MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 11 (1973)

PEWIEN SPOSÓB ROZWIĄZANIA STATYCZNYCH ZAGADNIEŃ LINIOWEJ NIESYMETRYCZNEJ SPRĘŻYSTOŚCI

JANUSZ DYSZLEWICZ (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W liniowym ośrodku mikropolarnym stan naprężenia opisują dwa niesymetryczne tensory: tensor naprężeń siłowych σ_{ji} oraz tensor naprężeń momentowych μ_{ji}. Składowe tych tensorów spełniają różniczkowe równania równowagi, które — dla zagadnienia statycznego bez uwzględnienia wektora sił i wektora momentów masowych i w układzie kartezjańskim x_i — mają postać [1], [2], [3]:

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \epsilon_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j} = 0 \quad (i,j,k = 1,2,3)^{1)}. \tag{1.1}$$

Symbol ϵ_{ijk} oznacza alternator Levi-Civitá. Pole przemieszczeń w ośrodku opisuje wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$, pole obrotów — wektor obrotu $\boldsymbol{\varphi}$. Przy pomocy wektorów $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ definiuje się następujące tensory:

$$\gamma_{ji} = u_{i,j}-\epsilon_{kji}\varphi_k, \quad \varkappa_{ji} = \varphi_{i,j}, \tag{1.2}$$

gdzie γ_{ji} jest niesymetrycznym tensorem odkształcenia, natomiast $\varkappa_{ji}$ — niesymetrycznym tensorem skrętno-giętnym. Tensory γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$ wiążą się z tensorami σ_{ji}, μ_{ji} poprzez równania konstytutywne, które (bez uwzględnienia temperatury) mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij}+\beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera, wielkości α, β, γ, ε, λ, μ są stałymi materiałowymi.

Funkcje γ_{ji}, $\varkappa_{ji}$ nie są dowolne i powinny spełniać warunki geometrycznej zgodności

$$\begin{aligned} \gamma_{li,h}-\gamma_{hi,l}-\epsilon_{khi}\varkappa_{lk}+\epsilon_{kli}\varkappa_{hk} &= 0, \\ \varkappa_{li,h} &= \varkappa_{hi,l}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Jeżeli na powierzchni ograniczającej ciało dane mamy obciążenia w postaci siły $\mathbf{p}$ i momentu $\mathbf{m}$, to możemy zanotować warunki brzegowe w następujący sposób:

$$p_i = \sigma_{ji}n_j, \quad m_i = \mu_{ji}n_j, \tag{1.5}$$

gdzie n_j są składowymi jednostkowego wektora $\mathbf{n}$ normalnego do powierzchni ciała.

---

1) Będziemy przyjmowali dla indeksów łacińskich wartości 1, 2, 3, natomiast dla greckich 1, 2.

Wyrażając związki (1.4) poprzez tensory σ_{ji}, μ_{ji} przy pomocy równań (1.3) otrzymujemy warunki geometrycznej zgodności wyrażone w naprężeniach. Te ostatnie w połączeniu z równaniami równowagi (1.1) i warunkami brzegowymi (1.5) stanowią naprężeniowe sformułowanie statycznego problemu mikropolarnej sprężystości [4], [5]. Podstawiając do równań równowagi (1.1) związki (1.3) i wykorzystując definicję (1.2) otrzymujemy w połączeniu z warunkami (1.5) sformułowanie w przemieszczeniach — obrotach dla statycznego zagadnienia mikropolarnej sprężystości (por. [1]):

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)u_{i,jj}+(\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji}+2\alpha\epsilon_{ijk}\varphi_{k,j} = 0,\\
&(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj}-4\alpha\varphi_i+(\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,ji}+2\alpha\epsilon_{ijk}u_{k,j} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

W pracy [6] pokazane jest, że układ równań (1.6) można zastąpić dwoma niezależnymi od siebie układami równań, z których jeden identyczny jest z równaniami przemieszczeniowymi klasycznej elastostatyki. Wówczas rozwiązanie układu równań (1.6) z warunkami brzegowymi (1.5) można złożyć z rozwiązania klasycznej teorii sprężystości z warunkami brzegowymi

$$p_i = \sigma'_{ji}n_j, \tag{1.7}$$

uzupełnionego rozwiązaniem typowego problemu mikropolarnej sprężystości.

W niniejszej pracy powyższy rezultat uzyskamy na innej drodze wychodząc ze sformułowania naprężeniowego problemu. Ograniczymy się jednak do prześledzenia toku postępowania dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Niemniej jednak sposób rozwiązania pozostaje poprawny dla przestrzennego zagadnienia statycznego z uwzględnieniem temperatury i «obciążeń» masowych.

Za podstawę rozważań przyjmujemy komplet równań naprężeniowych odpowiadający wektorowi $\mathbf{u}(u_1,u_2,0)$ i $\boldsymbol{\varphi}(0,0,\varphi_3)$ z pracy [7].

