

## WPLYW WSTĘPNYCH UGIĘĆ NA PRACĘ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ, ZGINANEJ W SWEJ PŁASZCZYŹNIE

WŁADYSŁAW WALCZAK (ŁÓDŹ)

### 1. Wstęp

Wstępne ugięcia grają znaczną rolę w zagadnieniach stateczności płyt cienkościennych i mają poważny wpływ na pracę tych płyt w warunkach obciążeń ponadkrytycznych. Dotyczy to tych przypadków obciążenia, gdy — oprócz obciążenia poprzecznego — istnieją również siły działające w płaszczyźnie środkowej płyty, bądź też gdy stanowią one jedyne obciążenie tych płyt. Wpływ tych sił na końcowy stan naprężenia i odkształcenia zależy bowiem nie tylko od ugięcia dodatkowego  $w_1$  wywołanego przyłożonym obciążeniem, lecz również od ugięcia wstępnego  $w_0$ . Z tego też względu przeprowadzenie, w przypadkach takiego obciążenia, analizy wpływu ugięć wstępnych na stan naprężenia i odkształcenia płyty wydaje się niezbędne.

Praca cienkościennej płyty prostokątnej po utracie stateczności, wywołanej zginaniem w płaszczyźnie płyty, została szczegółowo przeanalizowana przy założeniu płaskiej postaci tej płyty w stanie początkowym [3]. Celem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu wstępnego ugięcia takiej płyty na jej stan końcowy dla przypadku takich samych warunków obciążenia, to znaczy zginania płyty w jej płaszczyźnie środkowej. Przyjmując, że końcowe ugięcia płyty są rzędu jej grubości, zagadnienie rozpatrzono w oparciu o nieliniową teorię płyt.

### 2. Przyjęte założenia oraz podstawy teoretyczne

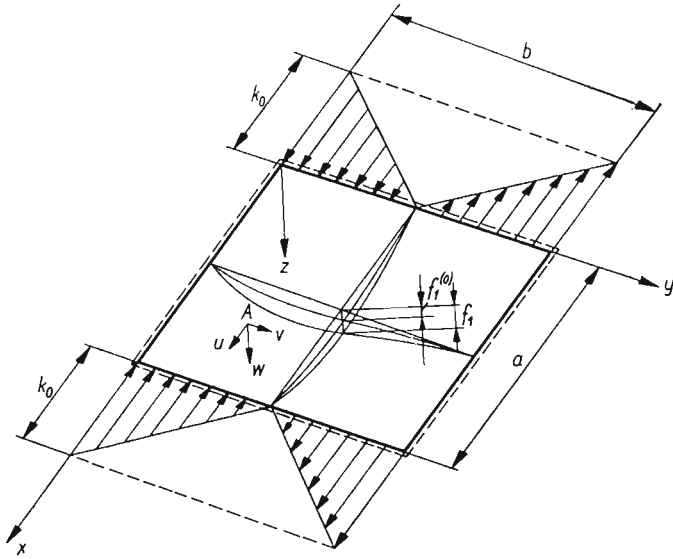
Przedmiotem rozważań jest cienka, prostokątna, izotropowa płyta o stałej grubości  $h$ , swobodnie podparta na całym swym obwodzie. Zakłada się ponadto, że przy odkształceniach płyty jej krawędzie pozostaną zawsze prostoliniowe. Ma to miejsce w przypadku wzmocnienia tych krawędzi odpowiednimi listwami usztywniającymi.

Obciążenie płyty przyjęto w postaci jednokierunkowego rozkładu sił liniowo zmiennych wzdłuż krawędzi  $x = 0$  i  $x = a$ , przyłożonych w płaszczyźnie środkowej płyty. Stan taki da się określić następującym wyrażeniem o ogólnej postaci

$$(2.1) \quad p = k_0 \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right).$$

Obciążenie przedstawione na rys. 1 odpowiada wartości współczynnika  $\alpha = 2$ , dla którego zachodzi przypadek czystego zginania.

Dla parametru  $k_0$  przyjęto założenie, że jest on liczbowo większy od wartości odpowiadającej obciążeniu krytycznemu. Założono, że powierzchnia środkowa płyty nie jest powierzchnią idealnie płaską, lecz ma początkową krzywiznę. W każdym jej punkcie istnieje zatem pewne wstępne ugięcie  $w_0$ . Przyjęto, że jest ono małe w porównaniu z grubością płyty.



Rys. 1. Schemat obciążenia płyty

Najmniej korzystna — z punktu widzenia pracy płyty przy obciążeniach ponadkrytycznych — jest taka postać wstępnego ugięcia, jaką pierwotnie płaska płyta przyjmuje po utracie stateczności. W rozpatrywanym przypadku podparcia i obciążenia postać taką można przedstawić jako wynik nałożenia się jednej półfali sinusoidy w kierunku osi  $0x$  z układem  $i$  półfal w kierunku poprzecznym. Założenie takie według [4] jest słuszne w odniesieniu do płyt, dla których stosunek długości krawędzi  $a/b \leq 0,95$ . Zakłada się ponadto, że w miarę wzrostu wartości parametru obciążenia  $k_0$  powyżej wartości krytycznej, zmiana pierwotnie płaskiej postaci płyty zachodzi stopniowo: w pierwszym przybliżeniu płyta przyjmuje po wyobczeniu kształt będący wynikiem kombinacji jednej półfali sinusoidy w kierunku osi  $0x$  z dwiema półfalami wzdłuż osi  $0y$ , w drugim przybliżeniu — jednej półfali wzdłuż osi  $0x$  z trzema półfalami wzdłuż osi  $0y$  itd. [3].

