

KSZTAŁTOWANIE RUROCIĄGU O ZMIENNEJ ŚREDNICY, WYKAZUJĄCEGO PEŁNE UPLASTYCZNIENIE W STADIUM ZNISZCZENIA

ZDZISŁAWA KORDAS (KRAKÓW)

1. Wstęp

Metody optymalnego projektowania konstrukcji z uwagi na nośność graniczną (minimum objętości przy ustalonej nośności granicznej) budzą w ostatnich latach szczególne zainteresowanie. Omawiane są między innymi w pracach WASIUTYŃSKIEGO i BRANDTA [7], RETMANA i SZAPIRO [5], SHEU i PRAGERA [6]. W podstawowych pracach DRUCKERA i SHIELDA [1], [2] oraz MROZA [4] stwierdzono, że w optymalnej konstrukcji w stadium zniszczenia uplastycznione być powinno bądź całe ciało, bądź też możliwie wielki podobszar tego ciała. W pracy KORDAS i ŻYCKOWSKIEGO [3] badano problem pokrewny do problemu optymalnego kształtowania. Zajmowano się mianowicie poszukiwaniem kształtów ciał podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia. Do analizy wybrano stosunkowo prosty nietrywialny przypadek, poszukując takich kształtów niekołowych cylindrów grubościennych, które w warunkach płaskiego stanu odkształcenia wykazują pełne uplastycznienie przy wyczerpaniu nośności granicznej pod działaniem stałego ciśnienia zewnętrznego i wewnętrznego.

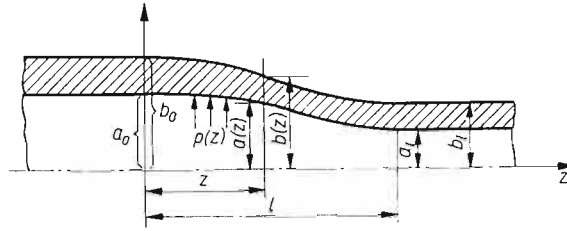
W niniejszej pracy zajęto się również problemem kształtowania kołowych cylindrów grubościennych. Zagadnienie dotyczy jednak cylindrów niepryzmatycznych, tzn. rurociągów o średnicy zmieniającej się wzdłuż osi rurociągu, poddanych działaniu zmiennego ciśnienia wewnętrznego. Tego typu rurociąg może być odcinkiem łączącym dwa rurociągi przyzmatyczne o różnych średnicach. Podobnie jak w pracy [3] dla uzyskania poszukiwanego, optymalnego kształtu zastosowano kryterium całkowitego uplastycznienia przy wyczerpaniu nośności granicznej.

2. Założenia i równania podstawowe

2.1. Rozważamy poziomy rurociąg grubościenny o osi geometrycznej pokrywającej się z osią z , o promieniu wewnętrznym $a(z)$ i promieniu zewnętrznym $b(z)$, poddany działaniu zmiennego ciśnienia $p(z) = p$ (rys. 1). Zakładamy, że w przekroju $z = 0$, ciśnienie i prędkość przepływającego płynu określone są odpowiednio przez p_0 i v_0 , natomiast wymiary cylindra przez promień wewnętrzny a_0 i zewnętrzny b_0 . Rozkład ciśnień wzdłuż osi rurociągu zakładamy zgodnie z prawem Bernoulli'ego oraz z równaniem ciągłości strugi dla płynu idealnego, mianowicie:

$$(2.1) \quad p = p_0 + \frac{\gamma}{2g} v_0^2 \left(1 - \frac{F_0^2}{F^2} \right),$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie, γ — ciężar właściwy płynu, F i F_0 — pole przekroju strugi odpowiednio dla dowolnego z i dla $z = 0$.