2. Płaski stan odkształcenia

Przyjmujemy płaski stan odkształcenia (wszelkie przyczyny i skutki zależą tylko od x_α) reprezentowany przez wektory $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\varphi}$ postaci:

$$\mathbf{u}(x_1,x_2) \equiv (u_1,u_2,0), \qquad \boldsymbol{\varphi}(x_1,x_2) \equiv (0,0,\varphi_3). \tag{2.1}$$

Prowadzi to do następującego zestawu związków dla płaskiego zagadnienia uzyskanego z (1.1)÷(1.4):

niezerowe składowe stanu odkształcenia

$$\gamma_{ji} \equiv \gamma_{\alpha\beta}, \qquad \varkappa_{ji} \equiv \varkappa_{\alpha 3}; \tag{2.2}$$

niezerowe składowe stanu naprężenia

$$\sigma_{ji} \equiv (\sigma_{\alpha\beta},\sigma_{33}), \qquad \mu_{ji} \equiv (\mu_{\alpha 3},\mu_{3\alpha}); \tag{2.3}$$

warunki równowagi

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \qquad \epsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}+\mu_{\alpha 3,\alpha} = 0, \tag{2.4}$$

gdzie $\varepsilon_{\alpha\beta}$ jest symbolem Ricciego;

związki konstytutywne

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= (\mu+\alpha)\gamma_{\alpha\beta}+(\mu-\alpha)\gamma_{\beta\alpha}+\lambda\gamma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta},\\
\mu_{\alpha 3} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{\alpha 3},
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

oraz

$$(2.5')\qquad \begin{aligned} \sigma_{33} &= \lambda\gamma_{\gamma\gamma} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{\alpha\alpha}, \\ \mu_{3\alpha} &= (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{\alpha 3} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{\alpha 3}; \end{aligned}$$

związki geometrycznej zgodności

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &\gamma_{21,1}-\gamma_{11,2}-\varkappa_{13} = 0, \\ &\gamma_{22,1}-\gamma_{12,2}-\varkappa_{23} = 0, \\ &\varkappa_{23,1}-\varkappa_{13,2} = 0. \end{aligned}$$

Równania (2.6) można przekształcić do postaci:

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &\gamma_{22,11}+\gamma_{11,22} = (\gamma_{12}+\gamma_{21})_{,12}, \\ &\gamma_{12,22}-\gamma_{21,11} = (\gamma_{22}-\gamma_{11})_{,12}-(\varkappa_{13,1}+\varkappa_{23,2}), \\ &\varkappa_{23,1}-\varkappa_{13,2} = 0. \end{aligned}$$

Te ostatnie wyrażone w naprężeniach mają postać:

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{22,11}+\sigma_{11,22}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{\alpha\alpha,\beta\beta} = (\sigma_{12}+\sigma_{21})_{,12}, \\ &(\sigma_{12}+\sigma_{21})_{,22}-(\sigma_{12}+\sigma_{21})_{,11}+\frac{\mu}{\alpha}(\sigma_{12}-\sigma_{21})_{,\alpha\alpha}+ \\ &\qquad\qquad +2(\sigma_{11}-\sigma_{22})_{,12}+\frac{4\mu}{\gamma+\varepsilon}\mu_{\alpha 3,\alpha} = 0, \\ &\mu_{23,1} = \mu_{13,2}. \end{aligned}$$

3. Zagadnienie półprzestrzeni

Rozpatrzmy problem jednorodnej, izotropowej półprzestrzeni mikropolarnej w płaskim stanie odkształcenia. Półprzestrzeń orientujemy przy pomocy kartezjańskiego układu współrzędnych, przy czym $x_1 \in (0, \infty)$, $x_2 \in (-\infty, +\infty)$. Przyjmujemy, że na brzegu półprzestrzeni (w płaszczyźnie $x_1 = 0$) działa obciążenie $p(x_2)$ zgodnie skierowane z osią $0x_1$.

$$(3.1)\qquad \sigma_{11}(0,x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0,x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0,x_2) = 0.$$

Poszukujemy takiego rozkładu naprężeń i stanu odkształcenia w półprzestrzeni, aby były spełnione równania równowagi (2.4), równania geometrycznej zgodności (2.6), związki konstytutywne (2.5) i warunki brzegowe (3.1). Przy czym będziemy chcieli poszukiwane rozwiązanie złożyć z dwóch części w taki sposób, aby pierwsza jego część była formalnym przeniesieniem rozwiązania klasycznego problemu ($\sigma'_{12} = \sigma'_{21}$, $\gamma'_{12} = \gamma'_{21}$), analogicznego do wyżej sformułowanego, tzn. problemu półprzestrzeni z warunkami brzegowymi postaci

$$(3.2)\qquad \sigma'_{11}(0,x_2) = -p(x_2), \quad \sigma'_{12}(0,x_2) = 0.$$

Przyjmujemy zatem

(3.3) $$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta}+\sigma''_{\alpha\beta}, \qquad \mu_{\alpha3} = \mu'_{\alpha3}+\mu''_{\alpha3}$$

oraz warunek symetrii tensora naprężeń

(3.4) $$\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma'_{\beta\alpha}.$$