W rozpatrywanym zagadnieniu założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej płyty w postaci odpowiadającej pierwszemu przybliżeniu. Może on być zatem opisany za pomocą następującej, dwuparametrowej funkcji wstępnego ugięcia

$$(2.2) \quad w_0 = \sin \frac{\pi x}{a} \left[ f_1^{(0)} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2^{(0)} \sin \frac{2\pi y}{b} \right].$$

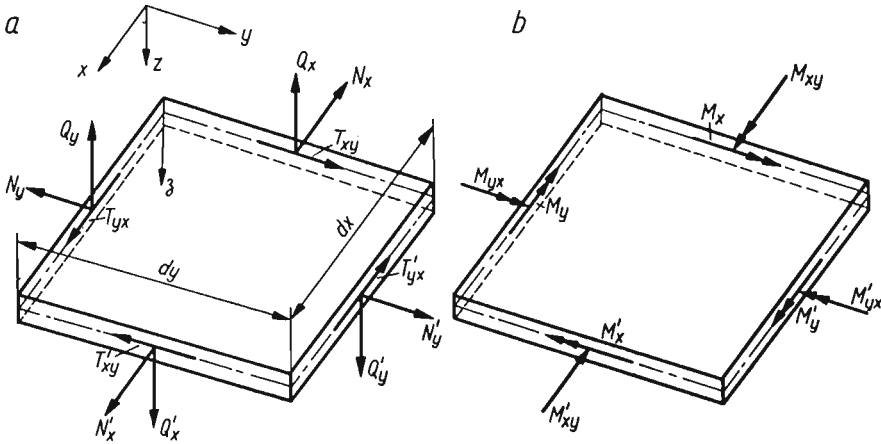
W wyrażeniu tym stałe  $a$  i  $b$  są długościami krawędzi płyty, zaś  $f_1^{(0)}$  i  $f_2^{(0)}$  są nieznanymi parametrami ugięcia. Parametr  $f_1^{(0)}$  równy jest przesunięciu (wzdłuż normalnej  $z$ ) środka płyty z płaszczyzny  $xy$ , wyznaczonej przez krawędzie jej powierzchni środkowej.

Postawione zagadnienie zostanie rozwiązane w oparciu o nieliniową teorię płyt. Pod wpływem przyłożonego obciążenia powierzchnia środkowa płyty ulega odkształceniu, a jej poszczególne punkty odpowiednim przemieszczeniom. Składowe stanu przemieszczenia dowolnego punktu  $A$  powierzchni środkowej płyty wzdłuż kierunków  $x$ ,  $y$  oraz  $z$  oznaczono odpowiednio przez  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  oraz  $w = w(x, y)$ . Składowa  $w$  przemieszczenia w kierunku normalnej do powierzchni środkowej płyty odpowiada pełnemu ugięciu płyty w stosunku do płaszczyzny  $xy$ , a więc wstępnemu  $w_0$  zwiększonemu o dodatkowe ugięcie  $w_1$ , wywołane danym obciążeniem.

Odpowiednio składowe stanu odkształcenia oznaczono przez  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$ . Składowe te wyrażają się za pomocą składowych stanu przemieszczenia  $u$ ,  $v$  i  $w$  związkami, które przy uwzględnieniu dużych ugięć płyty mają następującą postać [2]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned}$$

Jeżeli z otoczenia dowolnego punktu  $A$  wydzielimy element płyty o dowolnie małych długościach  $dx$  i  $dy$  krawędzi, wycięty płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn  $xz$  i  $zy$ , to do krawędzi tego elementu należy przyłożyć następujące siły przekrojowe: siły normalne



Rys. 2. Siły przekrojowe na krawędziach wyciętego elementu płyty

$N_x$  i  $N_y$ , siły styczne  $T_{xy} = T_{yx} = T$ , siły poprzeczne  $Q_x$  i  $Q_y$ , momenty gnące  $M_x$  i  $M_y$ , oraz momenty skręcające  $M_{xy}$  i  $M_{yx}$ . Siły te, zredukowane do powierzchni środkowej wyciętego elementu i odniesione do jednostki długości jego krawędzi, przedstawiono na rysunkach 2a i 2b.

Momenty gnące i skręcające oraz siły poprzeczne zależą od przyrostu ugięcia płyty i wyrażają się następującymi wzorami [1, 2]:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w - w_0) \right], \\ M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w - w_0) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0) \right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w - w_0), \end{aligned}$$

oraz

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 (w - w_0)], \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 (w - w_0)]. \end{aligned}$$

We wzorach tych  $D$  oznacza płytową sztywność zginania

$$(2.6) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Natomiast błonowe siły wewnętrzne  $N_x, N_y$  i  $T$  określono za pomocą funkcji naprężeń Airy'ego  $\Phi = \Phi(x, y)$  wzorami [1, 2]

$$(2.7) \quad N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad T = -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

W ten sposób wszystkie siły wewnętrzne wyrażają się za pomocą bądź funkcji naprężeń Airy'ego  $\Phi = \Phi(x, y)$ , bądź funkcji  $(w - w_0)$  przyrostu ugięcia płyty, wywołanego przyłożonym obciążeniem.

Funkcje te związane są ze sobą układem dwóch nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych noszących nazwę równań Karmana [1,2]. Dla rozpatrywanego zagadnienia równania te mają postać

$$(2.8) \quad \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

oraz

$$(2.9) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{E}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)].$$

W równaniach powyższych symbolem  $\nabla^2 \nabla^2$  oznaczono podwójny operator różniczkowy Laplace'a

$$(2.10) \quad \nabla^2 \nabla^2 (\dots) = \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial y^4},$$

symbol zaś  $L$  w równaniu (2.9) jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu o postaci

$$(2.11) \quad L(\dots) = 2 \left[ \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Związki (2.8) i (2.9) stanowią podstawowy układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, służący do rozwiązywania zagadnień płyt o dużych ugięciach, z uwzględnieniem ich ugięcia wstępnego. Rozwiązanie tego układu równań, które na ogół daje się uzyskać jedynie metodami przybliżonymi, pozwala na określenie funkcji naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$  oraz funkcji ugięcia  $w = w(x, y)$ . Wyznaczenie zaś następnie z ich pomocą wszystkich wielkości określających stan naprężenia i odkształcenia rozpatrywanej płyty daje możliwość oceny wpływu wstępnego ugięcia płyty na jej stan końcowy.

### 3. Rozwiązanie zagadnienia

Celem uzyskania rozwiązania postawionego zagadnienia w oparciu o równania (2.8) i (2.9) założono taką postać funkcji  $w = w(x, y)$  określającą końcowe ugięcie płyty w stosunku do płaszczyzny  $xy$ , aby opisywała ona — z możliwie dobrym przybliżeniem — kształt, jaki przyjmie płyta pod wpływem danego obciążenia. Zgodnie ze wstępnymi uwagami dla funkcji tej przyjęto identyczną postać, jak dla funkcji ugięcia wstępnego  $w_0$

$$(3.1) \quad w = \sin \frac{\pi x}{a} \left[ f_1 \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \right].$$

Współczynniki  $f_1$  i  $f_2$  występujące w powyższym wyrażeniu są nieznanymi parametrami ugięcia, przy czym współczynnik  $f_1$  przedstawia ugięcie środka płyty.

