

ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE PEŁZANIA I PLASTYCZNOŚCI¹⁾

J. F. BESSELING (DELFT)

1. Wstęp

Dla celów projektowania inżynierskiego konieczny jest ilościowy opis zachowania się materiałów poddanych określonym wpływom zewnętrznym. Teorie pełzania i plastyczności w ramach mechaniki inżynierskiej są teoriami fenomenologicznymi, ponieważ fizyczny mechanizm niesprężystych deformacji jest zbyt skomplikowany i, jak dotąd, nie udało się go ująć w logicznie spójny opis matematyczny. Wspomniane teorie zbudowane są na podstawie założenia, że drogą dedukcji potrafimy matematycznie sformułować prawa fizyczne dla standardowych materiałów, tzn.: wychodząc z pewnych specjalnych — w ogólności mierzalnych — programów obciążeń możemy określić zachowanie się materiałów dla programów (historii) dowolnych.

Opisując wpływ otoczenia na ciało z reguły ogranicza się go do wpływu zewnętrznych sił powierzchniowych, sił masowych i temperatury. Należy zaznaczyć, że nawet przy tych założeniach ograniczających nie ma w tej chwili jedynej, ogólnie akceptowanej teorii pełzania i plastyczności.

W obszernej literaturze przedmiotu publikowanej na przestrzeni minionych dwudziestu lat daje się zauważyć szczególną tendencję do koncentracji na matematycznych aspektach teorii, lekceważącą często dane eksperymentalne opisujące rzeczywiste zachowanie się materiałów. Współcześnie obserwuje się nacisk na rozwój teorii równań konstytutywnych mechaniki, a ostatnio — termodynamiki, na bazie apriorycznych pojęć naprężenia i temperatury, przy czym prace te zaczynają traktować o zjawiskach fizycznych dopiero po zbudowaniu imponującej struktury matematycznej złożonej z postulatów, lematów, twierdzeń itd. Z drugiej strony wielu matematyków parających się zastosowaniami usilnie dąży do rozwiązania szeregu problemów brzegowych i początkowych na bazie związków fizycznych w większości nie zweryfikowanych eksperymentalnie.

Na obecnym etapie — moim zdaniem — jedynym modelem materiału, dla którego istnieje dostateczna podbudowa eksperymentalna dla różnych rzeczywistych ośrodków jest tzw. model idealnego pełzania i idealnej plastyczności. I chociaż model ten daje opis daleko niekompletny, zawiera on te elementy mechaniki ośrodka, które są istotne w projektowaniu.

Co do zastosowań teorii bazujących na bardziej wyrafinowanych modelach materiałów — to lepiej byłoby je zarzucić do czasu potwierdzenia przez poprawny eksper-

¹⁾ Wykład wygłoszony w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie, 30.X.1972 r.

ment ich wartości dla opisu ilościowego. Tu właśnie znajduje się szerokie pole badań dla tych fizyków-eksperymentatorów, którzy wolą narzędzi racjonalnej mechaniki używać do teorii mechanizmów poślizgu w sieci krystalicznej w celu ich przenoszenia do rzeczywistej trójwymiarowej teorii deformacji. Tymczasem zaś inżynier dla pragmatycznych celów musi polegać na stosowaniu prostych modeli materiałów i na rozsądnej ekstrapolacji danych eksperymentalnych oraz na zwykłym doświadczeniu.

2. Podstawowe równania mechaniki i termodynamiki

Fenomenologiczny, czyli kontynuálny opis własności mechanicznych spełnia następujące postulaty matematyczne:

1. Zasada zachowania masy

$$(1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + \varrho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0.$$

2. Zasada zachowania pędu

$$(2) \quad \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} + \varrho f_j = \varrho \left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial t} + \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_k} \right).$$

3. Zasada zachowania momentu pędu (brak naprężeń momentowych)

$$(3) \quad t_{ij} = t_{ji}.$$

4. Zasada zachowania energii (bez źródeł promieniowania)

$$(4) \quad t_{ij} d_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \varrho \dot{u}, \quad \text{gdzie} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right),$$

5. Zasada wzrostu entropii¹⁾

$$(5) \quad \sigma = \varrho \dot{\eta} + \frac{\partial \left(\frac{q_i}{T} \right)}{\partial x_i} \geq 0, \quad \text{gdzie} \quad \sigma = \varrho \gamma.$$

Te podstawowe równania mechaniki i termodynamiki są bazą wyjściową w kierunku fenomenologicznego opisu mechaniki materiału.

