MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 11 (1973)

O ANHOLONOMICZNYCH UKŁADACH PIERWSZEGO I DRUGIEGO RZĘDU Z TARCIEM

N. Ja. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

W niniejszej pracy ustala się ekstremalne własności reakcji więzów dla układów materialnych typu Czetajewa-Przeborskiego i układów z anholonomicznymi więzami drugiego rzędu, wychodząc z ogólnej definicji Painlevè'go układów z tarciem. Otrzymano zależność między odchyleniami ruchu rzeczywistego od możliwego w układzie z tarciem i w układzie bez tarcia, a także pewne wnioski wynikające z tej zależności.

1. Ekstremalne właściwości reakcji więzów

Rozważmy układ n punktów materialnych z anholonomicznymi, w przypadku ogólnym, nieliniowymi więzami pierwszego rzędu z tarciem:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k;\ i = 1, 2, \dots, n). \tag{1.1}$$

Wychodząc z ogólnej definicji Painlevè'go układów z tarciem [1], będziemy uważać, że suma prac elementarnych reakcji więzów $\overline{R}_i$ na możliwych przemieszczeniach układu nie zawsze będzie równa zeru. Załóżmy, że suma ta na możliwym przemieszczeniu równa jest $\tau \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta \bar{r}_i = \tau \quad (\tau \neq 0). \tag{1.2}$$

Możliwe przemieszczenia układu określa się według Czetajewa [2] i Przeborskiego [3] następującym wzorem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k). \tag{1.3}$$

Rozważmy sumę

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i)^2, \tag{1.4}$$

gdzie m_i oznacza masę i-tego punktu, $\overline{w}_i$ — przyspieszenie tego punktu w określonej chwili czasu t w trakcie ruchu rzeczywistego pod działaniem danej siły $\overline{F}_i$ i reakcji $\overline{R}_i$; $\overline{\gamma}_i$ — jedno z możliwych przyspieszeń dla danych więzów przy stałych położeniach i prędkościach punktu w określonej chwili czasu. Suma $A_{d\delta}$ określa miarę odchylenia rzeczywistego ruchu (d) danego układu punktów materialnych od ruchu możliwego (δ).

W charakterze ruchu, z którym będziemy porównywać ruch rzeczywisty (d) według wielkości odchylenia od ruchu możliwego (δ), przyjmiemy ruch (d') przy tych samych danych siłach $\bar{F}_i$ i dowolnych reakcjach $\bar{R}'_i$, różniących się od rzeczywistych reakcji, lecz spełniających warunek (1.2), tj.

$$\sum_{i=1}^{n} R'_i \delta \bar{r}_i = \tau. \tag{1.5}$$

Układów sił $\bar{R}'_i$ posiadających właściwości (1.5) istnieje nieskończona ilość [4].

Ruch (d') nie będzie, mówiąc ogólnie, możliwym przy nałożonych więzach. Odchylenie ruchu (d') od ruchu możliwego (δ) jest równe

$$A_{d'\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{w}'_i - \bar{\gamma}_i)^2, \tag{1.6}$$

a przyrost odchylenia przy przejściu od ruchu rzeczywistego (d) do ruchu (d') jest równy

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i) \Delta \bar{w}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\Delta w_i)^2, \qquad \Delta \bar{w}_i = \bar{w}'_i - \bar{w}_i. \tag{1.7}$$

Dla rozpatrywanych układów typu Czetajewa istnieją możliwe przemieszczenia punktów układu, proporcjonalne do różnic ich przyspieszeń w ruchu rzeczywistym i możliwym (przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów w ruchu rzeczywistym i możliwym rozpatrywanym w danej chwili czasu t). A więc różnice $\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i$ we wzorze (1.7) są przemieszczeniami możliwymi. Przyrost przyspieszeń w porównywanych ruchach $\Delta \bar{w}_i$ równy jest

$$\Delta \bar{w}_i = \frac{\bar{R}'_i - \bar{R}_i}{m_i}. \tag{1.8}$$

Ponieważ $\bar{R}_i$ i $\bar{R}'_i$ spełniają warunki (1.2) i (1.5), to

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i) \Delta \bar{w}_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{R}'_i - \bar{R}_i) \delta \bar{r}_i = 0.$$

W ten sposób z równania (1.7) mamy

$$\Delta A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\Delta \bar{w}_i)^2 > 0, \tag{1.9}$$

skąd wynika, że

$$A_{d\delta} > A_{d'\delta}; \tag{1.10}$$

innymi słowy, w przypadku rzeczywistych reakcji więzów $\bar{R}_i$ suma (1.4), traktowana jako funkcja reakcji dla ustalonych sił $\bar{F}_i$, przyjmuje wartość minimalną.