Przyjęta funkcja wstępnego ugięcia  $w_0 = w_0(x, y)$ , jak i funkcja końcowego ugięcia płyty  $w = w(x, y)$ , spełniają założone warunki swobodnego podparcia krawędzi płyty. Jak wynika bowiem z wyrażen (2.2) i (3.1),

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (w_0)_{x=0} = (w_0)_{x=a} = (w_0)_{y=0} = (w_0)_{y=b} = 0, \\ (w)_{x=0} = (w)_{x=a} = (w)_{y=0} = (w)_{y=b} = 0, \end{aligned}$$

na podstawie zaś związku (2.4) zachodzi

$$(3.3) \quad (M_x)_{x=0} = (M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_y)_{y=0} = (M_y)_{y=a} = 0.$$

Dla wyznaczenia przybliżonej postaci funkcji naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$ , za pomocą której określone są błonowe siły przekrojowe  $N_x$ ,  $N_y$  i  $T$ , wykorzystano równanie (2.9), które — przy uwzględnieniu wyrażen (2.2) i (3.1) — przyjmie postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 (\Phi) = \frac{\pi^4 E}{4a^2 b^2} \left\{ 2(f_1^2 - f_1^{(0)2}) \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ \left. + (f_1 f_2 - f_1^{(0)} f_2^{(0)}) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + 9 \cos \frac{3\pi y}{b} + \left( 9 \cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\ \left. + 8(f_2^2 - f_2^{(0)2}) \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{4\pi y}{b} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Jeżeli do powyższego równania wprowadzić następujące współczynniki bezwymiarowe:

$\lambda = a/b$  — współczynnik kształtu płyty;

$\xi_0 = f_1^{(0)}/h$  — współczynnik wstępnego ugięcia płyty, zredukowanego w stosunku do jej grubości;

(3.5)  $\xi = f_1/h$  — współczynnik końcowego ugięcia płyty, zredukowanego w stosunku do jej grubości;

$\psi_0 = f_2^{(0)}/f_1^{(0)}$ ,  $\psi = f_2/f_1$ ,

to funkcja naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$ , która jest ogólnym rozwiązaniem tego równania, będzie miała postać:

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) = \frac{Eh^2}{4\lambda^2} \left\{ \frac{\lambda^4}{8} [(\xi^2 - \xi_0^2) + 4(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2)] \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{8} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \\
 \left. + (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi y}{b} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \left( \frac{9}{(1+4/\lambda^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9+4/\lambda^2)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2)}{32} \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} - \frac{1}{2} k_0 y^2 \left( 1 - \alpha \frac{y}{3b} \right).
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Ostatni człon powyższego wyrażenia jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0.
 \tag{3.7}$$

Błonowe siły przekrojowe  $N_x$ ,  $N_y$  i  $T$  wyrażają się za pomocą funkcji naprężeń  $\Phi(x, y)$  związkami (2.7). Wykorzystując zatem wyrażenie (3.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 N_x = -\frac{\pi^2 Eh^3}{4\lambda^2 b^2} \left\{ \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{2} \cos \frac{2\pi y}{b} + (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{3\pi y}{b} + \right. \right. \\
 \left. \left. + 9\lambda^4 \left( \frac{1}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2)}{2} \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} - k_0 h \left( 1 - \frac{\alpha}{b} y \right), \\
 N_y = -\frac{\pi^2 \lambda^2 Eh^3}{8a^2} \left\{ (\xi^2 - \xi_0^2) + 4(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2) + \right. \\
 \left. + 8(\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ \frac{9}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right] \right\} \cos \frac{2\pi x}{a}, \\
 T = -\frac{3\pi^2 \lambda^2 Eh^3}{2ab} (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ \frac{3}{(\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right] \sin \frac{2\pi x}{a}.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Trzecie z otrzymanych powyżej wyrażen staje się równe zeru dla  $x = 0$  i  $x = a$  oraz  $y = 0$  i  $y = b$ . Stąd wynika, że na obwodzie płyty nie ma sił stycznych  $T$  zgodnie z przyjętymi uprzednio założeniami dotyczącymi jej podparcia i obciążenia. Siły normalne  $N_x$  i  $N_y$  spełniają warunki obciążenia krawędzi płyty w sposób całkowity. Dla stanu początkowego, to znaczy gdy  $\xi = \xi_0$  oraz  $\psi = \psi_0$ , jest

$$N_x = -k_0 h \left( 1 - \frac{\alpha}{b} y \right); \quad N_y = 0.$$

Obciążenie krawędzi płyty siłami  $N_x$  i  $N_y$  sprowadza się zatem do pierwotnego, liniowo zmiennego rozkładu sił przyłożonych jedynie do krawędzi  $x = 0$  i  $x = a$  (rys. 1). Natomiast po utracie stateczności, gdy wartość liczbowa parametru  $k_0$  obciążenia tych krawędzi przekroczy wartość krytyczną, stan obciążenia wszystkich krawędzi płyty ulega zmianie.

Mianowicie rozkład sił  $N_x$  wzdłuż krawędzi  $x = 0$  i  $x = a$  zachowuje liniowy charakter pierwotnego obciążenia jedynie w rozciąganej części płyty. W części ściskanej zaś występuje wyraźne odstępstwo od rozkładu liniowego, rosnące wraz ze wzrostem ugięcia płyty. Maksymalna wartość obciążenia w tej części płyty jest większa od wartości wynikającej z rozkładu liniowego. Na pozostałych krawędziach płyty pojawia się natomiast zrównoważony rozkład sił  $N_y$ , zmieniających się wzdłuż krawędzi według funkcji  $\cos 2\pi x/a$ . Maksymalne wartości tych sił na krawędzi  $y = 0$  są kilkakrotnie większe od odpowiednich wartości na krawędzi  $y = b$  [3].

Omówione powyżej siły powstają na skutek zachowania prostoliniowości krawędzi płyty. Można wykazać, że przy założonych postaciach funkcji ugięcia wstępnego (2.2) i końcowego (3.1) oraz otrzymanej postaci funkcji naprężeń (3.6), przyjęte na wstępie założenie zachowania prostoliniowości tych krawędzi jest w rozpatrywanym zagadnieniu spełnione.

