MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 11 (1973)

OSOBLIWOŚĆ NAPRĘŻEŃ SIŁOWYCH I MOMENTOWYCH W CIELE MIKROPOLARNYM WYWOŁANA OBCIĄŻENIAMI SKUPIONYMI (I)

JANUSZ DYSZLEWICZ, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań w pracy będzie osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych w liniowym ośrodku mikropolarnym [1]. Rozpatrzymy półprzestrzeń sprężystą w płaskim stanie odkształcenia (zagadnienie statyczne bez uwzględnienia obciążeń masowych i temperatury) na brzegu której, w początku współrzędnych, działać będą skupione, ograniczone obciążenia.

Zagadnienie półprzestrzeni poddanej na brzegu rozłożonym obciążeniom nieciągłym rozpatrzone będzie w drugiej części pracy. Wnioski wynikające z rozpatrzenia tych zagadnień mogą być wykorzystane przy rozpatrywaniu problemów dotyczących koncentracji naprężeń w ciele mikropolarnym (np. zagadnienia szczelin, zagadnienia kontaktowe itp.)

Zagadnienia powyższe w ramach niesymetrycznej, liniowej teorii sprężystości dla ciała ze związanymi obrotami rozpatrzone są szczegółowo w pracach [2] i [3]. Wyczerpujące omówienie zagadnień prowadzących do koncentracji naprężeń w ciele ze związanymi obrotami wraz z podaniem literatury dotyczącej tych problemów znaleźć można w monograficznych pracach [4], [5] oraz w pracach [14÷17].

W pracy oprzemy się na następującym układzie związków opisujących deformację i stan naprężenia w ciele mikropolarnym zapisanym w prawoskrętnym kartezjańskim układzie współrzędnych x_i $(i = 1, 2, 3)$ [1].

Przemieszczeniowe równania równowagi:

$$
\begin{gathered}
(\mu+\alpha)u_{i,jj}+(\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji}+2\alpha\varepsilon_{ijk}\varphi_{k,j} = 0,\\
(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj}-4\alpha\varphi_i+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,ji}+2\alpha\varepsilon_{ijk}u_{k,j} = 0, \quad (i,j,k = 1,2,3),
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

gdzie λ, μ oznaczają stałe Lamégo, natomiast α, β, γ, ε są dodatkowymi stałymi materiałowymi. Funkcje u_i, φ_i są składowymi odpowiednio wektora przemieszczenia $\mathbf{u}$ i wektora obrotu $\boldsymbol{\varphi}$. Symbol ε_{ijk} oznacza alternator Levi-Civita.

Związki geometryczne:

$$
\gamma_{ji} = u_{i,j}-\varepsilon_{kji}\varphi_k, \qquad \varkappa_{ji} = \varphi_{i,j},
\tag{1.2}
$$

gdzie γ_{ji} jest niesymetrycznym tensorem odkształcenia, $\varkappa_{ji}$ — niesymetrycznym tensorem skrętno-giętnym.

Równania konstytutywne:

$$
(1.3)\qquad \begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij},\\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij}+\beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}, \end{aligned}
$$

gdzie σ_{ji} jest niesymetrycznym tensorem naprężeń siłowych, μ_{ji} — niesymetrycznym tensorem naprężeń momentowych i symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Warunki brzegowe

$$
(1.4)\qquad p_i = \sigma_{ji}n_j, \qquad m_i = \mu_{ji}n_j
$$

oznaczają, że na powierzchni ograniczającej ciało mikropolarne działają obciążenia w postaci siły **p** i momentu **m**. Ponadto n_j są tu składowymi jednostkowego wektora **n** normalnego do powierzchni ciała.

2. Płaski stan odkształcenia

W dalszym ciągu pracy interesować nas będzie zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia (a więc wszystkie przyczyny i skutki zależeć będą tylko od zmiennych x_1, x_2) reprezentowane przez wektory **u** i $\boldsymbol{\varphi}$ postaci [1]:

$$
(2.1)\qquad \mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \qquad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).
$$

W tym zagadnieniu stan deformacji opisują macierze

$$
(2.2)\qquad \gamma_{ji} \equiv \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varkappa_{ji} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varkappa_{13} \\ 0 & 0 & \varkappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},
$$

przy czym

$$
(2.2')\qquad \begin{aligned} &\gamma_{11} = \partial_1 u_1, \quad \gamma_{22} = \partial_2 u_2, \quad \gamma_{12} = \partial_1 u_2-\varphi_3,\\ &\gamma_{21} = \partial_2 u_1+\varphi_3, \quad \varkappa_{\alpha 3} = \partial_\alpha \varphi_3 \quad (\alpha = 1, 2). \end{aligned}
$$

Dla stanu naprężenia uzyskujemy wyrażenia

$$
(2.3)\qquad \sigma_{ji} \equiv \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \qquad \mu_{ji} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{32} & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix}.
$$

Równania równowagi (1.1) przyjmują teraz postać

$$
(2.4)\qquad \begin{aligned} &(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_1+(\lambda+\mu-\alpha)\partial_1 e+2\alpha\partial_2\varphi_3 = 0,\\ &(\mu+\alpha)\nabla_1^2 u_2+(\lambda+\mu-\alpha)\partial_2 e-2\alpha\partial_1\varphi_3 = 0,\\ &[(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\varphi_3+2\alpha(\partial_1 u_2-\partial_2 u_1) = 0. \end{aligned}
$$

Symbol ∇_1^2 oznacza dwuwymiarowy operator Laplace'a, natomiast e oznacza dylatację

$$
\nabla_1^2 = \partial_1^2+\partial_2^2, \qquad e = \partial_1 u_1+\partial_2 u_2.
$$

Składowe stanu naprężenia z (2.3) wyrażamy przez przemieszczenia u_1, u_2 i obrót φ_3 następująco:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (2\mu+\lambda)\partial_1 u_1+\lambda\partial_2 u_2,\\
\sigma_{22} &= (2\mu+\lambda)\partial_2 u_2+\lambda\partial_1 u_1,\\
\sigma_{12} &= (\mu+\alpha)\partial_1 u_2+(\mu-\alpha)\partial_2 u_1-2\alpha\varphi_3,\\
\sigma_{21} &= (\mu+\alpha)\partial_2 u_1+(u-\alpha)\partial_1 u_2+2\alpha\varphi_3
\end{aligned} \tag{2.5}$$

oraz

$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\partial_\alpha\varphi_3 \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{2.6}$$

Składowe σ_{33}, μ_{31} i μ_{32} wyznacza się ze wzorów

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}),\\
\mu_{3\alpha} &= \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{\alpha 3} \qquad (\alpha = 1, 2);
\end{aligned} \tag{2.7}$$

wzorów tych w dalszym ciągu pracy nie będziemy powtarzać.

3. Ogólne rozwiązanie równań równowagi (2.4) dla pólprzestrzeni $\{x_1 \geqslant 0, -\infty < x_2 < \infty\}$

W punkcie tym podamy ogólne rozwiązanie równań równowagi (2.4) dla półprzestrzeni będące sumą dwóch rozwiązań częściowych, z których jedno odpowiadać będzie zagadnieniu klasycznej teorii sprężystości, a drugie stanowić będzie rozwiązanie uzupełniające.

Rozwiązania częściowe wiązać się będą ze sobą poprzez warunki brzegowe. Wprowadźmy w tym celu wektor $\boldsymbol{\zeta}$ przy pomocy związku [6]

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}-\boldsymbol{\varphi}. \tag{3.1}$$

Dla rozpatrywanego zagadnienia płaskiego (2.1) podstawienie (3.1) prowadzi do zależności

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2-\partial_2 u_1)-\zeta_3. \tag{3.2}$$

Wprowadzając (3.2) do równań równowagi (2.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mu\nabla_1^2 u_1+(\lambda+\mu)\partial_1 e &= 2\alpha\partial_2\zeta_3,\\
\mu\nabla_1^2 u_2+(\lambda+\mu)\partial_2 e &= -2\alpha\partial_1\zeta_3,\\
\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2(\partial_1 u_2-\partial_2 u_1) &= [(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2-4\alpha]\zeta_3.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Rozwiązanie układu równań (3.3) przyjmujemy w postaci

$$u_1 = u_1'+u_1'', \qquad u_2 = u_2'+u_2'', \qquad \zeta_3 = \zeta_3'+\zeta_3''. \tag{3.4}$$