Fakt naszego przyzwyczajania się i «oswojenia» z koncepcją gęstości ϱ , naprężenia t_{ij} , temperatury T , siły masowej f_j , strumienia ciepła q_i , energii wewnętrznej u i entropii η nie czyni tych wielkości mniej abstrakcyjnymi. Ich relacja do obserwowanego zjawiska jest na tyle prawdziwa, na ile są to wielkości mierzalne w odniesieniu do pewnych powtarzalnych zjawisk fizycznych.

Równania wiążące abstrakcyjne pojęcia z obserwowanymi miarami długości i czasu mogą być nazwane równaniami konstytutywnymi teorii. Bez tych równań cała struktura postulatów nie tworzy teorii mechanicznej, w sensie odpowiedzi na pytanie jaka jest reakcja układu na zewnętrzne działanie.

¹⁾ We wzorze (5) η jest właściwą entropią na jednostkę masy; $\sigma = \varrho \gamma$, gdzie γ oznacza właściwą prędkość powstawania entropii na jednostkę masy; σ więc odnosi się do jednostki objętości ciała (przyp. tłum.).

3. Materiały proste i koncepcja stanu lokalnego

W mechanice continuum ciało jest gładko odwzorowane na obszary przestrzeni euklidesowej. Obszar zajmowany przez ciało stanowi jego konfigurację. Ruch ciała jest wyszczególnieniem miejsc zajmowanych przez punkty materialne w miarę upływu czasu albo czasowym następstwem konfiguracji ciała. Mianowicie

$$(6) \quad x_i = \chi_i(\xi_\alpha, t).$$

Miejsce ξ jest «współrzędną materialną» cząstki materialnej w stosunku do pewnej konfiguracji odniesienia.

Szkoła TRUESDELLA, NOLLA i in. [1] wprowadza pojęcie «materiału prostego» w celu uproszczenia opisu «reakcji»²⁾ materiału na ruch ciała. Nazywają oni materiał materiałem prostym, jeśli ze znanego zachowania się materiału w procesach jednorodnych deformacji wynika zachowanie się materiału we wszystkich dowolnych procesach.

W procesie jednorodnej deformacji historia deformacji w ξ jest zbiorem wartości

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_\alpha}$$

W moim mniemaniu ta koncepcja materiału prostego jest jednym z aspektów bardziej ogólnej koncepcji lokalnego stanu termodynamicznego.

Ciało jako takie można podzielić na wiele wzajemnie sprzężonych podciał. Postuluje się, że podobnie jak masa i energia kinetyczna — energia wewnętrzna i entropia są wielkościami addytywnymi. Wynika stąd, że energia wewnętrzna i entropia podukładu są funkcjonalami zmiennych odniesionych wyłącznie do tego podukładu. Będzie istnieć, oczywiście, dolna granica wielkości podukładu, do którego ten postulat jeszcze się stosuje.

Podejście termodynamiczne jest z góry ograniczone do układów, w których sensowne są statystyczne uśrednienia.

Jakkolwiek więc definicje lokalnego naprężenia, temperatury, energii wewnętrznej i entropii są matematycznie trywialne dla układów w stanach jednorodnych, to ich przydatność do opisu stanów niejednorodnych jest oczywista. W stanach tych bowiem rozkłady temperatury, naprężenia, energii wewnętrznej i entropii mogą przedstawiać statystyczne uśrednienia dla wszystkich podukładów, aż do najmniejszych, w których dozwolona jest procedura uśredniająca. Jeśli dalej ograniczymy nasz opis do przypadków, w których różnica zmiennych — w tym również $F_{i\alpha}$ — jest niewielka w obszarze, który jest duży w porównaniu z najmniejszym podukładem termodynamicznym, to możemy przystąpić do poszukiwania lokalnie zdefiniowanych równań konstytutywnych.

Aby przekonać się, że pojęcie najmniejszego układu termodynamicznego nie ogranicza ważności koncepcji lokalnego stanu termodynamicznego w zwykłych warunkach, zauważmy, że liczba cząstek w powietrzu na poziomie morza wynosi $2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, a w stali — $8,6 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$.

²⁾ Termin «material response» tłumaczymy dosłownie jako «reakcja materiału» zgodnie z dosadnością i precyzją terminu oryginalnego rozumiejąc przez to pole naprężeń generujące się w materiale jako dynamiczną reakcję na proces kinematyczny (deformacji).