Rys. 1. Odcinek łączący dwa rurociągi przyzmatyczne o różnych średnicach

2.2. Rozważany problem wykazuje, przy pominięciu ciężaru własnego, cechy kołowej symetrii. Równaniami podstawowymi będą więc następujące równania zapisane we współrzędnych walcowych:

a) dwa równania równowagi wewnętrznej (równania naprężeniowe):

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0;$$

b) dwa równania nierozdzielności (równania geometryczne):

$$(2.3) \quad \varepsilon_\theta + r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \varepsilon_r = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} = 0;$$

c) warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego, o którym założymy, że ma być spełniony w każdym punkcie ciała:

$$(2.4) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 2Q^2;$$

d) prawo zmiany objętości dla materiału nieściśliwego:

$$(2.5) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0;$$

e) trzy równania prawa zmiany postaci, które mogą być interpretowane bądź jako równania Hencky-Iliuszyna, bądź Levy-Misesa:

$$(2.6) \quad \varphi(\sigma_z - \sigma_r) = \varepsilon_z - \varepsilon_r,$$

$$\varphi(\sigma_\theta - \sigma_z) = \varepsilon_\theta - \varepsilon_z,$$

$$2\varphi\tau_{rz} = \gamma_{rz}.$$

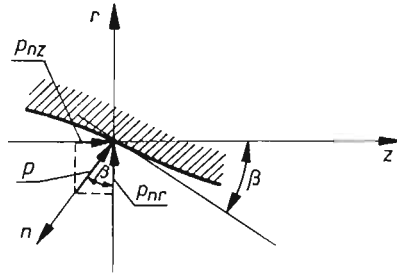
W równaniach (2.2)—(2.6) σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} , ε_r , ε_θ , ε_z , γ_{rz} oznaczają składowe naprężenia i odkształcenia bądź prędkości odkształceń, φ — moduł zaawansowania odkształceń plastycznych, Q — granicę plastyczności przy rozciąganiu.

2.3. Związki między ciśnieniem a składowymi stanu naprężenia na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej rozważanego cylindra określimy z naprężeniowych warunków brzegowych:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p_{nr} &= a_{nr} \sigma_r + a_{nz} \tau_{rz}, \\ p_{nz} &= a_{nr} \tau_{rz} + a_{nz} \sigma_z, \end{aligned}$$

gdzie a_{nr} i a_{nz} oznaczają cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej.

Na brzegu wewnętrznym (rys. 2) składowe ciśnienia są równe odpowiednio $p_{nr} =$



Rys. 2. Rozkład obciążeń na brzegu wewnętrznym

$= p \cos \beta$, $p_{nz} = p \sin \beta$. Cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej z osiami r i z wyrazimy przez funkcje trygonometryczne kąta β , jaki tworzy styczna do konturu (brzegu) z osią z , mianowicie

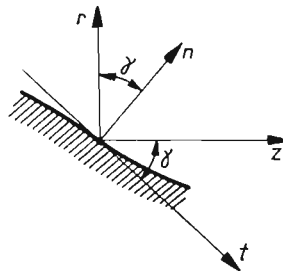
$$(2.8) \quad \begin{aligned} a_{nr} &= \cos(\widehat{nr}) = -\cos \beta, \\ a_{nz} &= \cos(\widehat{nz}) = -\sin \beta. \end{aligned}$$

Ponieważ $\operatorname{tg} \beta = -\frac{dr}{dz} = -\frac{da(z)}{dz} = -a'(z)$, warunki brzegowe (2.7) mają więc postać:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_r - a'(z) \tau_{rz} + p &= 0, \\ \tau_{rz} - a'(z) \sigma_z - a'(z) p &= 0. \end{aligned}$$

Na brzegu zewnętrznym (rys. 3) składowe ciśnienia są równe zero, natomiast cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej są odpowiednio równe:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} a_{nr} &= \cos(\widehat{nr}) = \cos \gamma, \\ a_{nz} &= \cos(\widehat{nz}) = \sin \gamma. \end{aligned}$$



Rys. 3. Brzeg zewnętrzny rurociągu

Ponieważ $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{db(z)}{dz} = -b'(z)$, warunki brzegowe (2.7) otrzymujemy w postaci:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_r - b'(z) \tau_{rz} &= 0, \\ \tau_{rz} - b'(z) \sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie problemu metodą małego parametru