Podstawiając teraz (3.4) do (3.3) i przyjmując $\zeta_3' = 0$, widzimy, że (3.3) będzie spełnione, jeśli będą spełnione dwa układy równań

$$\begin{aligned}
&\mu\nabla_1^2 u_1'+(\lambda+\mu)\partial_1 e' = 0,\\
&\mu\nabla_1^2 u_2'+(\lambda+\mu)\partial_2 e' = 0,\\
&\nabla_1^2(\partial_1 u_2'-\partial_2 u_1') = 0, \qquad e' = \partial_1 u_1'+\partial_2 u_2'
\end{aligned} \tag{3.5}$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\mu \nabla_1^2 u_1'' + (\lambda+\mu)\partial_1 e'' = 2\alpha \partial_2 \zeta_3'', \\
(3.6) \qquad &\mu \nabla_1^2 u_2'' + (\lambda+\mu)\partial_2 e'' = -2\alpha \partial_1 \zeta_3'', \\
&\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2(\partial_1 u_2'' - \partial_2 u_1'') = [(\gamma+\varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha]\zeta_3'', \qquad e'' = \partial_1 u_1'' + \partial_2 u_2''.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że równanie $(3.5)_3$ można uzyskać z równań $(3.5)_{1,2}$, które są przemieszczeniowymi równaniami klasycznej elastostatyki (por. [7]). Z faktu, że $\zeta_3' = 0$ wynika zależność

$$
(3.7) \qquad \varphi_3' = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2' - \partial_2 u_1'),
$$

która jest również słuszna w klasycznej teorii sprężystości. Zależność (3.7) wraz z (2.6) pozwolą na wyznaczenie $u_{\alpha 3}'$ ze związku

$$
(3.8) \qquad \mu_{\alpha 3}' = (\gamma+\varepsilon)\partial \varphi_3' = \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\partial_\alpha(\partial_1 u_2' - \partial_2 u_1') \qquad (\alpha = 1, 2).
$$

Przejdźmy teraz do układu równań (3.6). Z dwóch pierwszych równań tego układu uzyskujemy równanie Laplace'a dla dylatacji

$$
(3.9) \qquad \nabla_1^2 e'' = 0,
$$

natomiast dla funkcji u_1'', u_2'', ζ_3'' uzyskujemy rozseparowane równania różniczkowe postaci

$$
(3.10) \qquad \nabla_1^2 \nabla_1^2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) u_1'' = 0,
$$

$$
(3.11) \qquad \nabla_1^2 \nabla_1^2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) u_2'' = 0,
$$

$$
(3.12) \qquad (l^2 \nabla_1^2 - 1)\zeta_3'' = 0,
$$

gdzie wielkość l^2 jest stałą i wynosi $l^2 = (\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)/4\alpha\mu$.

Wprowadźmy wykładniczą transformację Fouriera [8]

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}(x_1, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi x_2} dx_2, \\
(3.13) \qquad & \\
&f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x_1, \xi) e^{-i\xi x_2} d\xi.
\end{aligned}
$$

Wykonując transformację $(3.13)_1$ na równaniach (3.10) ÷ (3.12), otrzymujemy zwyczajne równania różniczkowe dla funkcji $\tilde{u}_1''$, $\tilde{u}_2''$, $\tilde{\zeta}_3''$,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2\right)^2 \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2\right)(\tilde{u}_1'', \tilde{u}_2'') = 0, \\
(3.14) \qquad & \\
&\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2\right)\tilde{\zeta}_3'' = 0, \qquad \varrho = \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie równań (3.14) dla półprzestrzeni przyjmujemy w postaci

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1'' &= (A_1''+B_1''|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+C_1''e^{-\varrho x_1}, \\
\tilde{u}_2'' &= (A_2''+B_2''|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+C_2''e^{-\varrho x_1}, \qquad (3.13)\\
\tilde{\zeta}_3'' &= b''e^{-\varrho x_1}.
\end{aligned}
$$

Aby spełnić przetransformowane równanie (3.9) oraz wyjściowe równania równowagi (3.6), uzależniamy wzory (3.15) tylko od trzech stałych (np. od A_1'', B_1'', C_1''),

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1'' &= (A_1''+B_1''|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+C_1''e^{-\varrho x_1}, \\
\tilde{u}_2'' &= \frac{i\xi}{|\xi|}\left(A_1''-\frac{3\mu+\lambda}{\lambda+\mu}B_1''+B_1''|\xi|x_1\right)e^{-|\xi|x_1}+\frac{i\varrho}{\xi}C_1''e^{-\varrho x_1}, \qquad (3.16)\\
\tilde{\zeta}_3'' &= \frac{i\mu}{2\alpha\xi}(\varrho^2-\xi^2)C_1''e^{-\varrho x_1}.
\end{aligned}
$$

Dla konkretnych zagadnień wielkości A_1'', B_1'', C_1'' wyznaczamy z trzech warunków brzegowych. Warunki te muszą być takie, aby w połączeniu z warunkami brzegowymi odnoszącymi się do równań klasycznej elastostatyki $(3.5)_{1,2}$ realizowały całość warunków brzegowych dla półprzestrzeni mikropolarnej.

4. Przypadek półprzestrzeni obciążonej rozłożonym obciążeniem normalnym

Rozpatrzmy półprzestrzeń mikropolarną $\{(x_1, x_2): x_1 \geqslant 0, -\infty < x_2 < \infty\}$ w płaskim stanie odkształcenia (2.1), na brzegu której (dla $x_1 = 0$) działa rozłożone obciążenie normalne $p(x_2)$ (zależne tylko od zmiennej x_2) skierowane zgodnie z osią Ox_1. Warunki brzegowe (1.4) przyjmują tu postać

$$
\sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0. \qquad (4.1)
$$

O funkcji $p(x_2)$ zakładamy, że jest bezwzględnie całkowalna w przedziale $(-\infty, +\infty)$ i przedziałami ciągła.

Założenia powyższe (z wyjątkiem warunków brzegowych) będą również odnosiły się do punktów 6, 8 i 10 pracy, czego wyraźnie podkreślać już nie będziemy.

Rozwiązanie klasyczne odpowiadające powyższemu problemowi (tzn. rozwiązanie równań $(3.5)_{1,2}$ z warunkami brzegowymi $\sigma_{11}'(0, x_2) = -p(x_2)$, $\sigma_{12}'(0, x_2) = 0$) ma postać [por. [7] s. 287]

dla przemieszczeń

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1' &= \frac{\tilde{p}(\xi)}{2\mu|\xi|}[|\xi|x_1+2(1-\nu)]e^{-|\xi|x_1}, \\
\tilde{u}_2' &= -\frac{i\tilde{p}(\xi)}{2\mu\xi}[(1-2\nu)-|\xi|x_1]e^{-|\xi|x_1}, \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

dla naprężeń

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{11}' &= -\tilde{p}(\xi)(1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}, \\
\tilde{\sigma}_{22}' &= -\tilde{p}(\xi)(1-|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}, \qquad (4.3)\\
\tilde{\sigma}_{12}' &= \tilde{\sigma}_{21}' = -\tilde{p}(\xi)i\xi x_1e^{-|\xi|x_1}.
\end{aligned}
$$

Wielkość $\tilde{\varphi}_3'$ wyznaczamy ze związków (3.7) i (4.2)

$$\tilde{\varphi}_3' = \frac{i\tilde{p}(\xi)}{\mu\xi}(1-\nu)|\xi|e^{-|\xi|x_1}. \tag{4.4}$$

W zależnościach (4.2)$\div$(4.4) $\nu = \lambda/2(\lambda+\mu)$.

«Primowane» składowe tensora naprężeń momentowych wyznaczamy ze związków (3.8) i (4.2) lub (4.4)

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{13}' &= -2i\xi a_0\tilde{p}(\xi)e^{-|\xi|x_1}, \\ \tilde{\mu}_{23}' &= 2a_0|\xi|\tilde{p}(\xi)e^{-|\xi|x_1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenie $a_0 = (\gamma+\varepsilon)(\lambda+2\mu)/4\mu(\lambda+\mu)$.

Przejdźmy do układu równań (3.6). Odpowiednie warunki brzegowe mają postać

$$\sigma_{11}''(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}''(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}''(0, x_2) = 2a_0\frac{dp}{dx_2}(x_2). \tag{4.6}$$

Ogólne rozwiązanie tego układu równań dla półprzestrzeni przedstawiliśmy wzorami (3.16). Stałe A_1'', B_1'', C_1'' wyznaczymy spełniając warunki (4.6). Ponieważ naprężenia z dwiema kreskami wyrażają się poprzez funkcje u_1'', u_2'', φ_3'', jak w związkach (2.5) i (2.6), należy zatem do zależności $(2.5)_{1,3}$ i (2.6) (dla $\alpha = 1$) podstawić związek

$$\varphi_3'' = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2'' - \partial_2 u_1'') - \zeta_3'' \tag{4.7}$$

i następnie spełnić warunki brzegowe (4.6)

Po zastosowaniu transformacji $(3.13)_1$ otrzymujemy algebraiczny układ trzech równań z niewiadomymi A_1'', B_1'', C_1'',