4. Funkcjonalne podejście do równań konstytutywnych

Przechodząc do teorii równań konstytutywnych, podajemy następujące założenie — za COLEMANEM i NOLLEM [2]: *Każdy związek konstytutywny musi spełnić zasadę obiektywności i zasadę wzrostu entropii dla wszystkich możliwych historii deformacji i temperatury.* Zasada obiektywności mówi tutaj, że w każdym przypadku dwóch obserwatorów ciała stwierdza ten sam związek konstytutywny. Jeśli $\chi_\alpha(\xi_\alpha, t)$ opisuje ruch obserwowany przez pierwszego obserwatora, a $\chi'_i(\xi_\alpha, t)$ jest tym samym ruchem widzianym przez drugiego, można udowodnić, że zachodzi zależność

$$(7) \quad \chi'_i = Q_{ij}\chi_j + c_i, \quad t' = t - a,$$

gdzie Q_{ij} jest tensorem ortogonalnym zależnym od czasu, zaś c_i jest wektorową funkcją czasu; a — jest stałą.

Przechodząc do formułowania konkretnych związków konstytutywnych — po akceptacji powyższych zasad ogólnych — stoimy przed możliwością przechodzenia od szczególnych przypadków do ogólniejszych, albo odwrotnie. Szkoła Truesdella preferuje drugie podejście.

W duchu czysto kontynualnej teorii nie wziętnia się cząsteczkowej albo atomowej struktury materiału. W tym sensie układ jest «czarną skrzynką», dla której zachowanie się materiału definiuje się przy pomocy oddziaływań zewnętrznych i ich historii. Ogólną klasę takich materiałów zdefiniował Coleman za pomocą funkcjonałów:

$$(8) \quad \begin{aligned} t_{ij} &= \mathfrak{S}_{ij} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ q_i &= \mathfrak{S} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ u &= \mathfrak{e} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ \eta &= \mathfrak{h} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Dowodzi się, że $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ musi znikać z równań na u i η , oraz że t_{ij} i \mathfrak{h} wyznacza się z \mathfrak{e} przez różniczkowanie, uogólniając w ten sposób klasyczne formy związków naprężenie-odkształcenie i temperatura-entropia. Dalsza procedura przekształcania powyższych związków opiera się na zasadzie zanikającej pamięci [3].

Z jednej strony więc, zamierzamy wprowadzać do równań konstytutywnych wielkości mierzalne niezależne od historii procesu fizycznego, a z drugiej mamy współczesne tendencje do formułowania równań konstytutywnych za pomocą funkcjonałów, co oznacza, że w ogólności zachowanie się materiału może być jedynie wyznaczone na podstawie znajomości aktualnych i przeszłych oddziaływań zewnętrznych. Podejście to wydaje mi się niezadowolające dla ilościowego opisu zachowania się materiałów, ponieważ nie znamy eksperymentalnego sposobu jednoznacznego wyznaczenia tych funkcjonałów oprócz przypadków trywialnych — na przykład w układach liniowych — gdzie działa zasada superpozycji (na przykład liniowa teoria lepkosprężystości).

Kolejny problem związany z czysto kontynuualnym podejściem wynika z faktu, że ruch cząstek elementarnych układu nie może być w ogólności opisany ruchem continuum, w którym każda cząstka zajmowałaby punkt materialny. Molekuły i atomy nie mają przypisanego miejsca w continuum. Idąc dalej zauważamy, że układ składać się może z cząstek różnego typu. Jeśli jednak w danej chwili prawdopodobieństwo, że cząstka jest określonego typu jest niezależne od jej położenia w układzie, wówczas uśredniony ruch masy wewnątrz układu można przedstawić przy pomocy ruchu: $x_i = \chi_i(\xi_a, t)$. W przeciwnym razie powinny być rozważane zagadnienia dyfuzji. Trzeba wtedy zdefiniować uśredniony ruch masy dla każdego typu cząstek osobno.

Jeśli jednak wystarczy rozważać tylko jeden ruch $x_i = \chi_i(\xi_a, t)$, to identyfikacja cząstek materialnych continuum z miejscem ξ ma, według mnie, znaczenie fizyczne tylko wtedy, jeśli otoczenie ξ stanowi w całym procesie jeden i ten sam podukład termodynamiczny.

Jeśli identyfikacja cząstek materialnych, które wypełniają małe otoczenie punktu ξ , ulega zmianie — a tak dzieje się w gazach, cieczach, metalach deformowanych plastycznie — wówczas konfiguracja odniesienia w opisie kontynuualnym traci w trakcie procesu wszelkie znaczenie fizyczne w odniesieniu do stanu termodynamicznego materiału. Zasada zanikającej pamięci w formie zaproponowanej przez COLEMANA [3] jest w tym przypadku fizykalną koniecznością, jeśli funkcjonały konstytutywne mają być ważne.

