r)Dx}(1)(q_{0-\alpha V}^*),$$

(1.32)

$$\left\{ \begin{aligned} J_{0\alpha V}^{(r)Dy}(3) &= J_{0\alpha V}^{(r)Dx}(3), \quad J_{0\alpha V}^{(r)Dz}(1) = J_{0\alpha V}^{(r)Dx}(2)(q_{0\alpha V}^*), \quad J_{0\alpha V}^{(r)Dz}(2) = J_{0\alpha V}^{(r)Dx}(2), \\ J_{0\alpha V}^{(r)Dz}(3) &= \int_0^{\infty} c_{\alpha\alpha z}^3 \exp\{-B_{\alpha V}^D[(\alpha_{\alpha V}^2 + \beta_{\alpha V}^2 - 2\alpha_{\alpha V} \beta_{\alpha V}) c_z^2 + 2c_z(-\alpha_{\alpha V} + \beta_{\alpha V})(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*)]\}. \end{aligned} \right.$$

*¹) Ze względu na to, że liczone wielkości są skalarami, wyniki w lokalnym układzie współrzędnych są takie same, jak w globalnym układzie odniesienia (nie zachodzi konieczność transformacji).

W wyrażeniu $Q_{\alpha 0V}$ mamy więc do obliczenia następujące całki: $J_{0\alpha V_x}^{(i)}(1)$, $J_{0\alpha V_x}^{(i)}(2)$, $J_{0\alpha V_x}^{(i)}(3)$, $J_{0\alpha V_z}^{(i)}(3)$, $J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(1)$, $J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(2)$, $J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(3)$, $J_{0\alpha V_z}^{(r)D}(3)$. Faktycznie ilość całek do obliczenia jest o połowę mniejsza, gdyż niektóre całki są znane z zagadnienia sił; mamy mianowicie

$$\begin{aligned} J_{0\alpha V_x}^{(i)}(2) &= I_{0\alpha V_x}^{(i)}(2), & J_{0\alpha V_x}^{(i)}(3) &= -I_{0\alpha V_x}^{(i)}(3), \\ J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(2) &= I_{0\alpha V_x}^{(r)D}(2), & J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(3) &= I_{0\alpha V_x}^{(r)D}(3). \end{aligned}$$

2. Obliczenie całek oddziaływania energetycznego. Pozostałe do obliczenia całki z wyrażenia $Q_{\alpha 0V}$ są następujące:

$$(2.1) \quad J_{0\alpha V_x}^{(i)}(1) = \frac{1}{2B_0^{(i)}} \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp\{B_0^{(i)} q_x'^2\} (1 + 2B_0^{(i)} q_x'^2),$$

$$(2.2) \quad J_{0\alpha V_z}^{(i)}(3) = -(2\beta)^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad \beta = B_0^{(i)}, \quad \gamma = 2B_0^{(i)} q_z',$$

$$(2.3) \quad J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(1) = \frac{1}{2B_{\alpha V}^D \alpha_{\alpha V}^2} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D \alpha_{\alpha V}^2}} \exp\{B_{\alpha V}^D q_{0\alpha V_x}^{*2}\} (1 + 2B_{\alpha V}^D q_{0\alpha V_x}^{*2}),$$

$$(2.4) \quad J_{0\alpha V_z}^{(r)D}(3) = (2\beta^*)^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{\gamma^{*2}}{8\beta^*}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma^*}{\sqrt{2\beta^*}}\right),$$

$$\beta^* = B_{\alpha V}^D (\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2, \quad \gamma^* = 2B_{\alpha V}^D (\beta_{\alpha V} - \alpha_{\alpha V}) (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*).$$

Wszystkie całki występujące w wyrażeniu $Q_{\alpha in\beta}$ dają się zapisać w postaci

$$(2.5) \quad J = A \exp\{-Bq^2\} (2\beta)^{-3} \Gamma(6) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-6}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right),$$

przy czym wielkości A , B , q , β , γ dla poszczególnych całek J wynoszą odpowiednio:

dla całki $J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$,

$$(2.6) \quad A = A_0^{(i)}, \quad B = B_0^{(i)}, \quad q = q, \quad \beta = B_0^{(i)}, \quad \gamma = 2(-1)^{1+\beta} B_0^{(i)} [(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) (\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})],$$

dla całki $J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$,

$$(2.7) \quad \begin{aligned} A &= A_{0\alpha w-\beta w}^D, \quad B = B_{\beta w}^D, \quad q = q_{0\alpha w-\beta w}^*, \quad \beta = B_{\beta w}^D [\alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w}) \times \\ &\quad \times (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2], \\ \gamma &= 2(-1)^{1+\beta} B_{\beta w}^D [\beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) (\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*)]; \end{aligned}$$

dla całki $J_{\alpha in\beta}^{(i)}$,

$$(2.8) \quad A = A_0^{(i)}, \quad B = B_0^{(i)}, \quad q = q, \quad \beta = B_0^{(i)}, \quad \gamma = 2(-1)^{1+\beta} B_0^{(i)} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}).$$

Całki występujące w wyrażeniu $Q_{\alpha in 0}$ nie wychodzą poza zbiór całek w wyrażeniach $Q_{\alpha 0V}$ i $Q_{\alpha in\beta}$.