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}''(0, \xi) &= \left.(2\mu+\lambda)\frac{d\tilde{u}_1''}{dx_1} - i\xi\lambda\tilde{u}_2''\right|_{x_1=0} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{12}''(0, \xi) &= \left.\mu\left(\frac{d\tilde{u}_2''}{dx_1} - i\xi\tilde{u}_1''\right) + 2\alpha\tilde{\zeta}_3''\right|_{x_1=0} = 0, \\ \tilde{\mu}_{13}''(0, \xi) &= \left.\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\left[\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\tilde{u}_2''}{dx_1} + i\xi\tilde{u}_1''\right) - 2\frac{d\tilde{\zeta}_3''}{dx_1}\right]\right|_{x_1=0} = 2ia_0\xi\tilde{p}(\xi), \end{aligned} \tag{4.8}$$

po rozwiązaniu którego uzyskujemy

$$\begin{aligned} A_1'' &= \left[\left(1 - \frac{\varrho}{|\xi|}\right)\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} - 1\right]C_1'', \\ B_1'' &= \left(1 - \frac{\varrho}{|\xi|}\right)C_1'', \\ C_1'' &= \frac{a_0}{\mu}\frac{\xi^2}{\varrho}\frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0(\xi)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tu

$$\Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0\xi^2\left(1 - \frac{|\xi|}{\varrho}\right), \qquad \tilde{p} \equiv \tilde{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(x_2)e^{i\xi x_2}dx_2.$$

Podstawiając (4.9) do wzorów $(3.16)_{1,2}$ otrzymujemy

$$
(4.10)\quad
\begin{aligned}
\tilde{u}_1'' &= \frac{1}{2\mu}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{|\xi|}+x_1\right)e^{-|\xi|x_1}+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-|\xi|x_1})\right\},\\
\tilde{u}_2'' &= \frac{i}{2\mu}\frac{\xi}{|\xi|}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{|\xi|}+x_1\right)e^{-|\xi|x_1}+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{|\xi|}e^{-\varrho x_1}-e^{-|\xi|x_1}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Wielkość φ_3'' uzyskujemy ze związku (4.7) wykonując na nim transformację $(3.13)_1$ i wykorzystując zależności $(3.16)_3$, $(4.9)_3$ i (4.10)

$$
(4.11)\quad \tilde{\varphi}_3'' = \frac{i(2\mu+\lambda)}{2\mu(\lambda+\mu)}\frac{\xi}{|\xi|}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right].
$$

Odpowiadający przemieszczeniom u_1'', u_2'' i obrotowi φ_3'' stan naprężenia wyznaczamy z przetransformowanych związków (2.5) i (2.6), wykorzystując (4.10) i (4.11)

$$
(4.12)\quad
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{11}'' &= -\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\right)\right],\\
\tilde{\sigma}_{22}'' &= \frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\right)\right],\\
\tilde{\sigma}_{12}'' &= -\frac{i\xi}{|\xi|}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(|\xi|x_1e^{-|\xi|x_1}+2a_0\xi^2\frac{|\xi|}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-|\xi|x_1})\right],\\
\tilde{\sigma}_{21}'' &= -\frac{i\xi}{|\xi|}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)|\xi|x_1e^{-|\xi|x_1}+2a_0\xi^2\frac{|\xi|}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\varrho x_1}-e^{-|\xi|x_1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

oraz

$$
(4.13)\quad
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{13}'' &= -2ia_0\xi\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1}-e^{-\varrho x_1}],\\
\tilde{\mu}_{23}'' &= 2a_0|\xi|\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right].
\end{aligned}
$$

Dla uzyskania całkowej, rzeczywistej postaci składowych wektora przemieszczenia i obrotu oraz dla składowych tensora naprężeń siłowych i momentowych, rozdzielamy funkcję obciążenia $p(x_2)$ na część symetryczną $p_s(x_2)$ i część antysymetryczną $p_a(x_2)$ względem osi Ox_1. Wówczas mamy

$$
(4.14)\quad \tilde{p}(\xi) = \tilde{p}_s(\xi)+i\tilde{p}_a(\xi),
$$

gdzie

$$
(4.14)'\quad
\begin{aligned}
\tilde{p}_s &\equiv \tilde{p}_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p_s(x_2)\cos(\xi x_2)dx_2,\\
\tilde{p}_a &\equiv \tilde{p}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p_a(x_2)\sin(\xi x_2)dx_2.
\end{aligned}
$$

Uwzględniając (4.14) oraz stosując twierdzenie o odwracaniu transformacji Fouriera $(3.13)_2$, uzyskujemy ze wzorów (4.2) i (4.4) «primowane» przemieszczenia i obrót

$$
\begin{aligned}
u_1' &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [2(1-\nu)+\xi x_1] e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2)\, d\xi, \\
u_2' &= -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [(1-2\nu)-\xi x_1] e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2)\, d\xi, \qquad (4.15) \\
\varphi_3' &= \frac{2}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1-\nu) e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2)\, d\xi,
\end{aligned}
$$

przy oznaczeniach

$$
\begin{aligned}
a(\xi, x_2) &= \tilde{p}_s \cos(\xi x_2) + \tilde{p}_a \sin(\xi x_2), \\
b(\xi, x_2) &= \tilde{p}_s \sin(\xi x_2) - \tilde{p}_a \cos(\xi x_2). \qquad (4.15)'
\end{aligned}
$$

Natomiast ze wzorów (4.3) i (4.5) uzyskujemy «primowane» naprężenia

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}' &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2)\, d\xi, \\
\sigma_{22}' &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1-\xi x_1) e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2)\, d\xi, \qquad (4.16) \\
\sigma_{12}' = \sigma_{21}' &= -\frac{2x_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2)\, d\xi
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\mu_{13}' &= -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2)\, d\xi, \\
\mu_{23}' &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2)\, d\xi. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Funkcje u_1'', u_2'', φ_3'' otrzymujemy ze wzorów (4.10) i (4.11)

$$
(4.18) \qquad u_1'' = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left\{ (1-\Delta_0)\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi} + x_1\right) e^{-\xi x_1} + \right.
$$
$$
\left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} (e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right\} a(\xi, x_2)\, d\xi,
$$

(4.18) [c.d.]

$$u_2'' = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left(-\frac{\mu}{\lambda+u}\frac{1}{\xi}+x_1\right)e^{-\xi x_1}+ \right.$$

$$\left. + \frac{2a_0\xi^2}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\xi}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right\}b(\xi, x_2)\,d\xi,$$

$$\varphi_3'' = \frac{(2\mu+\lambda)}{\mu(\lambda+\mu)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]b(\xi, x_2)\,d\xi.$$

Składowe naprężeń z «dwiema kreskami» w postaci całkowej uzyskujemy ze wzorów (4.12) i (4.13)

(4.19)

$$\sigma_{11}'' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+ \right.$$

$$\left. +2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]a(\xi, x_2)\,d\xi,$$

$$\sigma_{22}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+ \right.$$

$$\left. +2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]a(\xi, x_2)\,d\xi,$$

$$\sigma_{12}'' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+ \right.$$

$$\left. +2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]b(\xi, x_2)\,d\xi,$$

$$\sigma_{21}'' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+ \right.$$

$$\left. +2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]b(\xi, x_2)\,d\xi$$

oraz

(4.20)

$$\mu_{13}'' = -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-e^{-\rho x_1}]b(\xi, x_2)\,d\xi,$$

$$\mu_{23}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\rho x_1}\right]a(\xi, x_2)\,d\xi.$$

Końcowy wynik dla przemieszczeń i obrotu uzyskujemy sumując wzory (4.15) i (4.18):

(4.21) $$u_\alpha = u_\alpha' + u_\alpha'', \quad \varphi_3 = \varphi_3' + \varphi_3'' \quad (\alpha = 1, 2).$$

Natomiast stan naprężenia w półprzestrzeni uzyskujemy dodając odpowiednio wzory (4.16) i (4.19) oraz (4.17) i (4.20):

$$(4.22)\quad \begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta}+\sigma''_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{33} = \sigma'_{33}+\sigma''_{33} \quad (\alpha, \beta = 1, 2),\\ &\mu_{\alpha 3} = \mu'_{3}+\mu''_{\alpha 3}, \quad \mu_{3\alpha} = \mu'_{3\iota}+\mu''_{3\alpha} \quad (\alpha = 1, 2). \end{aligned}$$

Stan odkształcenia wyznaczamy ze wzorów (2.2)′ przy użyciu (4.21).

Można zauważyć, że jeżeli przejdziemy ze stałą materiałową α do granicy ($\alpha \to 0$), to zachodzi $\varrho \to |\xi|$, $\Delta_0 \to 1$ i wówczas mamy

$$(4.23)\quad \begin{aligned} &u''_{\alpha} \to 0, \quad \varphi''_3 \to 0 \quad (\alpha = 1, 2),\\ &\sigma''_{\alpha\beta} \to 0, \quad \sigma''_{33} \to 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2),\\ &\mu_{\alpha 3} \to 0, \quad \mu_{3\alpha} \to 0 \quad (\alpha = 1, 2). \end{aligned}$$

Widać więc, że przejście $\alpha \to 0$ prowadzi do rozwiązania klasycznej teorii sprężystości (wzory $(4.15)_{1,2}$ i (4.16)).

W pracy [9] płaskie zagadnienie niesymetrycznej sprężystości (2.1) rozwiązuje się poprzez wprowadzenie potencjałów sprężystych. Rezultat uzyskany w naszej pracy zgodny jest z wynikami uzyskanymi dla zagadnienia półprzestrzeni w wyżej cytowanej pracy.

5. Osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych spowodowana normalną siłą skupioną

Rozpatrzmy przypadek szczególny obciążenia $p(x_2)$ z poprzedniego punktu pracy. Przyjmujemy, że w początku układu współrzędnych działa normalna siła skupiona postaci

$$(5.1)\quad p(x_2) = P\delta(x_2).$$

Tu symbol $\delta(\ldots)$ oznacza pseudofunkcję Diraca.

Podstawiając (5.1) do związków (4.14′) otrzymujemy

$$(5.2)\quad \begin{aligned} &\tilde{p}_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P\delta(x_2)\cos(\xi x_2)\,dx_2 = \frac{P}{\sqrt{2\pi}},\\ &\tilde{p}_a = 0. \end{aligned}$$

Oznaczenia (4.15′) mają teraz postać

$$(5.2')\quad \begin{aligned} &a(\xi, x_2) = \tilde{p}_s\cos(\xi, x_2) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}}\cos(\xi, x_2),\\ &b(\xi, x_2) = \tilde{p}_s\sin(\xi, x_2) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}}\sin(\xi, x_2). \end{aligned}$$

Zakładając, że pozostałe warunki na brzegu półprzestrzeni nie ulegają zmianie (tzn. $\sigma_{12} = \mu_{13} = 0$ dla $x_1 = 0$), możemy rozwiązanie dla stanu naprężenia otrzymane w punkcie 4 wykorzystać tu uwzględniając związki (5.2′).

Dla primowanych składowych naprężeń z (4.16) i (4.17) mamy

(5.3)
$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty (1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma'_{22} &= -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty (1-\xi x_1)e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = -\frac{Px_1}{\pi}\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi
\end{aligned}
$$

oraz

(5.4)
$$
\begin{aligned}
\mu'_{13} &= -\frac{2a_0 P}{\pi}\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi,\\
\mu'_{23} &= \frac{2a_0 P}{\pi}\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi.
\end{aligned}
$$

Ze wzorów (4.19) i (4.20) uzyskujemy składowe naprężeń z dwiema kreskami

(5.5)
$$
\begin{aligned}
\sigma''_{11} &= -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\Big[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+\\
&\qquad +2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\Big]\cos(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma''_{22} &= \frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\Big[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+\\
&\qquad +2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\Big]\cos(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma''_{12} &= -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]\sin(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma''_{21} &= -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]\sin(\xi x_2)d\xi
\end{aligned}
$$

oraz

(5.6)
$$
\begin{aligned}
\mu''_{13} &= -\frac{2a_0 P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-e^{-\varrho x_1}]\sin(\xi, x_2)d\xi,\\
\mu''_{23} &= \frac{2a_0 P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]\cos(\xi, x_2)d\xi.
\end{aligned}
$$

Wzory (5.3) ostatecznie możemy zapisać w postaci zamkniętej [por. [7] str. 288]

$$
(5.7) \qquad
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{x_1^3}{(x_1^2+x_2^2)^2},\\
\sigma'_{22} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\\
\sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Również całki występujące we wzorach (5.4) można efektywnie wyliczyć i wówczas uzyskujemy z [10] wzory

$$
(5.8) \qquad
\begin{aligned}
\mu'_{13} &= -\frac{4a_0 P}{\pi}\frac{x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\\
\mu'_{23} &= \frac{2a_0 P}{\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Całki występujące we wzorach (5.5) i (5.6) są dobrze zbieżne w całej półpłaszczyźnie $\{(x_1, x_2): x_1 \geqslant 0, \quad -\infty < x_2 < \infty\}$ poza punktem przyłożenia siły skupionej P, a więc z wyjątkiem początku układu współrzędnych. Ich osobliwości zależą od zachowania się funkcji podcałkowych w punkcie $(0, 0; \xi)$ przy $\xi \to \infty$, mianowicie od tych części funkcji podcałkowych, które przy $x_1 = x_2 = 0$ i przy $\xi \to \infty$ są rzędu $0(\xi^{-1})$ lub większego [por. prace [2÷4, [8]].

W celu wyznaczenia charakteru osobliwości całek (5.5) i (5.6) wykorzystamy następujące rozwinięcie asymptotyczne

$$
(5.9) \qquad \varrho = \sqrt{\xi^2+\frac{1}{l^2}} = \xi+\frac{1}{2\xi l^2}+0(\xi^{-3}) \quad \text{dla} \quad \xi \to \infty.
$$

Korzystając z (5.9) otrzymamy

$$
(5.10) \qquad
\begin{aligned}
\Delta_0(\xi) &\equiv 1+2a_0\xi^2\left(1-\frac{\xi}{\varrho}\right) = 1+\frac{a_0}{l^2}+0(\xi^{-2}) \quad \text{dla} \quad \xi \to \infty,\\
e^{-\varrho x} &= e^{-\xi x_1}\left[1-\frac{x_1}{2\xi l^2}+\frac{x_1^2}{8\xi^2 l^2}+\frac{6l^2 x_1-x_1^3}{48 l^3 \xi^3}+0(\xi^{-4})\right] \quad \text{dla} \quad \xi \to \infty.
\end{aligned}
$$

We wzorach (5.9) i (5.10) symbol $0(\xi^{-n})$ oznacza wyrażenie, które przy $\xi \to \infty$ zachowuje się jak funkcja $\frac{1}{\xi^n}$ (n — liczba naturalna). Wykorzystując rozwinięcia (5.9), (5.10) i obliczając *explicite* część osobliwą całek (5.5) i (5.6) oraz oznaczając przez $0(1)$ ich część regularną, otrzymujemy

$$
(5.11) \qquad
\begin{aligned}
\sigma''_{11} &= \frac{2P}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma''_{22} &= \frac{2P}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{2x_1^3}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma''_{12} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{2x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma''_{21} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\frac{x_2(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1)
\end{aligned}
$$

oraz

$$\tag{5.12}\begin{aligned}\mu''_{13} &= \frac{2a_0P}{\pi}\frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\ \mu''_{23} &= -\frac{2a_0P}{\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}-\frac{P}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\log\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+0(1).\end{aligned}$$

Poniżej zestawiamy całki wykorzystane do otrzymania wzorów (5.11) i (5.12) oraz całki, które będziemy wykorzystywać w dalszych częściach pracy [10]:

$$\tag{5.12'}\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi = \frac{x_1}{r^2},\\ &\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi = \frac{x_1^2-x_2^2}{r^4},\\ &\int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi = \frac{2x_1(x_1^2-3x_2^2)}{r^6},\\ &\int_1^\infty \xi^{-1} e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)\,d\xi = -\log r+0(1), \qquad r\to 0\end{aligned}$$

oraz

$$\tag{5.12''}\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi = \frac{x_2}{r^2},\\ &\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi = \frac{2x_1x_2}{r^4},\\ &\int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi = \frac{2x_2(3x_1^2-x_2^2)}{r^6},\\ &\int_0^\infty \xi^{-1} e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi = \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1},\\ &-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} < \frac{\pi}{2}, \qquad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2}.\end{aligned}$$

Zestawiając wzory (5.7) z (5.11) oraz (5.8) z (5.12) można zauważyć, że w punkcie przyłożenia siły P składowe tensora naprężeń siłowych posiadają osobliwość postaci $0(r^{-1})$. Natomiast składowe tensora naprężeń momentowych zachowują się inaczej: μ_{13} i μ_{31} posiada wartość skończoną $0(1)$, a μ_{23} i μ_{32} posiada osobliwość logarytmiczną0 $(\log r)$:

$$\tag{5.13}\begin{aligned}\mu_{13} &= 0(1),\\ \mu_{23} &= -\frac{\varrho}{\pi}\frac{a_0}{a_0+l^2}\log\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+0(1).\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy ze stałą materiałową $\alpha(\alpha \to 0)$, uzyskujemy

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a_0}{a_0+l^2} = 0, \tag{5.14}$$

co prowadzi do rozwiązania klasycznego danego wzorami (5.7), ponieważ składowe naprężeń z (5.11) i składowe naprężeń z (5.13) dążą do zera. Dla przykładu, gdy $\alpha \to \infty$ otrzymujemy

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_0}{a_0+l^2} = \frac{2(1-\nu)}{3-2\nu}, \tag{5.15}$$

gdzie ν jest stałą Poissona.

Przechodząc we wzorach (5.7), (5.8) i (5.11), (5.12) do granicy, gdy $\alpha \to \infty$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{1}{3-2\nu}\frac{x_1[x_1^2+2(1-\nu)x_2^2]}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma_{22} &= \frac{2P}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\frac{x_1x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma_{12} &= \frac{2P}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\frac{x_1^2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma_{21} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{1}{3-2\nu}\frac{x_2[x_1^2+2(1-\nu)x_2^2]}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mu_{13} &= 0(1),\\
\mu_{23} &= -\frac{2P}{\pi}\frac{1-\nu}{3-2\nu}\log\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+0(1).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Jest to wynik dla niesymetrycznej teorii sprężystości ośrodka ze związanymi obrotami [por. [2], [4]].