5. Koncepcja naturalnego stanu odniesienia

Ograniczając się do równań konstytutywnych pełzania i plastyczności w metalach, powinniśmy, jak sądzę, wyciągnąć pewne wnioski z faktu, że poślizg w sieci krystalicznej wywołany ruchami dyslokacji jest głównym czynnikiem niesprężystych deformacji. Pozwolę sobie zacytować fragment pracy Y. HORIE [4], przedstawionej na Międzynarodowym Sympozjum Podstaw Plastyczności w Warszawie w 1972 r., dotyczący dyslokacji w kryształach:

a) Całkowita energia zdeformowanego kryształu zawierającego stacjonarną dyslokację jest sumą energii odkształcenia siatki i energii dyslokacji. Jest ona niezależna od położenia dyslokacji.

b) Obecność stacjonarnych dyslokacji nie wpływa na sprężyste własności kryształu. Mierząc zachowanie się ciała pod wpływem przyłożonych obciążeń nie możemy stwierdzić obecności dyslokacji, dopóki nie nastąpi ich ruch.

c) Naprężenia uplastyczniające są to przede wszystkim naprężenia wymagane dla wywołania ruchu dyslokacji w kryształach.

HORIE wyciąga stąd wnioski, że wpływ chwilowych wartości odkształceń plastycznych na termodynamikę materiału jest bardzo mały. Ich wkład — jeśli istnieje — jest pośredni: poprzez całkowitą pracę plastyczną.

Na tym samym sympozjum K. HAVNER [5] wskazał na możliwość opisanie procesów mechanicznych w metalach przy pomocy dwóch kinematycznie niezależnych mechanizmów deformacji, które stanowią fenomenologiczne przybliżenia złożonych procesów w siatce krystalicznej zajmującej objętość w otoczeniu punktu continuum materialnego. Mechanizmy te są następujące:

a) Sprężyste (mechanicznie odwracalne) infinitezymalne odkształcenie siatki;

b) prosty poślizg zgodnie z krystalograficznie dopuszczalną geometrią poślizgu, którego rezultatem jest względne przesunięcie materialnych elementów liniowych, pozostawiające jednak niezmienny typ struktury krystalicznej.

Wydaje mi się, że oba punkty widzenia nie są wzajemnie niezgodne, a usprawiedliwiają wprowadzenie koncepcji naturalnego stanu termodynamicznego, niezależnie od koncepcji ruchu continuum.

NOLL i inni słusznie wskazują, że ścisły matematyczny opis materiału z dyslokacjami wymagałby wprowadzenia konfiguracji odniesienia, która nie jest konfiguracją euklidesową, ale jest zdefiniowana przez afiniczną i antysymetryczną koneksję I' . NOLL podał równania ruchu dla przypadku, kiedy ta nieeuklidesowa konfiguracja odniesienia jest znana.

Wydaje się, że przy pomocy równań NOLLA byłoby możliwe udowodnienie własności dyslokacji stacjonarnych, które wymienia HORIE. Ale właśnie ze względu na te własności w procesie sprężystym, możemy nie brać pod uwagę obecności dyslokacji, zaś w przypadku ruchu dyslokacji możliwość ścisłego podejścia matematycznego, podobnego do podejścia NOLLA, wydaje się problematyczna. Dyslokacje powstają w źródłach Franka-Reada; są wzajemnie sprzężone, gromadzą się w grupy przy brzegach ciała; są eliminowane przez procesy dyfuzji.

W moim przekonaniu bardziej racjonalna metodyka wynika z przyjęcia koncepcji naturalnego stanu odniesienia; pojęcie takiego stanu wprowadził ECKART [6] jeszcze w 1948 r. W ujęciu ECKARTA stan ten opisany przez nieeuklidesową metrykę wyznaczany jest przez proces termodynamiczny i podlega ewolucji.