3.1. Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu parametru α , który charakteryzuje małe odstępstwo promienia wewnętrznego cylindra od wartości stałej a_0 (promień wewnętrzny dla $z = 0$, por. rys. 1). Zakładamy mianowicie

$$(3.1) \quad a(z) = a_0 + \alpha a_1 + \dots$$

oraz następujące rozwiązania równań (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) i (2.6):

$$(3.2) \quad X = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i X_i,$$

gdzie $X = \sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{rz}, \varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_z, \varphi$. Zerowe przybliżenia funkcji X są składowym stanem naprężenia i odkształcenia dla cylindra pryzmatycznego pod działaniem stałego ciśnienia p_0 , w przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Mianowicie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= -p_0 + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a_0}, & \varepsilon_{r_0} &= -\frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{\vartheta_0} &= -p_0 + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a_0} + \frac{2Q}{\sqrt{3}}, & \varepsilon_{\vartheta_0} &= \frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{z_0} &= -p_0 + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a_0} + \frac{Q}{\sqrt{3}}, & \varphi_0 &= \frac{C\sqrt{3}}{Qr^2}, \\ \tau_{rz_0} &= \varepsilon_{z_0} = \gamma_{rz_0} = 0, \end{aligned}$$

gdzie C oznacza dowolną stałą.

Wprowadzając założone rozwiązania (3.2) do równań podstawowych i porównując współczynniki przy pierwszych potęgach α , otrzymujemy układ dziewięciu równań, w których niewiadomymi są pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia, odkształcenia i φ . Równania te mają następującą postać:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz_1}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{\vartheta_1}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{z_1}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz_1}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz_1}}{r} &= 0, \\ \varepsilon_{\vartheta_1} + \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta_1}}{\partial r} r - \varepsilon_{r_1} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma_{rz_1}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{z_1}}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta_1}}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \sigma_{r_1} - \sigma_{\vartheta_1} = 0, \\
 [\text{c.d.}] \quad & \varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{\vartheta_1} + \varepsilon_{z_1} = 0, \\
 & \varphi_0(\sigma_{z_1} - \sigma_{r_1}) + \varphi_1 \frac{Q}{\sqrt{3}} = \varepsilon_{z_1} - \varepsilon_{r_1}, \\
 & \varphi_0(\sigma_{\vartheta_1} - \sigma_{z_1}) + \varphi_1 \frac{Q}{\sqrt{3}} = \varepsilon_{\vartheta_1} - \varepsilon_{z_1}, \\
 & 2\varphi_0 \tau_{r\vartheta_1} = \gamma_{r\vartheta_1}.
 \end{aligned}$$

W szereg parametru α rozwiniemy również ciśnienie wewnętrzne p i funkcję $b(z)$, określającą kształt powierzchni zewnętrznej cylindra. Zapiszemy mianowicie

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & p = p_0 + \alpha p_1 + \dots, \\
 & b(z) = b_0 + \alpha b_1(z) + \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie p_1 wynika z prawa rozkładu ciśnienia (2.1) i równa się

$$(3.6) \quad p_1 = -\frac{2v_0^2 \gamma}{g a_0} a_1(z),$$

b_0 jest promieniem wewnętrznym cylindra w przekroju $z = 0$, a $b_1(z)$ jest pierwszą poprawką tego promienia.