6. Półprzestrzeń poddana rozłożonym obciążeniom stycznym

Rozpatrzmy zagadnienie półprzestrzeni z warunkami brzegowymi postaci

$$\sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = -s(x_2), \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0. \tag{6.1}$$

Rozwiązanie «primowane», tzn. rozwiązanie równań $(3.5)_{1,2}$ z warunkami brzegowymi

$$\sigma'_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma'_{12}(0, x_2) = -s(x_2) \tag{6.2}$$

ma postać [por. [7] str. 290]:

dla przemieszczeń

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'_1 &= \frac{i\tilde{s}(\xi)}{2\mu\xi}[(1-2\nu)+|\xi|x_1]e^{-|\xi|x_1},\\
\tilde{u}'_2 &= \frac{\tilde{s}(\xi)}{2\mu|\xi|}[2(1-\nu)-|\xi|x_1]e^{-|\xi|x_1};
\end{aligned} \tag{6.3}$$

dla naprężeń

$$
(6.4)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}'_{11} &= -i\xi\tilde{s}(\xi)x_1 e^{-|\xi|x_1},\\
\tilde{\sigma}'_{22} &= -\frac{i\xi}{|\xi|}\tilde{s}(\xi)(2-|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1},\\
\tilde{\sigma}'_{12} = \tilde{\sigma}'_{21} &= -\tilde{s}(\xi)(1-|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}.
\end{aligned}
$$

Na podstawie związku (3.7) i (6.3) wyznaczamy

$$
(6.5)\qquad \tilde{\varphi}'_3 = -\frac{\tilde{s}(\xi)}{\mu}(1-\nu)e^{-|\xi|x_1}.
$$

Wykorzystując powyższy wzór i związki (3.8) mamy

$$
(6.6)\qquad
\begin{aligned}
\tilde{\mu}'_{13} &= 2a_0|\xi|\tilde{s}(\xi)e^{-|\xi|x_1},\\
\tilde{\mu}'_{23} &= 2ia_0\xi\tilde{s}(\xi)e^{-|\xi|x_1}.
\end{aligned}
$$

Drugą część rozwiązania (z dwiema kreskami) uzyskamy rozwiązując układ równań (3.6) z warunkami brzegowymi postaci

$$
(6.7)\qquad \sigma''_{11}(0,x_2) = 0, \quad \sigma''_{12}(0,x_2) = 0, \quad \mu''_{13}(0,x_2) = -\mu'_{13}(0,x_2).
$$

Zauważmy jednak, że tego typu pomocniczy problem brzegowy rozwiązaliśmy w punkcie 4 pracy. Zatem wyniki dla rozwiązania z dwiema kreskami należące do zagadnienia z tego punktu uzyskujemy ze wzorów (4.10), (4.11), (4.12) i (4.13), podstawiając w nich

$$
(6.8)\qquad \tilde{p}(\xi) = \frac{i|\xi|}{\xi}\tilde{s}(\xi).
$$

Ostatecznie przemieszczenia, obrót i stan naprężenia w półprzestrzeni uzyskujemy zestawiając rozwiązania częściowe jak we wzorach (4.21) i (4.22). W tym przypadku dla przejścia granicznego ($\alpha \to 0$) również zachodzą zależności (4.23) i otrzymujemy rezultat klasyczny (wzory (6.3) i (6.4)).

Przejdźmy do całkowej rzeczywistej postaci rozwiązania. W tym celu, podobnie jak w punkcie 4, rozkładamy obciążenie na część symetryczną i antysymetryczną względem osi Qx_1

$$
(6.9)\qquad \tilde{s}(\xi) = \tilde{s}_s(\xi)+i\tilde{s}_a(\xi),
$$

gdzie

$$
(6.9')\qquad
\begin{aligned}
\tilde{s}_s \equiv \tilde{s}_s(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}_s(x_2)\cos(\xi x_2)d\xi,\\
\tilde{s}_a \equiv \tilde{s}_a(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}_a(x_2)\sin(\xi x_2)d\xi.
\end{aligned}
$$

Wykonując odwrotną transformację $(3.13)_2$ i uwzględniając (6.9) rozwiązanie zapisujemy ostatecznie w postaci następującej:

ze wzorów (6.3), (6.5) otrzymujemy

$$u_1' = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi}[(1-2\nu)+\xi x_1]e^{-\xi x_1}b(\xi, x_2)d\xi,$$

(6.10) $$u_2' = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi}[2(1-\nu)-\xi x_1)]e^{-\xi x_1}a(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\varphi_3' = -\frac{2(1-\nu)}{\mu\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi x_1}a(\xi, x_2)d\xi,$$

gdzie

(6.10') $$\begin{aligned} a(\xi, x_2) &= \tilde{s}_s\cos(\xi x_2)+\tilde{s}_a\sin(\xi x_2),\\ b(\xi, x_2) &= \tilde{s}_s\sin(\xi, x_2)-\tilde{s}_a\cos(\xi x_2);\end{aligned}$$

ze wzorów (6.4), (6.6) otrzymujemy

$$\sigma_{11}' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \xi x_1 e^{-\xi x_1}b(\xi, x_2)d\xi,$$

(6.11) $$\sigma_{22}' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty (2-\xi x_1)e^{-\xi x_1}b(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{12}' = \sigma_{21}' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty (1-\xi x_1)e^{-\xi x_1}a(\xi, x_2)d\xi$$

oraz

(6.12) $$\begin{aligned} \mu_{13}' &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}a(\xi, x_2)d\xi,\\ \mu_{23}' &= -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}b(\xi, x_2)d\xi;\end{aligned}$$

ze wzorów (4.10), (4.11) i (6.8) otrzymujemy

(6.13) $$u_1'' = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left[\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right]e^{-\xi x_1}+\right.$$
$$\left.+2a_0\frac{\xi^2}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1})\right\}b(\xi, x_2)d\xi,$$

(6.13) [c.d.]
$$u_2'' = -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left[-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+x_1\right]e^{-\xi x_1}+ +2a_0\frac{\xi^2}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\xi}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right\}a(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\varphi_3'' = -\frac{(2\mu+\lambda)}{\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]a(\xi, x_2)d\xi.$$

Ze wzorów (4.12), (4.13) i (6.8) otrzymujemy

(6.14)
$$\sigma_{11}'' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+ +2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]b(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{22}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+ +2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]b(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{12}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi^2}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]a(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{21}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]a(\xi, x_2)d\xi$$

oraz

(6.15)
$$\mu_{13}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-e^{-\varrho x_1}]a(\xi, x_2)d\xi,$$

$$\mu_{23}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]b(\xi, x_2)d\xi.$$

7. Osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych spowodowana styczną siłą skupioną

Kolejny szczególny sposób obciążenia półprzestrzeni dotyczy przypadku działania w początku układu współrzędnych stycznej siły skupionej

(7.1) $$s(x_2) = S\delta(x_2).$$

Wobec (7.1) wzory (6.9') i oznaczenia (6.10') przyjmują postać

(7.2)
$$\tilde{s}_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty S\delta(x_2)\cos(\xi x_2)dx_2 = \frac{S}{\sqrt{2\pi}},$$
$$\tilde{s}_a = 0$$

oraz

(7.2')
$$a(\xi, x_2) = \tilde{S}_s\cos(\xi x_2) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\cos(\xi x_2),$$
$$b(\xi, x_2) = \tilde{S}_s\sin(\xi x_2) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\sin(\xi x_2).$$

Podstawiając związki (7.2) i (7.2') do wzorów (6.11) i (6.12) wyznaczamy primowane naprężenia

(7.3)
$$\sigma'_{11} = \frac{S}{\pi}\int_0^\infty \xi x_1 e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma'_{22} = -\frac{S}{\pi}\int_0^\infty (2-\xi x_1)e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma'_{12} = \sigma'_{21} = -\frac{S}{\pi}\int_0^\infty (1-\xi x_1)e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi$$

oraz

(7.4)
$$\mu'_{13} = \frac{2a_0 S}{\pi}\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi,$$
$$\mu'_{23} = \frac{2a_0 S}{\pi}\int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi.$$

Wzory (7.3) i (7.4) przy pomocy całek (5.12') i (5.12'') przedstawimy w postaci zamkniętej (por. [7]).