W 1966 r. na sympozjum IUTAM, poświęconym problemom termodynamiki procesów nieodwracalnych w Wiedniu, rozważałem [7] bardziej ogólny przypadek, kiedy bieżąca konfiguracja materiału w każdej chwili, w każdym punkcie ciała jest odniesiona do konfiguracji w stanie odniesienia dla aktualnego materiału — tzw. naturalnego stanu odniesienia — przez odwracalną transformację elementów liniowych:

$$(9) \quad da_\alpha = b_{\alpha i} dx_i, \quad \det(b_{\alpha i}) > 0.$$

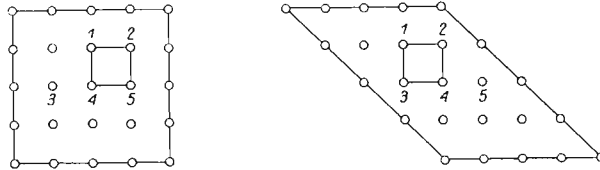
Tutaj da_α definiują elementy liniowe w lokalnym układzie współrzędnych, określonym przez ortogonalne trójki wektorów, które nie doznają obrotów w trakcie ruchu continuum. Zachowując stałe kierunki w przestrzeni, tworzą one bazę odniesienia dla anizotropowych własności materiału.

Powyższa transformacja elementów liniowych może być rozłożona na sztywny obrót i następującą po nim czystą deformację o symetrycznej macierzy transformacji, trzeba tylko zastosować twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie biegunowym tensora, którego macierz jest nieosobliwa.

Trzeba zdać sobie sprawę z faktu, że utożsamienie cząstek materialnych, które w naturalnym stanie odniesienia zajmują miejsce ξ , z punktem o tych współrzędnych dla continuum poruszającego się nie jest w ogólności konieczne. Tak więc, jeśli rozważymy siatkę krystaliczną, w której nastąpił poślizg, wówczas zauważamy, że pewna pojedyncza komórka posiada w swych wierzchołkach atomy, które przed prześlizgiem tworzyły z innymi atomami inną komórkę. Siatka pokazana na rysunku 1 w pewnym punkcie continuum

określającym oczko siatki jest w każdej chwili taka sama, co nie znaczy jednak, że tworzą ją te same atomy.

Tensor b_{ai} jest pojęciem fizycznym, który należy wprowadzić do równań konstytutywnych. Podobnie jak wprowadzony przez ECKARTA [6], a później SIEDOWA [8] tensor metryczny naturalnego stanu odniesienia $g_{ij} = b_{ai}b_{aj}$, przy czym tensor b_{ai} nie spełnia kinematycznych związków nierozdzielności wyprowadzonych z ruchu continuum, a więc ruchu opisującego uśredniony ruch rzeczywisty masy wewnątrz ciała.



Rys. 1. Pojedyncza komórka w naturalnym stanie odniesienia

Jest oczywiste, że dla materiału polikrystalicznego, o przypadkowej orientacji poszczególnych kryształów, jedno różniczkowalne pole b_{ai} nie wystarczy, aby zdefiniować naturalny stan odniesienia materiału. W tym miejscu rodzi się istotna trudność. Proponuję postępowanie idące w kierunku dyskretyzacji własności układów mechanicznych i precyzji równań, mianowicie aproksymację naturalnego stanu odniesienia przez skończoną liczbę pól b_{ai}^k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Przystępując do formułowania równań konstytutywnych przyjmujemy następujące relacje:

$$(10) \quad \begin{aligned} t_{ij} &= t_{ij}(b_{ai}^k, \eta), \\ T &= T(b_{ai}^k, \eta), \\ u &= u(b_{ai}^k, \eta). \end{aligned}$$

Musimy zachować zasadę obiektywności. Elementy da_α są z definicji niezmiennicze względem transformacji

$$(11) \quad \chi'_i = Q_{ij}\chi_j + c_i.$$

Stąd wynika, że

$$da_\alpha = b_{ai}dx_i = b_{ai}Q_{ij}dx_j = b'_{aj}dx'_j,$$

albo

$$b_{ai} = b'_{aj}Q_{ji}.$$

Składowe tensora b_{ai} definiują tensor

$$(12) \quad C_{\alpha\beta} = b_{ai}b_{\beta i} = b'_{aj}Q_{ji}b'_{\beta k}Q_{ki} = b'_{aj}b'_{\beta j}$$

niewrażliwy na transformację (11).

Widać, że tensor metryczny naturalnego stanu odniesienia

$$(13) \quad de_0^2 = da_\alpha da_\alpha = b_{ai}b_{aj}dx_i dx_j; \quad g_{ij} = b_{ai}b_{aj}$$

nie jest niezmienniczy względem (11). Można jednak odpowiednie wielkości t_{ij} , T , u , uzależnić od tensora g_{ij} poprzez jego niezmienniki; oznacza to izotropię materiału. Dalej przyjmuje się powyższe założenie w przypadku pojawienia się tensora metrycznego naturalnego stanu odniesienia w związkach fizycznych.