Odpowiadające powyższym siłom przekrojowym składowe  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  stanu naprężenia w powierzchni środkowej płyty można wyrazić za pomocą następujących bezwymiarowych współczynników [3]:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x \frac{a^2}{Eh^2} = \frac{N_x a^2}{Eh^3}, \\ \sigma_y^* &= \sigma_y \frac{b^2}{Eh^2} = \frac{N_y b^2}{Eh^3}, \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} \frac{b^2}{Eh^2} = \frac{Tb^2}{Eh^3}. \end{aligned}$$

Jeśli ponadto dla parametru obciążenia  $k_0$  przyjąć również bezwymiarowy współczynnik o postaci [3]

$$(3.10) \quad k_0^* = k_0 \frac{a^2}{Eh^2},$$

to bezwymiarowe współczynniki (3.9) błonowego stanu naprężenia będą, przy wykorzystaniu związków (3.8), określone następującymi wzorami:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \sigma_x^* &= -\frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{2} \cos \frac{2\pi y}{b} + (\xi^2 \psi - \xi_0^2 \psi_0) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{3\pi y}{b} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 9\lambda^4 \left( \frac{1}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\xi^2 \psi^2 - \xi_0^2 \psi_0^2)}{2} \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} - k_0^* \left( 1 - \frac{\alpha}{b} y \right), \\ \sigma_y^* &= -\pi^2 \left\{ \frac{1}{8} [(\xi^2 - \xi_0^2) + 4(\xi^2 \psi^2 - \xi_0^2 \psi_0^2)] + \right. \\ &\quad \left. + (\xi^2 \psi - \xi_0^2 \psi_0) \left[ \frac{9}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right] \right\} \cos \frac{2\pi x}{a}, \\ \tau_{xy}^* &= -\frac{3}{2} \pi^2 \lambda (\xi^2 \psi - \xi_0^2 \psi_0) \left[ \frac{3}{(\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right] \sin \frac{2\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Momenty gnące  $M_x$  i  $M_y$  oraz moment skręcający  $M_{xy}$ , powstające w wyniku zmiany krzywizny płyty wywołanej przyłożonym obciążeniem, dadzą się również wyrazić za pomocą bezwymiarowych współczynników o postaci [3]

$$(3.12) \quad M_x^* = \frac{M_x}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \quad M_y^* = \frac{M_y}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \quad M_{xy}^* = \frac{M_{xy}}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2.$$

Na podstawie wzorów (2.4) oraz wyrażeń (2.2) (3.1) i (3.5) powyższe współczynniki określone będą, po wprowadzeniu do nich współczynników zdefiniowanych wyrażeniami (3.5), następującymi wzorami

$$(3.13) \quad \begin{aligned} M_x^* &= \frac{\pi^2 \lambda}{12(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0)(1 + \nu \lambda^2) \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + (\xi \psi - \xi_0 \psi_0)(1 + 4\nu \lambda^2) \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a}, \\ M_y^* &= \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0)(\lambda^2 + \nu) \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + (\xi \psi - \xi_0 \psi_0)(4\lambda^2 + \nu) \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a}, \\ M_{xy}^* &= -\frac{\pi^2 \lambda}{12(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0) \cos \frac{\pi y}{b} + 2(\xi \psi - \xi_0 \psi_0) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Momenty  $M_x$ ,  $M_y$  i  $M_{xy}$  są wypadkowymi odpowiednich składowych dodatkowego, zgięciowego stanu naprężenia, a ich maksymalne wartości określone są za pomocą wzorów

$$(3.14) \quad (\sigma_{xg})_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_{yg})_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}, \quad (\tau_g)_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

Dla powyższych wielkości można również wprowadzić bezwymiarowe współczynniki o postaci [3]

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{xg}^* &= \frac{(\sigma_{xg})_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \\ \sigma_{yg}^* &= \frac{(\sigma_{yg})_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \\ \tau_g^* &= \frac{(\tau_g)_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \end{aligned}$$

które, przy wykorzystaniu wyrażeń (3.6), określone będą następująco [3]:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_{xg}^* &= \frac{6M_x}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_x^*, \\ \sigma_{yg}^* &= \frac{6M_y}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_y^*, \\ \tau_g^* &= \frac{6M_{xy}}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_{xy}^*. \end{aligned}$$



Wprowadzając współczynniki  $\xi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\xi$  i  $\psi$  do wyrażeń (2.2) i (3.1), można funkcje  $w_0$  i  $w$ , zarówno wstępnego jak i końcowego ugięcia płyty, wyrazić również bezwymiarowymi współczynnikami o postaci [3]

$$(3.17) \quad w_0^* = \frac{w_0}{h} = \xi_0 \sin \frac{\pi x}{a} \left[ \sin \frac{\pi y}{b} + \psi_0 \sin \frac{2\pi y}{b} \right]$$

oraz

$$(3.18) \quad w^* = \frac{w}{h} = \xi \sin \frac{\pi x}{a} \left[ \sin \frac{\pi y}{b} + \psi \sin \frac{2\pi y}{b} \right].$$

A zatem dla pełnego określenia stanu naprężenia i odkształcenia płyty konieczne jest wyznaczenie bezwymiarowych współczynników  $\psi$  i  $k_0^*$  w zależności od współczynników wstępnego ugięcia  $\xi_0$  i  $\psi_0$  — dla różnych wartości współczynnika  $\xi$  ugięcia końcowego płyty. Wykorzystamy w tym celu równanie (2.8), które rozwiążemy stosując metodę Galerkina. W rozpatrywanym przypadku muszą być spełnione następujące dwa równania:

$$(3.19) \quad \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0,$$

w których symbolem  $X$  oznaczono niżej podany operator różniczkowy względem funkcji  $\Phi$ ,  $w_0$  i  $w$ ,

$$(3.20) \quad X = D \cdot \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) - h \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

Po wstawieniu do równań (3.19) odpowiednich pochodnych funkcji ugięcia  $w_0$  i  $w$  oraz funkcji naprężeń  $\Phi$  i wprowadzeniu do nich bezwymiarowych współczynników  $\xi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\xi$ ,  $\psi$  i  $k_0^*$ , przyjmą one następującą postać:

$$(3.21) \quad \frac{\pi^2(1+\lambda^2)^2}{48(1-\nu^2)} (\xi - \xi_0) + \frac{\pi^2}{64} \xi \left[ (1+\lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2 + 4\xi^2\psi^2) - 4\xi_0^2\psi_0(\psi + \lambda^4\psi_0) + \right. \\ \left. + \psi(\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \cdot \left( \frac{225}{(1+4/\lambda^2)^2} + \frac{49}{(9+4/\lambda^2)^2} \right) \right] - k_0^* \xi \left( \frac{2-\alpha}{8} + \frac{4\alpha}{9\pi^2} \psi \right) = 0,$$

$$(3.22) \quad \frac{\pi^2(1+4\lambda^2)^2}{48(1-\nu^2)} (\xi\psi - \xi_0\psi_0) + \frac{\pi^2}{64} \xi \left[ 4\lambda^4\psi(\xi^2 - \xi_0^2) + (1+16\lambda^4)\psi(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2) + \right. \\ \left. + (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left( 4 + \frac{9}{(1+4/\lambda^2)^2} + \frac{25}{(9+4/\lambda^2)^2} \right) \right] - k_0^* \xi \left( \frac{2-\alpha}{8} \psi + \frac{4\alpha}{9\pi^2} \right) = 0.$$