Warunki brzegowe (2.9) i (2.11) (wobec założeń (3.3) i (3.5)) dla pierwszego przybliżenia przyjmują następującą postać:

na powierzchni wewnętrznej, dla $r = a(z)$

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad & \sigma_{r_1} \Big|_{r=a_0} + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{a_1(z)}{a_0} + p_1 = 0, \\
 & \tau_{r\vartheta_1} \Big|_{r=a_0} - \frac{Q}{\sqrt{3}} a_1'(z) = 0;
 \end{aligned}$$

na powierzchni zewnętrznej, dla $r = b(z)$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & \sigma_{r_1} \Big|_{r=b_0} + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{b_1(z)}{b_0} = 0, \\
 & \tau_{r\vartheta_1} \Big|_{r=b_0} - \frac{Q}{\sqrt{3}} b_1'(z) = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwinięcie równań podstawowych i warunków brzegowych przeprowadzono według schematu przedstawionego w pracy [3]. Należy zaznaczyć, że warunki brzegowe w zerowym przybliżeniu określają stosunek promieni cylindra pryzmatycznego, mianowicie

$$(3.9) \quad \frac{b_0}{a_0} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2Q} p_0}.$$

3.2. Równania podstawowe (3.4) stosunkowo łatwo dają się rozwiązać przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Założymy mianowicie $\varepsilon_{z_1} = 0$. Z prawa zmiany objętości, prawa zmiany postaci oraz warunku plastyczności wynika, że pierwsze poprawki naprężeń normalnych są sobie równe, tzn. $\sigma_{r_1} = \sigma_{\vartheta_1} = \sigma_{z_1}$. Przy tym założeniu problem może

być rozwiązywany w naprężeniach. Warunki równowagi wewnętrznej dają następujący układ dwóch równań o niewiadomych $\sigma_1 \equiv \sigma_{r1} \equiv \sigma_{\theta 1} \equiv \sigma_{z1}$ i $\tau_1 \equiv \tau_{rz1}$:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{\tau_1}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Układ (3.10) sprowadzamy do jednego równania cząstkowego drugiego rzędu na pierwszą poprawkę naprężenia stycznego τ_1 ,

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} + \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tau_1 = 0.$$

Równanie (3.11) będziemy rozwiązywać metodą Fouriera. Założymy mianowicie, że

$$(3.12) \quad \tau_1 = F_1(z)F_2(r).$$

Rozdzielenie zmiennych prowadzi do równości

$$(3.13) \quad \frac{F_1''(z)}{F_1(z)} = \frac{F_2''(r)}{F_2(r)} + \frac{1}{r} \frac{F_2'(r)}{F_2(r)} - \frac{1}{r^2} = -\lambda^2,$$

a tym samym do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, określających funkcje $F_1(z)$ i $F_2(r)$. Przyjęcie dodatniej stałej po prawej stronie równości (3.13) prowadzi — jak się okazuje — do rozbieżnych rozwiązań, natomiast przypadek $\lambda = 0$ odpowiada całkowitemu uplastycznieniu cylindra liniowo zbieżnego. Otrzymujemy zatem równanie drgań harmonicznym

$$(3.14) \quad F_2''(z) + \lambda^2 F_1(z) = 0$$

oraz równanie Bessela w postaci

$$(3.15) \quad F_2''(r) + \frac{1}{r} F_2'(r) - \left(\frac{1}{r^2} - \lambda^2 \right) F_2(r) = 0.$$

Całką ogólną równania (3.14) jest następująca kombinacja funkcji trygonometrycznych

$$(3.16) \quad F_1(z) = A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z).$$

Całką ogólną równania (3.15) jest natomiast poniższa kombinacja funkcji Bessela

$$(3.17) \quad F_2(r) = A_2 I_1(\lambda r) + B_2 Y_1(\lambda r).$$

W rozwiązaniach (3.16) i (3.17) A_1, B_1, A_2, B_2 są nieoznaczonymi stałymi całkowania, $I_1(\lambda r), Y_1(\lambda r)$ są funkcjami Bessela pierwszego rzędu.

Rozwiązaniem ogólnym równania (3.11) jest funkcja określająca pierwszą poprawkę naprężenia stycznego, mianowicie

$$(3.18) \quad \tau_1 = \tau_1(z, r) = [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda r) + B_2 Y_1(\lambda r)].$$

Przez całkowanie równań (3.10) i wykorzystanie warunku zgodności, określimy pierwszą poprawkę naprężeń normalnych

$$(3.19) \quad \sigma_1 = \sigma_1(z, r) = [A_1 \cos(\lambda z) - B_1 \sin(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r)] + K,$$

gdzie K jest dowolną stałą całkowania, którą dalej przyjmiemy równą zeru. $I_0(\lambda r), Y_0(\lambda r)$ są funkcjami Bessela rzędu zerowego.