6. Odształcenie sprężyste i niesprężyste

Mówiąc o prędkości zmian naturalnego stanu odniesienia, oznaczonej przez \dot{da}_α można stwierdzić, że prędkość tę równie dobrze określają wielkości związane z lokalną propagacją dyslokacji, jak i zmiana tensora b_{ai} oraz pole prędkości poruszającego się continuum; mamy więc

$$(14) \quad \dot{da}_\alpha = p_{\alpha i} dx_i = \left(\dot{b}_{\alpha i} + b_{\alpha j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right) dx_i,$$

albo

$$(15) \quad \dot{b}_{\alpha i} = p_{\alpha j} - b_{\alpha j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i}.$$

W celu związania tensorów b_{ai} i $C_{\alpha\beta}$ ze znanymi pojęciami, takimi jak gradient deformacji i tensor odształcenia, rozważmy na chwilę przypadek materiału sprężystego. Dla takiego materiału $p_{\alpha i} = 0$ i można utożsamić naturalny stan odniesienia z konfiguracją odniesienia continuum.

Zachodzi wówczas

$$(16) \quad da_\alpha = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} dx_i, \quad x_i = \chi_i(a_\alpha, t)$$

oraz

$$(17) \quad de_0^2 = \delta_{\alpha\beta} da_\alpha da_\beta, \quad de^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = \frac{\partial x_k}{\partial a_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial a_\beta} da_\alpha da_\beta,$$

albo

$$(18) \quad de^2 = b_{k\alpha}^{-1} b_{k\beta}^{-1} da_\alpha da_\beta = c_{\alpha\beta}^{-1} da_\alpha da_\beta$$

i dalej

$$(19) \quad E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta}^{-1} - \delta_{\alpha\beta}),$$

gdzie $E_{\alpha\beta}$ jest tensorem odształcenia Lagrange'a

Dla deformacji niesprężystej możemy przyjąć

$$(20) \quad E'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta}^{-1} - \delta_{\alpha\beta}),$$

jako tensor odształceń sprężystych, nie spełniający wówczas warunków nierozdzielności narzuconych przez koncepcję ruchu continuum.

W ośrodku ciągłym tensor całkowitych odształceń zdefiniowany jest następująco:

$$(21) \quad E_{\sigma\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\sigma\beta} \right), \quad x_i = \chi_i(\xi_\alpha, t).$$

Znana jest koncepcja przyjmująca tensor odształceń sprężystych jako różnicę pomiędzy tensorem całkowitego odształcenia continuum i tensorem odształceń niesprężystych $E'_{\alpha\beta}$. Otóż w teorii przyjmującej pojęcie naturalnego stanu odniesienia, ta koncepcja addytywności jest do przyjęcia tylko pod warunkiem, że dewiacja naturalnego stanu odniesienia do konfiguracji odniesienia continuum pozostaje mała.

Możemy napisać

$$(22) \quad da_\alpha = b_{\alpha i} dx_i = b_{\alpha i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k.$$

Niech będzie

$$(23) \quad b_{\alpha i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \delta_{\alpha k} + \beta_{\alpha k}; \quad |\beta_{\alpha k}| \ll 1.$$

W tym przypadku zachodzi

$$(24) \quad \begin{aligned} E_{kl} &= E'_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha k} + \beta_{\alpha k}) (\delta_{\beta l} + \beta_{\beta l}) - \frac{1}{2} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{\alpha k} + \beta_{\alpha k}) (\delta_{\alpha l} + \beta_{\alpha l}) = \\ &= E'_{kl} + \frac{1}{2} (\beta_{lk} + \beta_{kl} + \beta_{\alpha k} \beta_{\alpha l}) = E'_{kl} + E'_{kl}'. \end{aligned}$$

Ograniczenie wielkości $\beta_{\alpha k}$ (tym samym $|E'_{kl}'| \ll 1$) jest naturalne w teorii, gdzie wszystkie zmiany mają być z góry określone względem niezdeformowanej konfiguracji ośrodka ciągłego. Przy znacznych różnicach między naturalnym stanem odniesienia i konfiguracją odniesienia continuum, ta ostatnia traci swój sens fizyczny. Teoria dużych deformacji niesprężystych jest raczej teorią płynięcia niż deformacji. Wymaga ona opisu we współrzędnych przestrzennych. Niniejsze rozważania ograniczamy do związków konstytutywnych opisujących małe deformacje niesprężyste.