(7.5)
$$\sigma'_{11} = -\frac{2S}{\pi}\frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2},$$
$$\sigma'_{22} = -\frac{2S}{\pi}\frac{x_1^3}{(x_1^2+x_2^2)^2},$$
$$\sigma'_{12} = \sigma'_{21} = -\frac{2S}{\pi}\frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

oraz

(7.6)
$$\mu'_{13} = \frac{2a_0 S}{\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2},$$
$$\mu'_{23} = -\frac{2a_0 S}{\pi}\frac{2x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Naprężenia z dwiema kreskami otrzymujemy ze wzorów (6.14), (6.15) oraz (7.2) i (7.2'):

(7.7)
$$\sigma''_{11} = -\frac{S}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]\sin(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma''_{22} = \frac{S}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]\sin(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma''_{12} = \frac{S}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]\cos(\xi x_2)d\xi,$$
$$\sigma''_{21} = \frac{S}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]\cos(\xi x_2)d\xi$$

oraz

(7.8)
$$\mu''_{13} = -\frac{2a_0S}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-e^{-\varrho x_1}]\cos(\xi x_2)d\xi,$$
$$\mu''_{23} = \frac{2a_0S}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]\sin(\xi x_2)d\xi.$$

Dyskusja wzorów (7.7) i (7.8) dotycząca charakteru osobliwości całek w nich występujących jest taka sama jak dla wzorów (5.5) i (5.6) w punkcie 5 pracy. Wykorzystując zatem wzory asymptotyczne (5.9), (5.10) oraz całki (5.12'), (5.12''), otrzymujemy

(7.9)
$$\sigma''_{11} = \frac{2S}{\pi}\frac{a_0}{l^2+a_0}\frac{2x_1^2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),$$
$$\sigma''_{22} = \frac{2S}{\pi}\frac{a_0}{l^2+a_0}\frac{x_2(x_2^2-x_1^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),$$
$$\sigma''_{12} = \frac{2S}{\pi}\frac{a_0}{l^2+a_0}\frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),$$
$$\sigma''_{21} = \frac{2S}{\pi}\frac{a_0}{l^2+a_0}\frac{2x_1x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1)$$

oraz

(7.10)
$$\mu''_{13} = -\frac{2a_0S}{\pi}\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),$$
$$\mu''_{23} = -\frac{2a_0S}{\pi}\frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1).$$

Sumując odpowiednio wzory (7.5) z (7.7) i wzory (7.6) z (7.10) można zauważyć, że szukany charakter osobliwości naprężeń w punkcie przyłożenia siły S jest rzędu $0(r^{-1})$ dla naprężeń siłowych, naprężenia zaś momentowe $\mu_{\alpha 3}$, $\mu_{3\alpha}$, $(\alpha = 1, 2)$ posiadają wartość skończoną

$$\mu_{\alpha 3} = 0(1) \quad (\alpha = 1, 2). \tag{7.11}$$

Dla przejścia granicznego $(\alpha \to 0)$ ważny jest wzór (5.14). Naprężenia we wzorach (7.9) i (7.11) dążą do zera. Pozostaje tylko rozwiązanie klasyczne dane wzorami (7.5).

Dla przykładu, gdy $\alpha \to \infty$ ze wzorów (7.5) i (7.9) oraz (7.11) po uwzględnieniu przejścia granicznego (5.15) otrzymujemy wynik z niesymetrycznej teorii sprężystości dla ośrodka ze związanymi obrotami

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{2S}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma_{22} &= \frac{2S}{\pi}\frac{1}{3-2\nu}\frac{x_2[2(1-\nu)x_1^2+x_2^2]}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma_{12} &= \frac{2S}{\pi}\frac{1}{3-2\nu}\frac{x_1[2(1-\nu)x_1^2+x_2^2]}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\sigma_{21} &= -\frac{2S}{\pi}\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

oraz

$$\mu_{\alpha 3} = 0(1) \quad (\alpha = 1, 2). \tag{7.13}$$

8. Półprzestrzeń pod działaniem rozłożonych obciążeń momentowych $m(x_2)$

W punkcie tym podamy rozwiązanie dla przypadku półprzestrzeni obciążonej rozłożonym obciążeniem momentowym

$$\sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = -m(x_2). \tag{8.1}$$

Zagadnienie klasyczne odpowiadające powyższemu zagadnieniu prowadzi do jednorodnego układu równań równowagi $(3.5)_{1,2}$ z jednorodnymi warunkami na brzegu $[\sigma'_{11}(0, x_2) = 0,\ \sigma'_{12}(0, x_2) = 0]$, z czego wnioskujemy, że możemy przyjąć

$$\begin{aligned}
&u'_\alpha \equiv 0, \quad \varphi'_3 \equiv 0 \quad (\alpha = 1, 2).\\
&\sigma'_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \sigma'_{33} \equiv 0, \quad \mu'_{\alpha 3} \equiv 0, \quad \mu'_{3\alpha} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Ostateczny rezultat (w postaci transformat) dla tego przypadku uzyskamy więc (wobec (8.2)) ze wzorów (4.10) i (4.11) dla przemieszczeń i obrotu oraz ze wzorów (4.12) i (4.13) dla naprężeń siłowych i naprężeń momentowych, przy czym należy w tych wzorach podstawić

$$\tilde{p}(\xi) = \frac{i}{2a_0\,\xi}\,\tilde{m}(\xi). \tag{8.3}$$

Dla dalszych rozważań rezultat ten przepiszemy w postaci całkowej, uwzględniając rozłożenie obciążenia na część symetryczną i antysymetryczną względem osi Ox_1,

$$\tilde{m}(\xi) = \tilde{m}_s(\xi) + i\tilde{m}_a(\xi), \tag{8.4}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\tilde{m}_s &\equiv \tilde{m}_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} m_s(x_2)\cos(\xi x_2)\,dx_2, \\
\tilde{m}_a &\equiv \tilde{m}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} m_a(x_2)\sin(\xi x_2)\,dx_2.
\end{aligned}
\tag{8.4'}
$$

Przemieszczenia i obrót:

$$
\begin{aligned}
u_1 = u_1'' &= \frac{1}{2a_0\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+\right.\right. \\
&\left.\left.+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1})\right\}b(\xi,x_2)\,d\xi, \\
u_2 = u_2'' &= -\frac{1}{2a_0\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left\{(1-\Delta_0)\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{\xi}+\right.\right. \\
&\left.\left.+x_1\right)e^{-\xi x_1}+\frac{2a_0\xi^2}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\xi}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right\}a(\xi,x_2)\,d\xi, \\
\varphi_3 = \varphi_3'' &= -\frac{2}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]a(\xi,x_2)\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Naprężenia siłowe:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} = \sigma_{11}'' &= \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+\xi x)e^{-\xi x_1}+\right. \\
&\left. 2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]b(\xi,x_2)\,d\xi, \\
\sigma_{22} = \sigma_{22}'' &= \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+\right. \\
&\left.+2a_0\xi^2\left(e^{-\varrho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]b(\xi,x_2)\,d\xi, \\
\sigma_{12} = \sigma_{12}'' &= \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+\right. \\
&\left.+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]a(\xi,x_2)\,d\xi, \\
\sigma_{21} = \sigma_{21}'' &= \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\xi\Delta_0}(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+ \\
&\left.+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\varrho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]a(\xi,x_2)\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

Naprężenia momentowe:

$$(8.7)\qquad \begin{aligned} \mu_{13} &= \mu'_{13} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-e^{-\varrho x_1}]\,a(\xi, x_2)\,d\xi,\\ \mu_{23} &= \mu''_{23} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\varrho x_1}\right]b(\xi, x_2)\,d\xi. \end{aligned}$$

We wzorach (8.5)÷(8.7) oznaczyliśmy

$$(8.7')\qquad \begin{aligned} a(\xi, x_2) &= \tilde{m}_s\cos(\xi x_2)+\tilde{m}_a\sin(\xi x_2),\\ b(\xi, x_2) &= \tilde{m}_s\sin(\xi x_2)-\tilde{m}_a\cos(\xi x_2). \end{aligned}$$

W tym przypadku przejście graniczne $\alpha \to 0$ prowadzi do takiego ośrodka Cosseratów, który przy danych warunkach brzegowych o postaci (8.1) ma zdolność przenoszenia tylko naprężeń momentowych, natomiast stan deformacji opisują funkcje

$$\varphi_3,\ \gamma_{12},\ \gamma_{21},\ \varkappa_{\alpha 3} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

zachodzą bowiem na podstawie wzorów (2.2'), (4.10)÷(4.13) i (8.3) zależności (przy $\alpha \to 0$, $\varrho \to |\xi|$, $\Delta_0 \to 1$)

$$(8.8)\qquad \begin{aligned} &\gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = -\varphi_3,\\ &\gamma_{21} = \varphi_3, \quad \varkappa_{\alpha 3} = \partial_\alpha\varphi_3 \quad (\alpha = 1, 2); \end{aligned}$$

$$(8.9)\qquad \begin{aligned} &\mu_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, 2),\\ &\varphi_3 = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\xi|}\,\tilde{m}(\xi)e^{-(|\xi|x_1+i\xi x_2)}d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(8.10)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)\\ &\mu_{13} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{m}(\xi)e^{-(|\xi|x_1+i\xi x_2)}d\xi\\ &\mu_{23} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{|\xi|}\,\tilde{m}(\xi)e^{-(|\xi|x_1+i\xi x_2)}d\xi. \end{aligned}$$

9. Osobliwość naprężeń spowodowana skupionym obciążeniem momentowym

Rozpatrzmy szczególny przypadek warunków brzegowych (8.1). Niech półprzestrzeń będzie obciążona (w początku układu współrzędnych) skupionym momentem M_μ. Indeks μ ma tu wskazywać, że obciążenie M_μ nie pochodzi od pary sił skupionych (jak w teorii klasycznej) lecz ma charakter naprężenia momentowego μ_{13}

$$(9.1)\qquad m(x_2) = M_\mu\delta(x_2).$$

Ze związków (8.4') i (8.7') otrzymujemy odpowiednio

$$\tilde{m}_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} M_\mu \delta(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2 = \frac{M_\mu}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \tilde{m}_a = 0 \tag{9.2}$$

oraz

$$a(\xi, x_2) = \tilde{m}_s \cos(\xi x_2) = \frac{M_\mu}{\sqrt{2\pi}} \cos(\xi x_2), \qquad b(\xi, x_2) = \tilde{m}_s \sin(\xi x_2) = \frac{M_\mu}{\sqrt{2\pi}} \sin(\xi x_2). \tag{9.2'}$$