3. Dyskusja wyrażenia na wymianę ciepła. Ostateczne wyrażenie na wymianę ciepła pomiędzy ośrodkiem swobodno-molekularnym i układem dwu nieskończenie małych elementów, dowolnie zorientowanych, poruszającym się w ośrodku z dowolną prędkością, jest następujące:

$$(3.1) \quad Q_{\alpha} = (Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha in\beta}^{(i)}) + (Q_{0-\alpha z}^{(i)} - Q_{0-\alpha z}^{(r)}) - Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)},$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Q_{0-\alpha w}^{(i)} &= -mA_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}q^2\} J_{0-\alpha w}^{(i)} d\Sigma_{\alpha w}, \\ Q_{0-\alpha z}^{(i)} &= -mA_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}q^2\} J_{0\alpha z}^{(i)} d\Sigma_{\alpha z}, \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad Q_{0-\alpha z}^{(r)} = [-m(1-\varepsilon_{\alpha z})J_{0-\alpha z}^{(i)} + m\varepsilon_{\alpha z}A_{0-\alpha z}^D \exp\{-B_{\alpha z}^D q_{0-\alpha z}^{*2}\} J_{0-\alpha z}^{(r)D}] d\Sigma_{\alpha z},$$

$$(3.4) \quad Q_{\alpha i n \beta} = -md\Sigma_{\beta w} d\Sigma_{\alpha w} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \{ (1-\varepsilon_{\beta w}) J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)S} + \varepsilon_{\beta w} J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} - J_{\alpha i n \beta}^{(i)} \},$$

$$(3.5) \quad Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} = (1-\varepsilon_{\alpha w}) Q_{0\beta w-\alpha w}^{(s)} + \varepsilon_{\alpha w} Q_{0\beta w-\alpha w}^D,$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} Q_{0\beta w-\alpha w}^{(s)} &= Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha i n \beta}, \\ Q_{0\beta w-\alpha w}^D &= A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp\{-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}\} J_{0-\alpha w}^{(r)D} (\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) d\Sigma_{\alpha w}. \end{aligned}$$

Pierwsze dwa wyrazy w nawiasie możemy interpretować jako strumień energii padający na wewnętrzną stronę elementu α , z otoczenia i od elementu β ; dwa następne wyrazy, w drugim nawiasie, jako strumienie energii: padający na zewnętrzną stronę elementu α i odbity od zewnętrznej strony α ; wreszcie wyraz ostatni jako strumień energii odbity od wewnętrznej strony α (strumień ten możemy uważać za złożenie strumienia energii odbitego zwierciadlanie i strumienia energii dyfuzyjnego).

Oddziaływanie interakcyjne zawarte jest w wyrazach $Q_{\alpha i n \beta}$ i $Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$. Interakcja znika jeśli którykolwiek z elementów leży na linii łączącej elementy (w szczególności również wtedy, gdy elementy są prostopadłe do siebie). Wyraz $Q_{\alpha i n \beta}$, który decyduje o interakcji (oddziaływanie interakcyjne zawarte w $Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$ przejawia się również poprzez występowanie w tym wyrazie $Q_{\alpha i n \beta}$ jest proporcjonalny do $d\Sigma_{\beta w} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2}$, czyli do elementarnego kąta bryłowego pod jakim widać element $d\Sigma_{\beta}$ z elementu α — tym samym jest to zależność oddziaływania od odległości. Rozwiązanie zagadnienia oddziaływania nieskończenie małych elementów dostarcza informacji o wpływie na oddziaływanie takich parametrów jak prędkość układu w ośrodku, wzajemna orientacja ciał układu i model «odbicia» gaz-powierzchnia.

Zę względu na skomplikowany charakter ogólnego wyrażenia, analizę wpływu poszczególnych parametrów można przeprowadzić w następujący sposób: 1) dla zbadania wpływu prędkości na oddziaływanie — przyjąć najprostszą orientację elementów (elementy równoległe) i najprostszy model odbicia gaz — powierzchnia (model dyfuzyjny); 2) dla zbadania wpływu orientacji elementów — położyć $q = 0$ i przyjąć najprostszy model odbicia; 3) dla zbadania wpływu modelu — położyć $q = 0$ i przyjąć najprostszą orientację elementów. Wyników tej analizy nie przytaczamy, gdyż zajęłoby to dużo miejsca i byłoby w znacznej mierze powtórzeniem szeregu relacji ogólnych, sformułowanych tylko w bardziej fragmentarycznej formie, w szczególności zaś byłoby powtórzeniem podobnej dyskusji, przeprowadzonej dla zagadnienia sił.