7. Równania konstytutywne dla pełzania i plastyczności w przypadku małych odkształceń niesprężystych

W przypadku małych deformacji niesprężystych przyjmujemy ξ_1, ξ_2, ξ_3 jako zmienne niezależne i możemy prowadzić obliczenia w geometrii odniesienia ciała. Zasada zachowania masy jest tożsamościowo spełniona, a pozostałe równania podstawowe są następujące:

1. Zasada zachowania pędu

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} s_{jk} \right) = \rho_0 \ddot{x}_i,$$

$$(26) \quad t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} s_{ij},$$

gdzie s_{ij} jest drugim tensorem Pioli-Kirchhoffa (symetrycznym).

2. Zasada zachowania momentu pędu

$$(27) \quad s_{ij} = s_{ji}.$$

3. Zasada zachowania energii

$$(28) \quad s_{ij} \dot{E}_{ij} = \rho_0 \dot{u} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}.$$

4. Zasada wzrostu entropii

$$(29) \quad \sigma^0 = \rho_0 \dot{\eta} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{q_k}{T} \right)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \geq 0, \quad \sigma^0 = \gamma \rho_0.$$

5. Równania konstytutywne

$$(30) \quad u = u(E'_{ij}, \eta), \quad s_{ij} = \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial E'_{ij}}, \quad T = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ostatnie dwa związki pozwalają przekształcić zasadę entropii do postaci następującej:

$$(31) \quad T\sigma^0 = -\frac{\varrho_0}{\varrho} \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + s_{ij} \dot{E}'_{ij} \geq 0.$$

Ponieważ nierówność powyższa musi zachodzić dla wszystkich wirtualnych historii deformacji i temperatury, otrzymujemy, że

$$(32) \quad s_{ij} \dot{E}'_{ij} \geq 0.$$

Powracamy teraz do modelu, w którym naturalny stan odniesienia jest aproksymowany przez skończony szereg pól tensorowych b_{ai}^k albo — co jest równoważne w przypadku małych odkształceń niesprężystych — przez skończony szereg pól E_{ij}^k , mianowicie

$$(33) \quad u = \sum_{k=1}^N \psi^k u^k(E_{ij}^k, \eta), \quad \sum_{k=1}^N \psi^k = 1.$$

Z powyższego wynika, że

$$(34) \quad s_{ij} = \varrho_0 \sum_{k=1}^N \psi^k \frac{\partial u^k}{\partial E_{ij}^k} = \sum_{k=1}^N \psi^k s_{ij}^k.$$

Postulat wzrostu entropii wymaga, aby

$$(35) \quad s_{ij}^k \dot{E}'_{ij}{}^{kk} \geq 0$$

albo, ponieważ $\dot{E}'_{ij}{}^{kk} = 0$ (odkształcenie objętościowe jest sprężyste), aby

$$s_{ij}^{*k} \dot{E}'_{ij}{}^{*kk} \geq 0,$$

gdzie s_{ij}^* i E_{ij}^* są składowymi dewiatorów

$$s_{ij}^* = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij},$$

$$E_{ij}^* = E_{ij} - \frac{1}{3} E_{kk} \delta_{ij}.$$

Podstawowym problemem dla pełzania i plastyczności pozostaje określenie związku konstytutywnego dla prędkości dewiatora $\dot{E}'_{ij}{}^{*k}$. Postaram się zwięźle przedstawić własne podejście.

Definiuję funkcję dysypacji dla pełzania w postaci

$$(38) \quad s_{ij}^{*k} \dot{E}'_{ij}{}^{*k} = f^k(s_{ij}^{*k}, T).$$

Przyjmuję, że obszar sprężystego zachowania się materiału jest ograniczony przez funkcję płynięcia

$$(39) \quad g^k = g^k(s_{ij}^{*k}, T, h),$$

gdzie h jest parametrem wzmocnienia.

Stosując do przypadku pełzania prawo stowarzyszone z potencjałem f^k otrzymujemy

$$(40) \quad \dot{E}_{ij(c)^*}'' = \mu \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}}; \quad \mu = \left[s_{ij}^{**} \cdot \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}} \right]^{-1} f^k(s_{ij}^{**}, T)$$

oraz postępując podobnie w przypadku odkształceń plastycznych przy $g^k = 0$, $\dot{g}^k \geq 0$, mamy

$$(41) \quad \dot{E}_{ij(p)^*}'' = p \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}}.$$

Jako prawo wzmocnienia przyjmujemy

$$(42) \quad \frac{\partial g^k}{\partial h} \dot{h} = - \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \dot{E}_{ij(p)^*}'' \cdot 2G\lambda, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \geq 0.$$