3.3. Po uwzględnieniu rozwiązań (3.18) i (3.19), warunki brzegowe (3.7) i (3.8) dają następujący układ czterech równań:

$$(3.20) \quad [A_1 \cos(\lambda z) - B_1 \sin(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda a_0) + B_2 Y_0(\lambda a_0)] + \left(\frac{2Q}{\sqrt{3}} + \frac{2V_0^2 \gamma}{g} \right) \frac{a_1}{a_0} = 0,$$

$$(3.21) \quad [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda a_0) + B_2 Y_1(\lambda a_0)] - \frac{Q}{\sqrt{3}} a_1' = 0,$$

$$(3.22) \quad [A_1 \cos(\lambda z) - B_1 \sin(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda b_0) + B_2 Y_0(\lambda b_0)] + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{b_1}{b_0} = 0,$$

$$(3.23) \quad [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda b_0) + B_2 Y_1(\lambda b_0)] - \frac{Q}{\sqrt{3}} b_1' = 0.$$

Wykorzystanie tego układu równań prowadzi do problemu wartości własnych. Pierwsze równanie (3.20) określa funkcję $a_1 = a_1(z)$, a trzecie (3.22) — funkcję $b_1 = b_1(z)$:

$$(3.24) \quad a_1 = a_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2Q} a_0 \eta [B_1 \sin(\lambda z) - A_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda a_0) + B_2 Y_0(\lambda a_0)],$$

$$(3.25) \quad b_1 = b_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2Q} b_0 [B_1 \sin(\lambda z) - A_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda b_0) + B_2 Y_0(\lambda b_0)],$$

gdzie

$$(3.26) \quad \eta = \frac{Qg}{Qg + V_0^2 \gamma \sqrt{3}} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \gamma \sqrt{3}}{Qg}},$$

jest parametrem uwzględniającym ciężar właściwy i prędkość przepływającego płynu oraz przyspieszenie siły ciężkości.

Zróżniczkujemy względem z funkcje (3.24) i (3.25). Wstawiając obliczone pochodne $a_1'(z)$ i $b_1'(z)$ do równań (3.21) i (3.23), otrzymujemy następujący układ dwóch równań, który powinien być spełniony dla każdego z :

$$(3.27) \quad \begin{aligned} & [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda a_0) + B_2 Y_1(\lambda a_0)] - \frac{a_0}{2} \lambda \eta [B_1 \cos(\lambda z) + A_1 \sin(\lambda z)] \times \\ & \times [A_2 I_0(\lambda a_0) + B_2 Y_0(\lambda a_0)] = 0, \\ & [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda b_0) + B_2 Y_1(\lambda b_0)] - \frac{b_0}{2} \lambda [B_1 \cos(\lambda z) + A_1 \sin(\lambda z)] \times \\ & \times [A_2 I_0(\lambda b_0) + B_2 Y_0(\lambda b_0)] = 0. \end{aligned}$$

Układ (3.27) spełniony dla każdego z , daje układ dwóch równań jednorodnych ze względu na stałe A_2 i B_2 , typowy dla problemu wartości własnych

$$(3.28) \quad \begin{aligned} & A_2 [I_1(\lambda a_0) - \frac{a_0}{2} \lambda \eta I_0(\lambda a_0)] + B_2 [Y_1(\lambda a_0) - \frac{a_0}{2} \lambda \eta Y_0(\lambda a_0)] = 0, \\ & A_2 [I_1(\lambda b_0) - \frac{b_0}{2} \lambda I_0(\lambda b_0)] + B_2 [Y_1(\lambda b_0) - \frac{b_0}{2} \lambda Y_0(\lambda b_0)] = 0. \end{aligned}$$