Podstawiając związki (9.2') do wzorów (8.6) i (8.7) otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia w naprężeniach w postaci całek

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\varrho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{22} &= \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\varrho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{12} &= \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} (e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1} \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{21} &= \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi
\end{aligned} \tag{9.3}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mu_{13} &= \frac{M_\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} [(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\varrho x_1}] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
\mu_{23} &= \frac{M_\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\varrho x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Przenosząc na całki we wzorach (9.3) i (9.4) dyskusję z punktu 5 pracy i wykorzystując wzory (5.12'), (5.12''), otrzymujemy związki asymptotyczne dla naprężeń

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11} = 0(1), \quad \sigma_{22} = 0(1), \quad \sigma_{12} = 0(1),\\
(9.5)\qquad &\sigma_{21} = -\frac{M_\mu}{\pi}\frac{1}{a_0+l^2}\log r+0(1)
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\mu_{13} = -\frac{M_\mu}{\pi}\frac{x_1}{r^2}+0(1),\\
(9.6)\qquad &\\
&\mu_{23} = -\frac{M_\mu}{\pi}\frac{x_2}{r^2}+0(1).
\end{aligned}
$$

Ze wzorów (9.5) i (9.6) widać, że osobliwość rzędu $0(r^{-1})$ wykazują naprężenia $\mu_{\alpha3}$, $\mu_{3\alpha}$, $(\alpha = 1, 2)$. Natomiast pośród naprężeń siłowych tylko składowa σ_{21} wykazuje osobliwość rzędu $0(\log r)$. Pozostałe składowe $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33})$ mają wartość skończoną w punkcie przyłożenia momentu M_μ.

Dla przypadków szczególnych $(\alpha \to 0)$ i $(\alpha \to \infty)$ zachodzi

$$
(9.7)\qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{a_0+l^2} = 0, \quad \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{a_0+l^2} = \frac{1}{3-2\nu}\frac{1}{(l^*)^2},
$$

gdzie przez l^* oznaczamy stałą sprężystości l z niesymetrycznej teorii sprężystości dla ośrodka ze związanymi obrotami. We wzorach (9.6) współczynnik intensywności osobliwości nie zależy od żadnej stałej materiałowej.

Wzory te pozostają słuszne dla wszystkich trzech przypadków (tzn. dla $\alpha = 0$, $\alpha = \infty$ i dla $0 < \alpha < \infty$). Natomiast naprężenia siłowe dla $(\alpha \to 0)$ dążą do zera, co było omówione już poprzednio. Dla ośrodka ze związanymi obrotami $(\alpha \to \infty)$ wzory (9.5) przekształcają się na wzory

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11} = 0(1), \quad \sigma_{22} = 0(1), \quad \sigma_{12} = 0(1),\\
(9.8)\qquad &\sigma_{21} = -\frac{M_\mu}{\pi}\frac{1}{3-2\nu}\frac{1}{(l^*)^2}\log r+0(1).
\end{aligned}
$$

Zwraca tu uwagę fakt (w odróżnieniu od p. 5, 7, 11) pojawienia się we współczynniku intensywności wymiarowego parametru l^*.

10. Przypadek obciążenia półprzestrzeni momentem skupionym M

Dla uzyskania rozwiązania w przypadku, gdy na brzegu półprzestrzeni w początku układu współrzędnych działa moment skupiony M załóżmy, że w punkcie o współrzędnych $(0, \xi_2)$, $(\xi_2 > 0)$ działa, zgodnie z dodatnim kierunkiem osi Ox_1, siła skupiona $P\delta(x_2-\xi_2)$ i niech taka sama siła, ale przeciwnie skierowana, działa w punkcie o współrzędnych

$(0,\ \xi_2+\Delta\xi_2){:}\, -P\delta[x_2-(\xi_2+\Delta\xi_2)]$, $(\Delta\xi_2 > 0)$. Rozkład naprężeń w półprzestrzeni pochodzący od działania takiej pary sił uzyskujemy drogą superpozycji:

$$
(10.1)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= -P[\sigma^*_{\alpha\beta}(x_1, x_2;\ 0,\ \xi_2+\Delta\xi_2)-\sigma^*_{\alpha\beta}(x_1, x_2;\ 0,\ \xi_2)],\\
\mu_{\alpha3} &= -P[\mu^*_{\alpha3}(x_1, x_2;\ 0,\ \xi_2+\Delta\xi_2)-\mu^*_{\alpha3}(x_1, x_2;\ 0,\ \xi_2)),\quad (\alpha, \beta = 1, 2),
\end{aligned}
$$

gdzie wielkości $P\sigma^*_{\alpha\beta}(x_1, x_2; 0, \xi_2)$ oraz $P\mu^*_{\alpha3}(x_1, x_2; 0, \xi_2)$ uzyskujemy z rozwiązania dotyczącego normalnej siły skupionej (punkt 5 pracy) dodając odpowiednio wzory (5.3) i (5.5) oraz wzory (5.4) i (5.6). Należy jednak we wzorach tych zmienną x_2 zastąpić teraz przez $(x_2-\xi_2)$.

Mnożąc i dzieląc prawe strony wzorów (10.1) przez $\Delta\xi_2$ i przyjmując, że dla $\Delta\xi_2 \to 0$ zachodzi

$$
(10.2)\qquad \lim_{\Delta\xi_2\to 0} P\Delta\xi_2 = M,
$$

(gdzie M oznacza moment skupiony działający w punkcie $(0, \xi_2)$), otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$
(10.3)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= -M\frac{\partial}{\partial\xi_2}\sigma^*_{\alpha\beta}(x_1, x_2;\ 0,\ \xi_2)|_{\xi_2=0},\\
\mu_{\alpha3} &= -M\frac{\partial}{\partial\xi_2}\mu^*_{\alpha3}(x_1, x_2;\ 0,\ \xi_2)|_{\xi_2=0},\quad (\alpha = 1, 2),\ (\beta = 1, 2)
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu całki z funkcji zależnej od parametru, ze wzorów (5.3)÷(5.6) i związków (10.3) otrzymujemy kolejno:

rozwiązanie «primowane»

$$
(10.4)\qquad
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= -\frac{M}{\pi}\int_0^\infty \xi(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma'_{22} &= -\frac{M}{\pi}\int_0^\infty \xi(1-\xi x_1)e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi,\\
\sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{Mx_1}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi
\end{aligned}
$$

oraz

$$
(10.5)\qquad
\begin{aligned}
\mu'_{13} &= -\frac{2a_0 M}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi x_1}\cos(\xi x_2)d\xi,\\
\mu'_{23} &= -\frac{2a_0 M}{\pi}\int_0^\infty \xi^2 e^{-\xi x_1}\sin(\xi x_2)d\xi.
\end{aligned}
$$

rozwiązanie z dwiema kreskami

$$\sigma_{11}'' = \frac{M}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]\sin(\xi x_2)d\xi,$$

(10.6)
$$\sigma_{22}'' = -\frac{M}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\left(e^{-\rho x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\xi x_1}\right)\right]\sin(\xi x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{12}'' = -\frac{M}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1})\right]\cos(\xi x_2)d\xi,$$

$$\sigma_{21}'' = -\frac{M}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-\xi x_1}+2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-\xi x_1}\right)\right]\cos(\xi x_2)d\xi$$

oraz

(10.7)
$$\mu_{13}'' = -\frac{2a_0 M}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi^2}{\Delta_0}[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-e^{-\rho x_1}]\cos(\xi x_2)d\xi,$$

$$\mu_{23}'' = -\frac{2a_0 M}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi^2}{\Delta_0}\left[(1-\Delta_0)e^{-\xi x_1}-\frac{\xi}{\varrho}e^{-\rho x_1}\right]\sin(\xi x_2)d\xi.$$

Dodając odpowiednio wzory (10.4) i (10.6) oraz (10.5) i (10.7) otrzymujemy rozkład naprężeń w półprzestrzeni. Dla przypadku, gdy $\alpha \to 0$ otrzymujemy rozwiązanie klasyczne dane wzorami (10.4), zachodzi bowiem $\mu_{\alpha 3}'+\mu_{\alpha 3}'' \to 0$ oraz $\sigma_{\alpha\beta}'' \to 0$, $(\alpha, \beta = 1, 2)$.