Stąd, w przypadku deformacji izotermicznych, możemy rozwinąć warunek dla potencjału

$$(43) \quad \dot{g}^k = \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \dot{s}_{ij}^{**} + \frac{\partial g^k}{\partial h} \dot{h} = \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} 2G \left(\dot{E}_{ij}^* - p \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} - \mu \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}} \right) - 2G\lambda \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} p \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} = 0.$$

Wyznaczamy mnożnik p

$$(44) \quad p(\lambda + 1) \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} = \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \dot{E}_{ij}^* - \mu \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}}.$$

Równanie na $E_{ij}''^{**}$ jest wówczas następujące:

$$(45) \quad \dot{E}_{ij}''^{**} = \mu \left[\frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}} - \frac{1}{\lambda + 1} \frac{\frac{\partial g^k}{\partial s_{hk}^{**}} \frac{\partial f^k}{\partial s_{hk}^{**}}}{\frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{**}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{**}}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \right] + \frac{1}{\lambda + 1} \frac{\frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}}}{\frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{**}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{**}}} \dot{E}_{hk}^*,$$

pod warunkiem, że zachodzi

$$(46) \quad g^k = 0, \quad \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \dot{E}_{ij}^* > \mu \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{**}} \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}};$$

w przeciwnym razie

$$\dot{E}_{ij}''^{**} = \mu \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{**}}.$$

W celu zbadania słuszności tych związków w przypadku plastyczności i pełzania przeprowadziliśmy szereg doświadczeń na rurach grubościennych.

Wychodząc z funkcji płynięcia Misesa, mianowicie

$$(47) \quad g = s_{ij}^* s_{ij}^* - h^2,$$

określiśmy na podstawie pomierzonych historii deformacji historie naprężenia i porównaliśmy je z wynikami uzyskanymi z pomiarów. Można było zauważyć, że (dla przyjętej funkcji płynięcia) wszystkie wielkości występujące w naszych równaniach konstytutywnych dla plastyczności zostały wyznaczone w oparciu o zwykłe krzywe naprężenie—odkształcenie dla rozciągania albo skręcania. W ten sposób spełniliśmy nasze pierwotne

żądanie polegające na wyprowadzeniu reakcji materiału przy złożonej historii obciążenia z pomierzonych wielkości dla pewnych specjalnych historii. Sądzę, że nasze pierwsze wyniki sugerują podejmowanie dalszych badań w oparciu o koncepcje przedstawione wyżej.

Badaliśmy też wartość pojęcia skończonej ilości naturalnych stanów odniesienia przy pomocy testów pełzania. Rezultaty, jakie uzyskaliśmy do tej pory, były przedstawione na sympozjum IUTAM poświęconemu pełzaniu w konstrukcjach w r. 1970 w Gothenburgu [9]. Rozrzuty wyników badań rzucają cień na niezbyt pomyślną zgodność między przyjętym modelem a rzeczywistym zachowaniem materiału.

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics ed. by S. FLÜGGE, Vol. III/3, 1965.
2. W. NOLL, *A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, (1958—59), 197—226.
3. B. D. COLEMAN, V. J. MIZEL, *On the General Theory of Fading Memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **29**, (1968), 18—31.
4. Y. HORIE, *On the Thermodynamic States of Plastically Deformed Solids*, Pap. Contr. to the Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Warsaw, 1972, preprint edition, ed. by A. SAWCZUK, s. 219—233.
5. K. S. HAVNER, *An Analytical Model of Large Deformation Effects in Crystalline Aggregates*, jw, s. 93—106.
6. C. ECKART, *The Thermodynamics of Irreversible Processes, IV. The Theory of Elasticity and Anelasticity*, Phys. Rev., **2**, **73** (1948), 373.
7. J. F. BESSELING, w *Irreversible Aspects of Cont. Mech....*, IUTAM Symposium, Vienna 1966, ed. by H. PARKUS, L. I. SEDOV, Wien 1968.
8. L. I. SEDOV, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, New York 1965 (tłumaczenie angielskie), *Vvedenie v Mekhaniku Sploshnoi Sredy*, Moscow 1962.
9. J. F. BESSELING, J. H. LAMBERMONT, *An Experimental and Theoretical Investigation of Creep under Uniaxial Stress of a Mg-Alloy, Creep in Structures*, IUTAM, Symp. Gothenburg 1970, ed. by J. HULT, Berlin 1972.