Warunek na istnienie rozwiązań niezerowych tego układu (zerowanie się wyznacznika głównego), daje równanie przestępne na wartości własne λ . Równocześnie określony jest więc kształt cylindra (równania (3.24) i (3.25)), który ulegnie zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium. Równanie to jest liniowe ze względu na parametr η . Może zatem być zapisane w postaci

$$(3.29) \quad \eta = 1 + \frac{Y_2(\lambda a_0)I_2(\lambda b_0) - I_2(\lambda a_0)Y_2(\lambda b_0)}{Y_0(\lambda a_0)I_2(\lambda b_0) - I_0(\lambda a_0)Y_2(\lambda b_0)},$$

gdzie I_2, Y_2 są funkcjami Bessela drugiego rzędu.

Zakładając, że w przekroju $z = 0$ naprężenie $\sigma_{r1} = 0$ (warunek zgodności naprężeń promieniowych dla cylindra pryzmatycznego), otrzymujemy $A_1 = 0$. Z drugiego równania układu (3.28) obliczamy

$$(3.30) \quad C_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{I_2(\lambda b_0)}{Y_2(\lambda b_0)}.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy pierwsze poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego jako następujące funkcje współrzędnej z :

$$(3.31) \quad \begin{aligned} a_1(z) &= \frac{\sqrt{3}}{2Q} a_0 C_1 \eta [I_0(\lambda a_0) + C_2 Y_0(\lambda a_0)] \sin(\lambda z), \\ b_1(z) &= \frac{\sqrt{3}}{2Q} b_0 C_1 [I_0(\lambda b_0) + C_2 Y_0(\lambda b_0)] \sin(\lambda z), \end{aligned}$$

gdzie $C_1 = B_1 A_2$ pozostaje do końca nieokreśloną stałą, spełniającą rolę parametru.

Pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia są ostatecznie następującymi funkcjami r i z :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1(r, z) = C_1 [I_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r)] \cos(\lambda z), \\ \sigma_1 &= \sigma_1(r, z) = -C_1 [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z). \end{aligned}$$

4. Zestawienie wzorów końcowych i przykład liczbowy

4.1. Wykorzystując wyniki uzyskane w p. 3.3, przedstawimy wyrażenia na promień zewnętrzny i wewnętrzny kształtowanego cylindra, który zostanie całkowicie uplastyczniony w stadium zniszczenia. Są to następujące funkcje z (z dokładnością do pierwszego przybliżenia):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a(z) &= a_0 + \bar{\alpha} a_0 \eta [I_0(\lambda a_0) + C_2 Y_0(\lambda a_0)] \sin(\lambda z) + \dots, \\ b(z) &= b_0 + \bar{\alpha} b_0 [I_0(\lambda b_0) + C_2 Y_0(\lambda b_0)] \sin(\lambda z) + \dots \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2Q} C_1 \alpha$$

jest nowym parametrem, charakteryzującym niepryzmatyczny kształt cylindra.

Składowe stanu naprężenia, z dokładnością do pierwszego przybliżenia, określone są następującymi funkcjami r i z .

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \ln \frac{r}{b_0} - \bar{\alpha} [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z) + \dots \right\}, \\
 \sigma_\theta(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right] - \bar{\alpha} [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z) \dots \right\}, \\
 \sigma_z(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\ln \frac{r}{b_0} + \frac{1}{2} \right] - \bar{\alpha} [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z) + \dots \right\}, \\
 \tau_{rz}(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \bar{\alpha} [I_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r)] \cos(\lambda z) + \dots \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Równania (4.1) mogą być wykorzystane po uprzednim wyliczeniu wartości własnej λ z równania (3.9), stałej całkowania C_2 z (3.20), oraz parametru $\bar{\alpha}$. Parametr $\bar{\alpha}$ powinien być wyznaczony z warunku zgodności średnic w przekrojach łączących przyrównane części cylindra z kształtowaną częścią nieprzyrównaną. Przyjmijmy, że stosunek promieni wewnętrznych cylindrów przyrównanych wynosi $k = a_\alpha/a_\beta$ (rys. 4) oraz że długość kształtowanego odcinka wyznaczona jest długością przedziału $-\pi/2 \leq z/a_0 \leq \pi/2$. Na granicach tego przedziału styczne do uzyskanych konturów są poziome, bowiem z równań (4.1) wynika, że dla $\frac{a_0}{z} = \pm \frac{\pi}{2}$, $\frac{da}{dz} = \frac{db}{dz} = 0$. Wyliczając z pierwszego z równań (4.1) promienie wewnętrzne kształtowanego odcinka dla $z/a_0 = \pm \pi/2$ oraz przyrównując ich stosunek do założonej wartości k , otrzymujemy następujący wzór na parametr $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \frac{1-k}{\eta(1+k)[I_0(\lambda a_0) + C_2 Y_0(\lambda a_0)] \sin\left(\frac{\pi}{2} \lambda a_0\right)}.
 \tag{4.4}$$