11. Osobliwość naprężeń spowodowana momentem skupionym M

Rozwiązanie klasyczne (10.4) zapisujemy w postaci zamkniętej (por. [11])

(11.1)
$$\sigma_{11}' = \frac{8M}{\pi}\cdot\frac{x_1^3 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3},$$

$$\sigma_{21}' = -\frac{4M}{\pi}\cdot\frac{x_1 x_2(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3},$$

$$\sigma_{12}' = \sigma_{21}' = -\frac{2M}{\pi}\frac{x_1^2(x_1^2-3x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}.$$

Podobnie (wykorzystując całki (5.12′), (5.12″)) zapisujemy wzory (10.5)

(11.2)
$$\mu_{13}' = -\frac{4a_0 M}{\pi}\cdot\frac{x_1(x_1^2-3x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3},$$

$$\mu_{23}' = -\frac{4a_0 M}{\pi}\frac{x_2(3x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)}.$$

Dyskusja wzorów (10.6) i (10.7) (analogiczna do przeprowadzonej w punkcie 5 pracy dla rozwiązania z dwiema kreskami) prowadzi do rezultatu

$$
(11.3)\qquad
\begin{aligned}
\sigma''_{11} &= -\frac{4M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_1x_2(3x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1),\\
\sigma''_{22} &= \frac{8M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1),\\
\sigma''_{12} &= \frac{4M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_1^2(x_1^2-3x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1),\\
\sigma''_{21} &= \frac{2M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{(x_1^2-x_2^2)^2-4x_1^2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1)
\end{aligned}
$$

oraz

$$
(11.4)\qquad
\begin{aligned}
\mu''_{13} &= \frac{4a_0M}{\pi}\,\frac{x_1(x_1^2-3x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}-\frac{M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\mu''_{23} &= \frac{4a_0M}{\pi}\,\frac{x_2(3x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_3^2)^3}-\frac{M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1).
\end{aligned}
$$

Sumując odpowiednio wzory (11.1) i (11.3) oraz (11.2) i (11.4) uzyskujemy poszukiwany charakter osobliwości naprężeń w tym zagadnieniu. Dla $r \to 0$ (tzn. w punkcie przyłożenia momentu M) naprężenia siłowe rosną nieograniczenie jak $1/r^2$, naprężenia zaś momentowe są rzędu $0(r^{-1})$

$$
(11.5)\qquad
\begin{aligned}
\mu_{13} &= -\frac{M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),\\
\mu_{23} &= -\frac{M}{\pi}\,\frac{a_0}{a_0+l^2}\,\frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1).
\end{aligned}
$$

Dla przypadku granicznego ($\alpha \to 0$), wobec (5.14), naprężenia $\sigma''_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) ze wzoru (11.3) oraz $\mu_{\alpha 3}$ ze wzoru (11.5) dążą do zera. Otrzymujemy rozwiązanie klasyczne (wzory (11.1)). Dla przypadku, gdy $\alpha \to \infty$ (uwzględniając (11.1), (11.3), (11.5) oraz (5.15)), otrzymujemy

$$
(11.6)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{4M}{\pi}\,\frac{1}{3-2\nu}\,\frac{x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^3}\,[2\nu(x_1^2-x_2^2)+2x_2^2]+0(1),\\
\sigma_{22} &= \frac{4M}{\pi}\,\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\,\frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1),\\
\sigma_{12} &= \frac{2M}{\pi}\,\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\,\frac{x_1^2(x_1^2-3x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1),\\
\sigma_{21} &= -\frac{2M}{\pi}\,\frac{1}{3-2\nu}\,\frac{[x_1^4+3(3-4\nu)x_1^2x_2^2+2(1-\nu)x_2^4]}{(x_1^2+x_2^2)^3}+0(1)
\end{aligned}
$$

oraz

$$\mu_{13} = -\frac{2M}{\pi}\,\frac{1-\nu}{3-2\nu}\,\frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1),$$
(11.7)
$$\mu_{23} = -\frac{2M}{\pi}\,\frac{1-\nu}{3-2\nu}\,\frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}+0(1).$$

Wzory (11.6) i (11.7) odnoszą się do ośrodka ze związanymi obrotami.

12. Uwagi końcowe

Analizując (na przykładzie półprzestrzeni) naprężenia dla ciała mikropolarnego $\sigma_{\alpha\beta}$, σ_{33} $(\alpha, \beta = 1, 2)$ widzimy, że rząd ich osobliwości w punkcie przyłożenia obciążeń skupionych (pkt. 5, 7, 11) jest taki sam jak w teorii klasycznej i wynosi $0(r^{-1})$. Również zachowany jest rząd osobliwości naprężeń (zarówno dla naprężeń siłowych jak i momentowych) w odniesieniu do modelu ciała ze związanymi obrotami (pkt. 5, 7, 9, 11).

Istotna różnica między przedstawionymi tu osobliwymi rozwiązaniami tkwi we współczynniku intensywności osobliwości. Dla ciała mikropolarnego współczynnik ten jest funkcją parametrów materiałowych i pozwala na ciągłe przejście z wynikami z p. 4, 5, 6, 7, 10, 11 do teorii klasycznej ($\alpha = 0$) i do teorii opisującej ciało ze związanymi obrotami ($\alpha = \infty$) (p. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11).

W tej ostatniej teorii, jak wiadomo (por. [4]), współczynnik intensywności osobliwości zależy od wymiarowej stałej materiałowej l^* (wyłączmy tu z rozważań pkt. 9) i w granicznym przypadku nie uzyskujemy osobliwości klasycznej. Dlaczego osobliwość teorii ciała ze związanymi obrotami nie przechodzi na osobliwość ciała mikropolarnego zostało wyjaśnione w cytowanej pracy [4] na str. 41.

Kolejne spostrzeżenie wynika z porównań wyników z pkt. 8, 9 i pkt. 10, 11. Zarówno rozwiązanie ogólne tam uzyskane jak i rozwiązanie osobliwe pochodzące od obciążeń momentami M_μ i M są zasadniczo od siebie różne. Wynika to stąd, że dla ciała mikropolarnego obciążenie M_μ ma charakter obciążenia podstawowego tak samo jak obciążenia siłami: P, S lub M.

Problem ten dla zagadnień statycznych niesymetrycznej sprężystości zbadano w pracy [12], a dla zagadnień dynamicznych w pracy [13].

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, Z. angew. Math. Phys., **16**, 611 (1965).
3. D. B. BOGY and ELI STERNBERG, *The effect of couple-stresses on singularities due to discontinuons loadings*, Int. J. Solids Structures, **3**, 757 (1967).
4. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych*, PWN, Warszawa 1972.
5. Г. Н. САВИН, *Распределение напряжений около отверстий*, Наукова Думка, Киев 1968.
6. H. SCHAEFER, *Das Cosserat Kontinuum*, Z.A.M.M. 8, **47** (1967), 485.
7. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

8. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, Mc Graw-Hill Book Company, INc. New York-Toronto-London 1951.
9. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., 5, **23** (1971), 587—611.
10. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
11. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, Tom III, PWN, Warszawa 1966.
12. P. P. TEODORESCU, *Sur la notion de moment massique dans le cas des corps du type de Cosserat*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 1, **15** (1967), 57.
13. W. NOWACKI, W. K. NOWACKI, *The generation of waves in an infinite micropolar elastic solid*, Proc. Vibr. Probl., 2, **10** (1969), 170.
14. ELI STERNBERG and ROKURO MUKI, *The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack*, Int. J. Solids Struct., **3**, 69 (1967).
15. R. D. MINDLIN and H. F. TIERSTEN, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Archs. Ration. Mech. Analysis, **11**, 415 (1962).
16. R. D. MINDLIN, *Influence of couple stresses on stress concentrations*, Exp. Mech., **3**, 1 (1963).
17. M. SOKOŁOWSKI, *O pewnym modelu ciała przenoszącego naprężenia momentowe*, Mech. Teor. i Stos., 3, **9** (1971), 391.

Р е з ю м е

СИНГУЛЯРНОСТИ СИЛОВЫХ И МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК (I)

Для линейной микрополярной среды рассматривается задача об упругом полупространстве в плоском деформированном состоянии, подверженном воздействию статических силовых и моментных нагрузок, приложенных к краю тела. На основе уравнений в перемещениях в предположении пренебрежимости массовыми членами определяются деформированное и напряженное состояния в полупространстве. Решение состоит из двух частей: из классического решения и решения типичной краевой задачи несимметричной теории упругости. В частности, рассматриваются сосредоточенные нагрузки, действующие на полупространство в начале системы координат. Основное внимание обращено на анализ характера особенностей силовых и моментных напряжений, возникающих в точке приложения этих нагрузок. Рассмотрены также предельные случаи: переходы к классической теории упругости ($\alpha \to 0$) и к теории со связанными вращениями ($\alpha \to \infty$).

S u m m a r y

FORCE-STRESS AND COUPLE-STRESS SINGULARITIES PRODUCED BY CONCENTRATED LOADS IN A MICROPOLAR MEDIUM

The problem of elastic half-space in the plane strain state due to static force and couple-forces loadings for linear micropolar medium is considered. Starting from the equations of displacements (without body force terms) we define the strain and stress distributions in the half-space. The solution consists of two parts: the classical solution and a typical solution of the boundary problem of non-symmetric elasticity.

In particular, loadings concentrated in the origin and acting on the half-space are considered and the character of stress and couple-stress singularities is examined. In all the cases the limiting results $\alpha \to 0$ (classical theory of elasticity) and $\alpha \to \infty$ (couple-stress theory of elasticity) are evaluated.

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.