Po wyrugowaniu z tych równań bezwymiarowego współczynnika obciążenia  $k_0^*$  otrzymuje się w przypadku czystego zginania ( $\alpha = 2$ ) następujące równanie czwartego stopnia względem współczynnika  $\psi$ :

$$(3.23) \quad (1 + 16\lambda^4)\xi^3\psi^4 + \xi \left[ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} - 4\lambda^4\xi_0^2 - \right. \\ \left. - (1 + 16\lambda^4)\xi_0^2\psi_0^2 - \lambda^4\xi^2 \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \psi^2 + \\ + \xi_0\psi_0 \left[ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} + \lambda^4\xi\xi_0 \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \psi - \\ - \xi \left[ (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) + \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} - 4\lambda^4\xi_0^2\psi_0^2 \right] = 0.$$

Bezwymiarowy współczynnik obciążenia  $k_0^*$ , w zależności od tych samych współczynników bezwymiarowych (3.5), wyraża się przy  $\alpha = 2$  następującym wzorem:

$$(3.24) \quad k_0^* = \frac{9\pi^4}{512\psi} \left\{ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} + (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) - 4\lambda^4\xi_0^2\psi_0^2 + \right. \\ \left. + \xi^2 \left[ 4(1 + \lambda^4) + \frac{225}{(1 + 4/\lambda^2)^2} + \frac{49}{(9 + 4/\lambda^2)^2} \right] \psi^2 - \right. \\ \left. - \xi_0^2\psi_0 \left[ 4 + \frac{225}{(1 + 4/\lambda^2)^2} + \frac{49}{(9 + 4/\lambda^2)^2} \right] \psi \right\}.$$

Kładąc w powyższych równaniach (3.23) i (3.24)  $\xi_0 = 0$  oraz  $\psi_0 = 0$  otrzymamy następujące związki, mające zastosowanie dla płyty zginanej w swej płaszczyźnie lecz pozbawionej wstępnego ugięcia  $w_0$ :

$$(3.25) \quad (1 + 16\lambda^4)\xi^2\psi^4 + \left[ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} - \lambda^4\xi^2 \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \psi^2 - \\ - \left[ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} + (1 + \lambda^4)\xi^2 \right] = 0;$$

$$(3.26) \quad (k_0^*)_{\xi_0=0} = \frac{9\pi^4}{128\psi} \left\{ \frac{(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} + \frac{\xi^2}{4} \left[ (1 + \lambda^4)(1 + 4\psi^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^4 \left( \frac{225}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{49}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \psi^2 \right] \right\}.$$

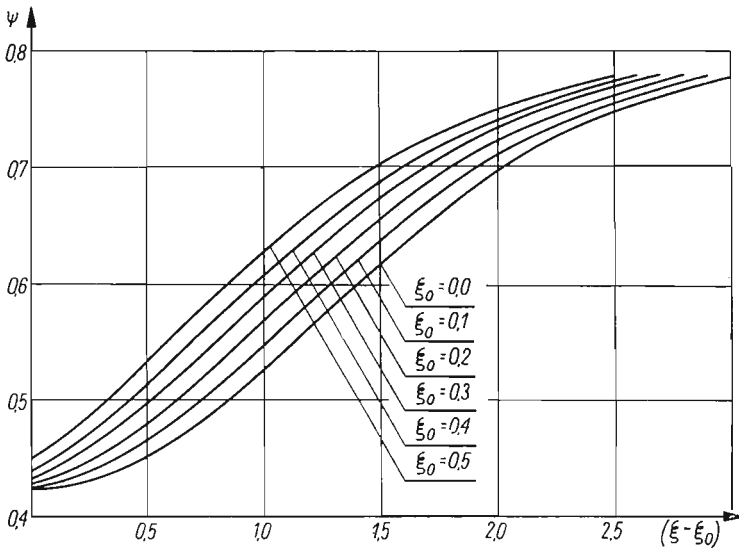
Wzory te odpowiadają przypadkowi rozpatrzonemu w pracy [3] dla pierwszego przybliżenia.

#### 4. Obliczenia liczbowe

Szczegółowe obliczenia liczbowe dotyczą płyty o współczynniku kształtu  $\lambda = a/b = 0,9$ . Dla materiału płyty przyjęto liczbę Poissona  $\nu = 0,3$ . Obliczenia przeprowadzono zakładając szereg wartości dla współczynnika  $\xi$  (od  $\xi = 0,1$  do  $3,0$ ), a następnie przyjmując

dla każdej z nich kilka kolejnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (od  $\xi_0 = 0,01$  do  $0,5$ ) oraz odpowiadających im wartości współczynnika  $\psi_0$ . Dla przyjmowanych wartości współczynników  $\xi_0$  zachowano warunek  $\xi_0 \leq \xi$ , wartości zaś współczynników  $\psi_0$  wyznaczono z równania (3.25) odpowiadającego przypadkowi płyty bez ugięcia wstępnego. Przyjęto zatem, że  $\psi_0 = (\psi)_{\xi_0=0}$ . Takie przyjęcie odpowiada najniekorzystniejszemu przypadkowi, w którym wstępne ugięcie powierzchni środkowej płyty ma taką postać, jaką początkowo płaska płyta przyjmuje po utracie stateczności.

Wartości liczbowe współczynników  $\psi$ , w zależności od założonych wartości współczynnika  $\xi$ , wyznaczone zostały na podstawie równania (3.23) dla różnych wartości współczynników  $\xi_0$  ugięcia wstępnego. Następnie w taki sam sposób wyznaczono wartości bezwymiarowego współczynnika  $k_0^*$  na podstawie równania (3.24). Obliczenia liczbowe wykonane zostały na maszynie cyfrowej ZAM-2, a wyniki przedstawione na wykresach.