4.2. Zbadamy teraz kształt rurociągu, wykazującego pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia na konkretnym przykładzie liczbowym.

Przy projektowaniu rurociągów zwykle znane jest ciśnienie p_0 i prędkość v_0 przepływającego płynu w przekroju $z = 0$. Wielkość ciśnienia p_0 określa stosunek b_0/a_0 [wzór (3.9)]. Jedynie bowiem kształty odbiegające od przyrównanych o tak wyznaczonym stosunku ulegną całkowitemu uplastycznieniu. Dla ułatwienia obliczeń założymy $a_0 = 1$, $b_0 = 1,5$, co odpowiada ciśnieniu $p_0 = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln 1,5$.

Kształt rurociągu, czyli zmienne średnice w funkcji z , określiliśmy z wzorów (4.1). Wcześniej jednak należy wyznaczyć λ , C_2 oraz wartość parametru $\bar{\alpha}$. W celu wyznaczenia wartości własnej λ należy rozwiązać równanie (3.29) dla ustalonej prędkości v_0 czyli parametru η . Prędkość v_0 jest bowiem związana z parametrem η wyrażeniem (3.26). Ponieważ równanie (3.29) jest trudnym do rozwiązania równaniem przestępnym na λ , dla wygody rachunkowej przyjmijmy więc λ , wyliczając wielkość η (co odpowiada pewnej prędkości v_0 przepływającego płynu).

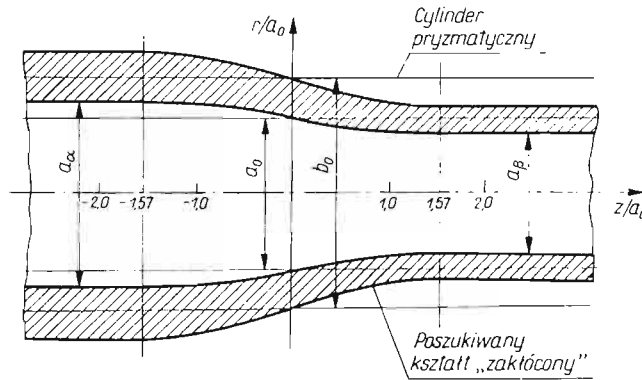
Mianowicie dla $\lambda = 1/a_0$, $\eta = 0,6239$ [z równania (3.29)] oraz

$$C_2 = -\frac{J_2(\lambda b_0)}{Y_2(\lambda b_0)} = 0,2490.$$

Dla powyższych danych, funkcje określające kształt cylindra z dokładnością do pierwszego przybliżenia mają następującą postać:

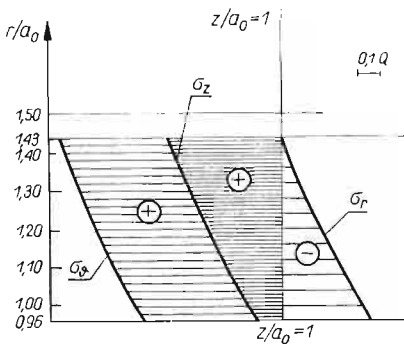
$$(4.5) \quad \begin{aligned} a(z) &= 1 + 0,4911\bar{\alpha}\sin z + \dots, \\ b(z) &= 1,5 + 0,9150\bar{\alpha}\sin z + \dots \end{aligned}$$