Literatura cytowana w tekście

1. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа*, Москва 1961.
2. S. A. SCHAAF, P. L. CHAMBRE, *Flow of rarefied gases*, Princeton, New Jersey (1961).
3. Э. Лариш, *Аэродинамические взаимодействия при свободно-молекулярном обтекании*, Изв. АН СССР Отд. техн. и механ. и машиностр. № 3 (1960), 117—120.

4. ABE KANZI, *On the interaction between two rectangular plates in a free molecule flow*, Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., No. 10, 7 (1964), 13—19.
5. FAU CHIEN, *Aerodynamic forces and heat transfer on shielded flat plates in a free molecule flow*, New York—London Rarefied Gas Dynamic, 1, (1969), 551—560.
6. WANI TAKEKI, *Aerodynamic interference in a free molecular flow*, Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., No. 4, 3 (1960), 13—20.
7. C. CERCIGNANI, M. LAMPIS, *Influence of gas-surface interaction on drag and lift in free-molecular flow*, Entropie, No. 44 (1972), 40—46.
8. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie kul spoczywających w ośrodku swobodno-molekularnym*, Prace IPPT, 36, 1973.
9. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie układu dwu kul o stałych temperaturach, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym wzdłuż osi łączącej środki kul w przybliżeniu dużych odległości i małych prędkości*, Prace IPPT, 36, 1973.
10. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie układu dwu kul, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością hipersoniczną wzdłuż osi łączącej środki kul, w przybliżeniu dużych odległości*, Prace IPPT, 36, 1973.
11. S. KOSOWSKI, *Ustalona wymiana ciepła dla układu dwu kul o równych temperaturach, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością hipersoniczną dowolnie skierowaną*, Prace IPPT, 36, 1973.
12. S. KOSOWSKI, *Anizotropowy model deterministyczno-probabilistycznego oddziaływania gazu ze ścianką* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. (w druku).
13. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie układu dwu kul, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością hipersoniczną skierowaną prostopadle do osi łączącej środki kul*, Prace IPPT, 36, 1973.

Резюме

СТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ СРЕДЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

В работе решена задача о сопротивлении и теплообмене в системе, состоящей из двух бесконечно малых произвольно ориентированных поверхностных элементов твердого тела, находящегося в свободно-молекулярном течении. В качестве модели отражения газа от поверхности принята модифицированная модель Максвелла с анизотропной диффузионной частью. Ввиду того, что данная модель содержит как частные случаи некоторые общеизвестные модели (диффузионную, модели Максвелла и Ночилли, диффузионно-анизотропную модель), решение задачи дает возможность исследования взаимодействия системы тел, движущейся в свободно-молекулярной среде, в зависимости от модели отражения газа от поверхности. Решение позволяет также исследовать взаимодействие в зависимости от скорости системы и от ориентировки её элементов.

Для тел конечных размеров, даже в самом простом случае системы двух шаров, покоящихся в среде, и в предположении самой простой модели отражения газа от поверхностей тел, нельзя найти точного аналитического решения. В общем же случае задача о взаимодействии не может быть решена в численном виде. Сопротивление и теплообмен для бесконечно малых элементов можно определить точным образом аналитическим путем. Они выражаются через специальные функции Φ и D_n (интеграл вероятностей и функцию параболического цилиндра).

Summary

STATIONARY INTERACTIONS OF A SYSTEM CONSISTING OF TWO INFINITESIMAL, ARBITRARILY ORIENTED ELEMENTS MOVING AT AN ARBITRARY VELOCITY IN A FREE-MOLECULAR MEDIUM

In the paper is solved the problem of drag and heat exchange for a system of two infinitesimal, arbitrarily oriented surface elements in a free-molecular flow. Reflection of the gas from the surface is described by a Maxwell model with anisotropic diffusive part.

Since the model contains, as particular cases, a number of models being in common use, such as the diffusion model, Maxwell's, Nocilla's and the anisotropic diffusion models, the solution creates the possibility of investigating of the interaction of bodies moving in a free-molecular medium from the point of view of model of gas reflection from the surface. The solution also enables us to investigate the interaction from the point of view of velocity of the system and orientation of its elements. As far finite dimension bodies are considered, the simplest case of two spheres placed in the medium can not be solved analytically to yield an accurate result, even in the case of the simplest, diffusion model of gas reflection; the problem of interaction in a general form is, however, not suitable for numerical analysis. The drag and heat exchange for infinitely small bodies may be solved analytically in an accurate manner: the solutions are expressed in terms of special functions Φ and D_{-n} (error function and the function of parabolic cylinder).

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1973 r.