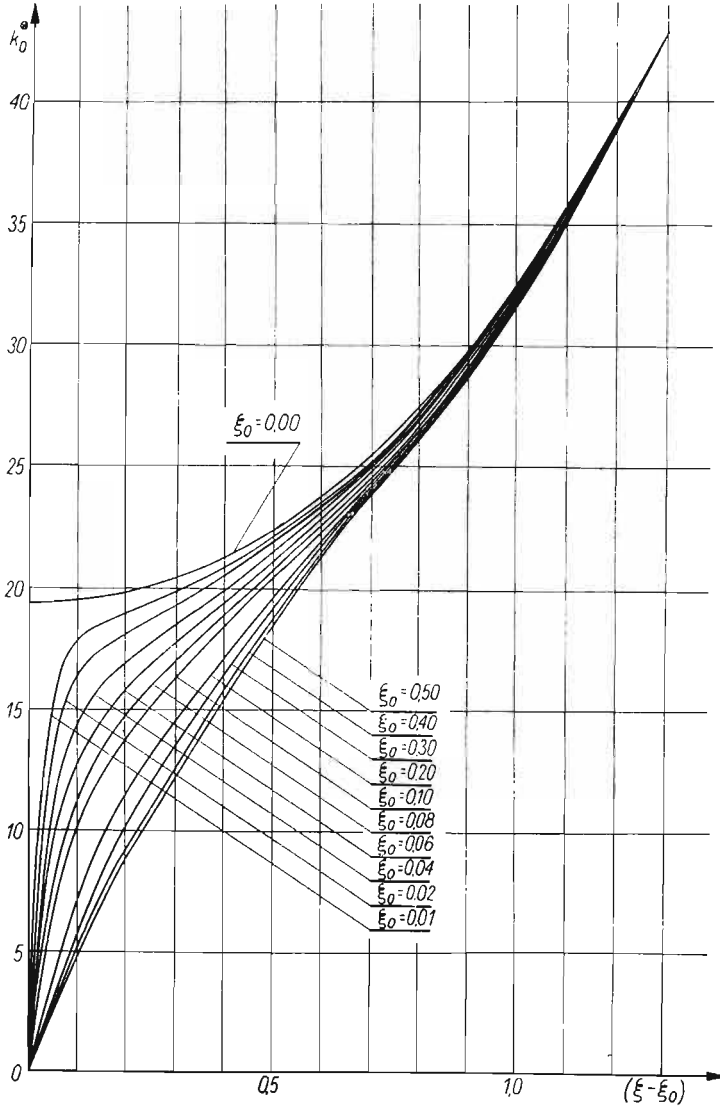


Rys. 3. Wykresy zależności  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia płyty

Na rys. 3 podano wykresy funkcji  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynników  $\xi_0$  ugięcia wstępnego. Wszystkie krzywe charakteryzują się podobnym do siebie przebiegiem w zakresie zbadanej zmienności przyrostu ugięcia płyty, określonego odciętą  $(\xi - \xi_0)$ . Dla każdej wartości tej odciętej rzędne krzywych rosną wraz ze wzrostem wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia płyty. Oznacza to, że im większe jest wstępne ugięcie płyty, tym odpowiednio większa jest amplituda dwóch półfal sinusoidy nałożonych na ugiętą powierzchnię środkową płyty wzdłuż osi  $Oy$ , reprezentowanych drugim członem wyrażenia (3.1). Amplituda ta jest najmniejsza wówczas, gdy płyta jest początkowo płaska.

Przebieg krzywych  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego przedstawiono na rys. 4. Krzywa górna przedstawia krytyczne wartości współczynnika obciążenia  $(k_0^*)_{\xi_0=0,00}$  odpowiadające płycie bez ugięcia wstępnego. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika  $\xi_0 = 0,01, \dots, 0,5$ , od-

biegają znacznie od siebie aż do wartości odciętej  $(\xi - \xi_0) \approx 1,1$ . Powyżej tej wartości wszystkie krzywe asymptotycznie dążą do krzywej  $\xi_0 = 0,00$ . Wynika stąd, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia wstępnego, wpływ tego ugięcia praktycznie zanika już wówczas, gdy całkowite ugięcie płyty wynosi nieco powyżej półtoręj grubości płyty.



Rys. 4. Wykresy zależności współczynnika obciążenia  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia płyty

##### 5. Porównawcza analiza z płytą o wstępnym jednostronnym wybrzuszeniu

Celem porównania otrzymanych wyników rozpatrzono drugi przypadek płyty podpartej i obciążonej identycznie jak płyta dotychczas rozpatrywana, dla której założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej w postaci jednostronnego wybrzuszenia,

najczęściej występującego w praktyce. W tym przypadku ugiętą wstępnie powierzchnię środkową płyty można opisać wyrażeniem, przedstawiającym nałożenie się jednej półfali sinusoidy zarówno wzdłuż osi  $0x$ , jak i osi  $0y$  przyjętego (rys. 1) układu współrzędnych.

Funkcji  $w_0$ , określającej kształt ugiętej powierzchni środkowej płyty przed jej obciążeniem, można zatem nadać postać

$$(5.1) \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

gdzie  $f_0$  jest parametrem równym wstępnemu wychyleniu środka płyty z płaszczyzny  $xy$ . Funkcja ta ma postać identyczną z wyrażeniem (2.2) po przyjęciu  $f_2^{(0)} = 0$ .

Do dalszych rozważań przyjęto, że pod wpływem przyłożonego obciążenia powierzchnia środkowa płyty przyjmie kształt opisany równaniem (3.1). Wówczas odpowiednie związki i równania dla rozważanego obecnie przypadku można uzyskać z odpowiadających związków i równań, otrzymanych dla przypadku poprzednio rozpatrzonego, przyjmując w nich, że parametr  $f_2^{(0)}$ , lub odpowiadający mu współczynnik bezwymiarowy  $\psi_0 = f_2^{(0)}/f_1^{(0)}$  są równe zero. W szczególności równanie służące do wyznaczenia bezwymiarowego współczynnika  $\psi$ , występującego w równaniu (3.18) końcowego ugięcia powierzchni środkowej płyty, przyjmie postać następującego dwukwadratowego równania względem tego współczynnika:

$$(5.2) \quad (1 + 16\lambda^4) \xi^2 \psi^4 + \left\{ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} - \lambda^4 \left[ 4\xi_0^2 + \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \xi^2 \right] \right\} \psi^2 - \left[ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} + (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) \right] = 0.$$