Jeżeli więzy nałożone na układ są idealne, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i \delta r_i = 0,$$

gdzie N_i jest wypadkową reakcji idealnych więzów (1.1), to minimalizacja sumy (1.4) dla rzeczywistych reakcji więzów $\overline{N}_i$ wynika bezpośrednio z poprzedniego ogólnego rezultatu dla $\tau = 0$. Przypadek więzów idealnych był rozpatrywany przez autora w pracy [5].

Udowodnione wyżej twierdzenie można rozciągnąć i na układy z idealnymi i nieidealnymi anholonomicznymi więzami drugiego rzędu, liniowymi względem przyspieszeń, mianowicie

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda i}\ddot{x}_i + b_{\lambda i}\ddot{y}_i + c_{\lambda i}\ddot{z}_i) = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

Współczynniki $a_{\lambda i}$, $b_{\lambda i}$, $c_{\lambda i}$, a_λ są zależne od czasu, współrzędnych i prędkości ruchu punktów układu.

W pracy [3] Przeborski po raz pierwszy wprowadził dla rozważanych układów definicję możliwych przemieszczeń, uogólniającą definicję (1.3), w myśl której przemieszczenia możliwe są definiowane związkami:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda i}\delta x_i + b_{\lambda i}\delta y_i + c_{\lambda i}\delta r_i) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

Łatwo spostrzec, że różnica przyspieszeń punktów układu dla ruchu rzeczywistego i możliwego, przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów układu w obu ruchach dla ustalonej chwili czasu, jest przemieszczeniem możliwym. Rozciągając na rozważane układy ogólną definicję Poinlevé'go układów z tarciem (1.2) oraz powtarzając rozważania jak dla układów typu Czetajewa, można udowodnić, że

$$A_{d\delta} < A_{d'\delta},$$

przy zachowaniu warunków (1.2) i (1.5) dla sił reakcji więzów w ruchach porównywanych.

2. Związki pomiędzy niektórymi charakterystykami dynamicznymi ruchu danego układu z tarciem i bez tarcia

Niech będzie dany układ n punktów materialnych, z nałożonymi więzami holonomicznymi i anholonomicznymi pierwszego i drugiego rzędu z tarciem.

Przekształcimy wzór dla odchylenia rzeczywistego ruchu układu od ruchu możliwego

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i)^2, \tag{2.1}$$

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{\overline{F}_i + \overline{R}_i}{m_i} - \overline{\gamma}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{F}_i + \overline{\varrho}_i + \overline{N}_i}{m_i} - \overline{\gamma}_i\right)^2, \tag{2.2}$$

gdzie $\bar{N}_i$ — siła więzów, zaś $\bar{\varrho}_i$ — siła tarcia. A zatem

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i \delta\bar{r}_i = 0, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\varrho}_i \delta\bar{r}_i = \tau. \tag{2.4}$$

Siła więzów $\bar{N}_i$ jest tą reakcją, która w określonej chwili czasu t działałaby na punkt μ_i, w przypadku gdyby układ był bez tarcia, z tym że każdy punkt μ_i układu w określonej chwili czasu t miałby te same położenie, tę samą prędkość i podlegał działaniu tej samej danej siły $\bar{F}_i$, jak w ruchu z tarciem [4].

Niech będzie dane $\bar{w}_{id0}$ — przyspieszenie punktu układu w ruchu bez tarcia, a $A_{d0\delta}$ — odchylenie ruchu bez tarcia ($d0$) od ruchu możliwego (δ). Wówczas

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\frac{\bar{F}_i+\bar{N}_i}{m_i}-\bar{\gamma}_i\right)+\frac{\bar{\varrho}_i}{m_i}\right]^2 = A_{d0\delta}+ \tag{2.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\bar{w}_{id0}-\bar{\gamma}_i)\bar{\varrho}_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varrho_i^2}{m_i}.$$