W dalszym ciągu przyjmujemy ujemną wartość parametru $\bar{\alpha}$, mianowicie $\bar{\alpha} = -0,4330$, co odpowiada stosunkowi średnic wewnętrznych cylindrów pryzmatycznych $k = a_\alpha/a_\beta = 1,5$. Znaleziony kształt dla powyższych danych zilustrowano na rys. 4.

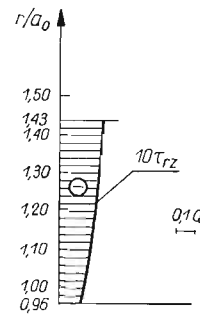


Rys. 4. Znaleziony kształt niepryzmatycznej części rurociągu

Rozkład naprężeń w ścianie znalezionej rurociągu określony jest wzorami (4.3). Dla omówionego powyżej przykładu zbadano szczegółowo wartości naprężeń w przekroju $z/a_0 = 1$. Na rys. 5 przedstawiono rozkład naprężeń promieniowych, obwodowych i poprzecznych, natomiast na rys. 6 podano dziesięciokrotnie powiększone naprężenia styczne.



Rys. 5. Rozkład naprężeń normalnych w przekroju $z/a_0 = 1$.



Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w przekroju $z/a_0 = 1$.

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels 1956, 5, 212—222.
2. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 15 (1957), 269—281.
3. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inż., 3, 18 (1970), 371—390.
4. Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 19 (1961), 127—135.
5. М. И. РЕЙТМАН, Г. С. ШАПИРО, *Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности*, Итоги Науки, Механика, Упругость и пластичность, 1964, Москва 1966.
6. С. Y. SHEU, W. PRAGER, *Recent developments in optimal structural design*, Appl. Mech. Reviews, 10, 21 (1968), 985—992.
7. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures* Appl. Mech. Rev., 6, 16 (1963), 341—350.

Резюме

ФОРМИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДА ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА, ПОЛНОСТЬЮ ПЕРЕХОДЯЩЕГО В СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Данная работа посвящена формированию непризматического трубопровода, т. е. трубопровода, диаметр которого изменяется вдоль горизонтальной оси, находящегося под действием переменного внутреннего давления.

Давление изменяется согласно уравнению Бернулли для идеальной жидкости.

Для нахождения оптимальной формы применен критерий полного перехода в пластическое состояние, т. е. удовлетворения условию пластичности в произвольной точке сечения трубопровода.

В предлагаемом методе компоненты напряжений и деформаций, а также функции $a(z)$ и $b(z)$, определяющие форму трубопровода, развернуты в ряды по малому параметру. Задача сводится к задаче о собственных значениях.

Краевые условия приводят в первом приближении к системе однородных уравнений для постоянных интегрирования.

Условия существования ненулевых решений для этой системы определяют форму тела.

Приведена сводка полученных формул и дан численный пример.

Summary

DESIGN OF A PIPE LINE OF A VARIABLE DIAMETER, EXHIBITING FULL PLASTIC YIELDING AT COLLAPSE

In the paper is discussed the design of a pipe line with diameter varying along its horizontal axis subject to variable internal pressure (Fig. 1). The pressure changes according to Bernoulli's theorem for ideal liquids [formula (2.1)]. The criterion of full yielding satisfying the plasticity condition (2.4) is used for the optimization of the pipe line form. In the method used the components of stress, strain and the functions $a(z)$ and $b(z)$ are expanded into series of a small parameter. The boundary conditions of the first approximation (3.7) and (3.8) yield the system of homogeneous equations for the constants of integration. The condition of existence of non-trivial solutions determines the form of the body.

Sec. 4 presents the full set of formulae derived and a numerical example.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1973 r.