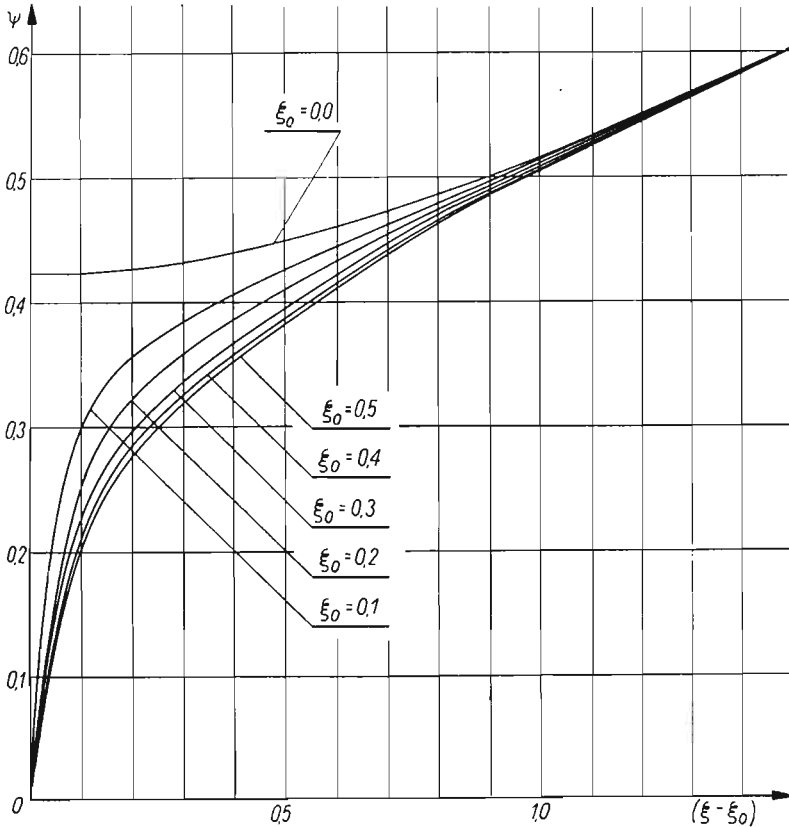
Bezwymiarowy współczynnik obciążenia  $k_\xi^*$ , określony poprzednio związkiem (3.24), wyrażać się będzie następująco:

$$(5.3) \quad k_\xi^* = \frac{9\pi^4}{512\psi} \left\{ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} + (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) + \left[ 4 + \lambda^4 \left( 1 + \frac{225}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{49}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \xi^2 \psi^2 \right\}.$$

Obliczenia liczbowe tych współczynników przeprowadzono zakładając te same jak poprzednio wartości współczynnika kształtu płyty  $\lambda$  oraz liczby Poissona  $\nu$ . Dla bezwymiarowego współczynnika ugięcia wstępnego  $\xi_0$  przyjęto wartości zmieniające się w granicach od  $\xi_0 = 0,1$  do  $0,5$ . Dla współczynnika  $\xi$  końcowego ugięcia płyty przyjęto wartości  $\xi = 0,1, \dots, 2,5$ . Obliczenia przeprowadzono przy zachowaniu warunku  $\xi_0 \leq \xi$ .

Otrzymane wyniki zilustrowano na następujących dwóch wykresach: pierwszy z nich, podany na rys. 5, przedstawia zależność współczynnika  $\psi$  od bezwymiarowo potraktowanego przyrostu ugięcia płyty, wywołanego przyłożonym obciążeniem; jest to więc zależność  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$ .

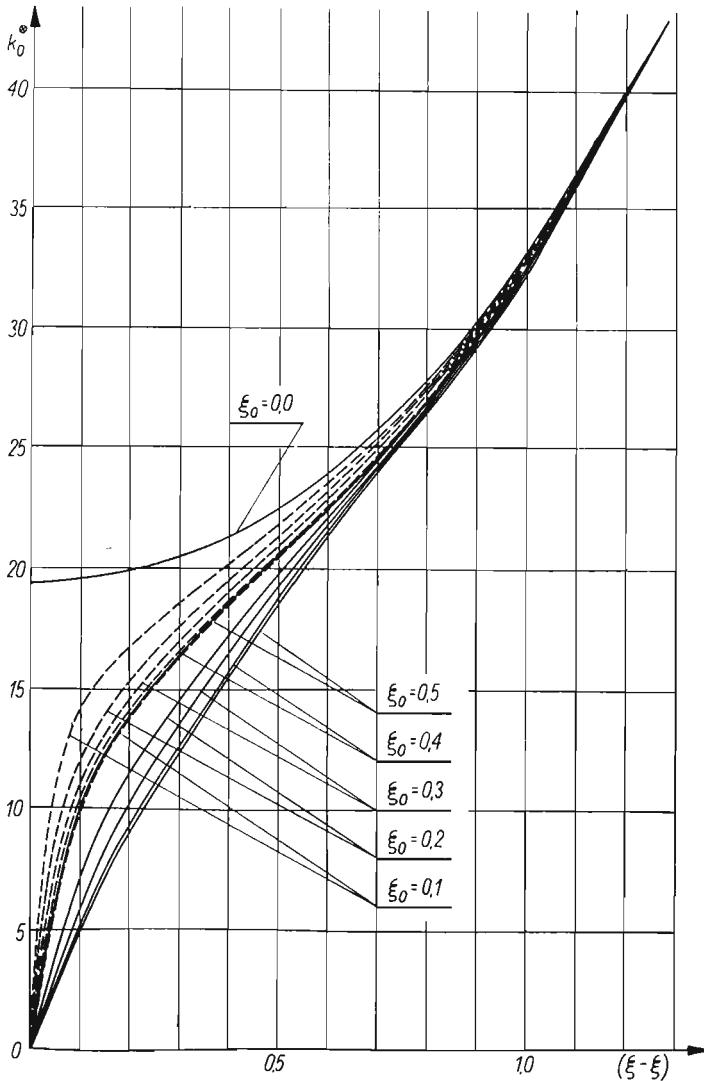
Górna krzywa, dla  $\xi_0 = 0,0$ , odpowiada wstępnie płaskiej postaci płyty. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (dla  $\xi_0 = 0,1, \dots, 0,5$ ), przebiegają poniżej tej krzywej. Wynika stąd, że — w przeciwieństwie do poprzednio rozpatrywanego przypadku — gdy płyta ma ugięcie wstępne w postaci jednostronnego wybrzuszenia, to amplituda dwóch półfal sinusoidy określonych drugim członem funkcji (3.1) końcowego ugięcia płyty, jest mniejsza niż w tym przypadku, gdy płyta jest początkowo idealnie płaska.