Ponieważ

$$\bar{w}_{id0}-\bar{\gamma}_i = \delta\bar{r}_i, \tag{2.6}$$

to zgodnie ze wzorem (2.4) otrzymamy

$$A_{d\delta} = A_{d0\delta}+\tau+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varrho_i^2}{m_i}. \tag{2.7}$$

Trzeci składnik prawej części równania (2.7) stanowi odchylenie rzeczywistego ruchu z tarciem od ruchu rzeczywistego bez tarcia. Rzeczywiście

$$\bar{\varrho}_i = m_i(\bar{w}_{id}-\bar{w}_{id0}), \tag{2.8}$$

dlatego też

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{\varrho}_i^2}{m_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{w}_{id}-\bar{w}_{id0})^2. \tag{2.9}$$

W ten sposób wzór (2.7) dla $A_{d\delta}$ możemy zapisać w postaci

$$A_{d\delta} = A_{d0\delta}+\tau+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{w}_{id}-\bar{w}_{id0})^2 \tag{2.10}$$

lub

$$A_{d\delta} = A_{d0\delta}+\tau+A_{dd0}, \tag{2.11}$$

gdzie

$$A_{dd0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id}-\overline{w}_{id0})^2.$$

Znajdziemy wzór dla $A_{d'\delta}$. Ze wzoru (1.9) mamy

$$A_{d'\delta}-A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\Delta\overline{w}_i)^2, \tag{2.12}$$

gdzie

$$\Delta\overline{w}_i = \overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id}.$$

Można udowodnić, że

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id0})^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id}-\overline{w}_{id0})^2. \tag{2.13}$$

Istotnie

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id0})^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id}-\overline{w}_{id0})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i[(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id})^2+2(\overline{w}_{id}-\overline{w}_{id0})(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id})].$$

Udowodnimy również, że

$$\sum_{i=1}^{n} m(\overline{w}_{id}-\overline{w}_{id0})(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id}) = 0. \tag{2.14}$$

W rzeczywistości

$$\overline{w}_{id}-\overline{w}_{id0} = \delta\overline{r}_i, \qquad m_i(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id}) = \overline{R}'_i-\overline{R}_i.$$

A więc, zgodnie z warunkami (1.2) i (1.5), równanie (2.14) jest spełnione. W ten sposób mamy

$$A_{d'\delta} = A_{d0\delta}+\tau+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_{id'}-\overline{w}_{id0})^2. \tag{2.15}$$

Nierówność (1.10) wspólnie z wzorami (2.10) i (2.15) możemy zinterpretować następująco: w ruchu rzeczywistym układu z tarciem pod działaniem danych sił $\overline{F}_i$ i reakcji $\overline{R}_i$ wykonujących tę samą pracę wirtualną co i reakcje rzeczywiste, odchylenie od ruchu bez tarcia jest minimalne.

Napiszemy równanie (2.11) w postaci

$$A_{d0\delta}+A_{dd0}-(A_{d\delta}-\tau) = 0. \tag{2.16}$$

9*

Stąd wynikają dwie nierówności:

(2.17) $$A_{d0\delta} < A_{d\delta} - \tau,$$

(2.18) $$A_{dd0} < A_{d\delta} - \tau;$$

pierwsza z nich (2.17) wyraża związek między odchyleniami ruchu możliwego od rzeczywistego i od ruchu uwolnionego od tarcia, a druga (2.18) — związek między odchyleniami ruchu rzeczywistego od możliwego i od ruchu uwolnionego od tarcia.

Literatura cytowana w tekście

1. П. Пэнлеве, *Лекции о трении*, Гостехиздат, 1954.
2. П. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат. Об-ва при Казанском университете, 1932—33, т. 6, серия 3.
3. A. Przeborski, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassichen Dynamik*, Math. Zeitschrift, B. 36, Berlin 1933, s. 184—194.
4. В. В. Румянцев, *О системах с трением*, П.М.М., т. 25, № 6, 1961.
5. Н. Я. Цыганова, *Об одном свойстве реакций связей для неголономных систем типа Н. Г. Четаева*, Науч. труды ВПИ, Волгоград, 1970, стр. 104—109; *O pewnych własnościach układów anholonomicznych typu Czetajewa—Przeborskiego*, Mech. Teoret. Stos., 1, **11** (1973).

POLITECHNIKA, WOŁGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.