Rys. 5. Wykres zależności  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  i dla przypadku płyty z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

Wszystkie omawiane krzywe dla  $\xi_0 \neq 0,0$  zbliżają się asymptotycznie do krzywej dla  $\xi_0 = 0,0$ , przy czym różnice rzędnych między nimi praktycznie znikają począwszy od wartości odciętej  $(\xi - \xi_0) \approx 1,1$ . Na rysunku 6 przedstawiono przebieg zmian bezwymiarowego współczynnika obciążenia  $k_0^*$  w zależności od przyrostu ugięcia  $(\xi - \xi_0)$  dla kolejnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (linie przerywane). Krzywe te przebiegają podobnie jak krzywe  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  na rys. 5. Krzywa górna, dla  $\xi_0 = 0,0$ , odnosi się do płyty o początkowo płaskiej postaci. Pozostałe krzywe, odpowiadające płytom z ugięciem wstępnym ( $\xi_0 \neq 0$ ), przebiegają poniżej tej krzywej. Przy małych wartościach przyrostu ugięcia płyty różnice rzędnych między tymi krzywymi a krzywą górną

są znaczne. Ze wzrostem zaś ugięcia płyty różnice te maleją, a wszystkie krzywe zbliżają się do krzywej górnej. Dla mniej więcej tej samej wartości odciętej co w wykresie poprzednim dla funkcji  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$ , różnice rzędnych między wszystkimi krzywymi  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  stają się pomijalnie małe. Stąd wynika, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia



Rys. 6. Wykresy zależności współczynnika obciążenia  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  i dla przypadku płyty z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

wstępnego, wpływ tego ugięcia również i w rozpatrywanym przypadku zanika mniej więcej dla tej samej wartości całkowitego ugięcia płyty co w przypadku poprzednio rozpatrzonym.

Dla uwypuklenia powyższego faktu na rys. 6 naniesiono dodatkowo krzywe  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  z rys. 4 (linie ciągłe). Jak widać, wszystkie krzywe ciągłe leżą poniżej odpowia-

dających im krzywych przerywanych (dla tych samych wartości  $\xi_0$ ). A zatem osiągnięcie określonego ugięcia końcowego płyty następuje przy mniejszej wartości obciążenia wówczas, gdy postać wstępnego ugięcia powierzchni środkowej płyty jest bliższa tej postaci, jaką pierwotnie płaska płyta przyjmuje po utracie stateczności.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można wnioskować, że — w zakresie zbadanych wartości ugięcia wstępnego — wpływ tego ugięcia praktycznie zanika, gdy końcowe ugięcie płyty wynosi około 1,6 jej grubości. Wówczas stan naprężenia i odkształcenia różni się pomijalnie mało od stanu jaki (przy danym obciążeniu) panuje w płycie początkowo płaskiej.

W praktyce początkowe ugięcie płyty wynika naogół z przypadkowego, mniej lub więcej nieregularnego pofalowania powierzchni. Temu pofalowaniu mogą odpowiadać zarówno dodatnie jak i ujemne wartości współczynnika  $\psi_0$ . Z punktu widzenia pracy płyty w warunkach obciążenia ponadkrytycznego najbardziej niekorzystne są takie przypadki, gdy pofalowanie związane jest z jednostronnym wybrzuszeniem powierzchni środkowej płyty; zachodzi to dla  $\psi_0 \geq 0$ . Taki rzeczywisty kształt wstępnego ugięcia płyty jednakże tylko w pewnym przybliżeniu odpowiada omówionym w pracy przypadkom.

Z tego też względu wydaje się właściwe, by stan naprężenia i odkształcenia płyty, przy uwzględnieniu jej wstępnego ugięcia, określać na podstawie wzorów odpowiadających przypadkowi najbardziej niekorzystnemu. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, należy zatem preferować wzory mające zastosowanie w przypadku, gdy kształt ugiętej wstępnie powierzchni środkowej płyty odpowiada postaci, jaką płyta przyjmuje po utracie stateczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гос. Изд. тех.-теор. лит., Москва 1956.
2. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
3. W. WALCZAK, *Analiza stanu naprężenia tarczy prostokątnej po utracie stateczności, wywołanej zginaniem w płaszczyźnie tarczy*, Arch. Bud. Maszyn, 12, 1 (1962).
4. S. ТИМОШЕНКО, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Company, 1961.

#### Р е з ю м е

#### ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА НА РАБОТУ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗГИБАЕМОЙ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

В работе выполнен теоретический анализ влияния начального прогиба на напряженное и деформированное состояния прямоугольной изотропной пластинки, свободно подпертой по контуру и изгибаемой в своей плоскости после потери устойчивости. В рассуждениях употребляется функция напряжений Аири  $\Phi(x, y)$ . Приняты соответствующие виды функций начального прогиба  $w_0(x, y)$ , окончательного прогиба  $w(x, y)$  срединной поверхности пластинки, удовлетворяющие краевым условиям задачи. Для определения этих функций использованы дифференциальные уравнения Кармана нелинейной теории пластинок, а для нахождения неизвестных параметров, содержащихся в принятых функциях прогиба применен метод Галеркина. Полученные таким образом формулы, определяющие напряжения и деформации в сверхкритическом состоянии пластинки, выражены затем через безразмерные величины. Численные примеры выполнены для двух различных форм начального прогиба срединной поверхности пластинки; для этих случаев определены условия, при которых влиянием начального прогиба можно пренебречь.



## S u m m a r y

INFLUENCE OF INITIAL DEFLECTIONS ON THE WORK OF A RECTANGULAR PLATE  
SUBJECT TO BENDING IN ITS PLANE

This paper presents a theoretical analysis of the influence of initial deflections on the state of stress and strain in an isotropic, rectangular plate simply supported along the edges and subject to bending in its plane — after the stability loss. The Airy stress function  $\Phi(x, y)$  is introduced, and the form of initial deflection  $w_0(x, y)$  and final deflection  $w(x, y)$  is assumed to satisfy the boundary conditions. These functions are then determined with the aid of the Karman equations of the non-linear plate theory, the unknown parameters appearing in the function of deflection being found by means of the Galerkin method. The final formulas determining the stresses and strains in the post-critical state of the plate are written in terms of dimensionless coefficients. Numerical calculations are performed for two different forms of the initial deflection of the middle surface of the plate; conditions are also derived under which the influence of initial deflections may be disregarded.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1972 r.*

---