Równania (2.4) $\div$(2.8) zapisane dla części« primowanej» zagadnienia, wobec założenia (3.3) i (3.4), przyjmują następującą postać:

warunki równowagi

(3.5) $$\sigma'_{\alpha\beta,\alpha} = 0,$$

(3.5′) $$\mu'_{\alpha3,\alpha} = 0;$$

związki konstytutywne

(3.6) $$\begin{aligned}\sigma'_{\alpha\beta} &= 2\mu\gamma'_{\alpha\beta}+\lambda\gamma'_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta},\\ \mu'_{\alpha3} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa'_{\alpha3}\end{aligned}$$

lub te ostatnie rozwiązane względem odkształceń

(3.6′) $$\begin{aligned}\gamma'_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu}\left[\sigma'_{\alpha\beta}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma'_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right],\\ \varkappa'_{\alpha3} &= \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu'_{\alpha3};\end{aligned}$$

równania geometrycznej zgodności

(3.7) $$\begin{aligned}\gamma'_{12,1}-\gamma'_{11,2}-\varkappa'_{13} &= 0,\\ \gamma'_{22,1}-\gamma'_{12,2}-\varkappa'_{23} &= 0,\\ \varkappa'_{23,1}-\varkappa'_{13,2} &= 0.\end{aligned}$$

Przekształcone równania (3.7) po wykorzystaniu zależności $(3.6')_2$ i równania równowagi (3.5′) oraz zależności (3.4) i $(3.6')_1$ (co prowadzi do równości $\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma'_{\beta\alpha}$) przyjmą postać

(3.8) $$\begin{aligned}\gamma'_{22,11}+\gamma'_{11,22} &= 2\gamma'_{12,12},\\ \gamma'_{12,22}-\gamma'_{12,11} &= (\gamma'_{22}-\gamma'_{11})_{,12},\\ \varkappa'_{23,1}-\varkappa'_{13,2} &= 0\end{aligned}$$

lub

(3.9) $$\begin{aligned}\sigma'_{22,11}+\sigma'_{11,22}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma'_{\alpha\alpha,\beta\beta} &= 2\sigma'_{12,12},\\ \sigma'_{12,22}-\sigma'_{12,11}+(\sigma'_{11}-\sigma'_{22})_{,12} &= 0\end{aligned}$$

oraz

(3.9′) $$\mu'_{23,1} = \mu'_{13,2}.$$

Różniczkując równania równowagi (3.5) (dla $\beta = 1$) po x_2 oraz (3.5) (dla $\beta = 2$) po x_1 i odejmując otrzymane równania stronami, uzyskujemy zależność $(3.9)_2$. Dlatego w dalszych rozważaniach zależność tę, a co za tym idzie i $(3.8)_2$, będziemy pomijali. Zauważmy, że w równaniach równowagi (2.4) i związkach (2.8) nie było rozseparowania naprężeń siłowych i naprężeń momentowych; teraz równania (3.5) i (3.5′) oraz $(3.9)_1$ i (3.9′) są rozseparowane. Ponadto funkcje $\sigma'_{\alpha\beta}$ są funkcjami biharmonicznymi, a $\sigma'_{\alpha\alpha}$ (zatem i σ'_{33}) jest funkcją harmoniczną (rozpatrujemy zagadnienie statyczne bez temperatury i sił masowych):

$$\sigma'_{\alpha\beta,\delta\delta\gamma\gamma} = 0, \quad \sigma'_{33,\alpha\alpha} = 0 \tag{3.10}$$

oraz

$$\sigma'_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 0. \tag{3.10′}$$

Przy uwzględnieniu (3.10′) równanie $(3.9)_1$ możemy przepisać w postaci

$$\sigma'_{22,11} + \sigma'_{11,22} = 2\sigma'_{12,12}. \tag{3.11}$$

Uzyskaliśmy więc dla «primowanej» części szukanego rozwiązania sformułowanie naprężeniowe, na które składają się równania równowagi (3.5), równanie geometrycznej zgodności w odkształceniach $(3.8)_1$ lub w naprężeniach $(3.9)_1$ [bądź (3.11) w połączeniu z (3.10′)], warunki brzegowe (3.2), prawo konstytutywne $(3.6)_1$ lub $(3.6')_1$ oraz warunki konieczne, jakie muszą spełniać składowe $\sigma'_{\alpha\beta}$ i σ'_{33}, tzn. warunki (3.10).

Wyżej wymienione sformułowanie jest identyczne z naprężeniowym sformułowaniem z klasycznej teorii sprężystości dla płaskiego zagadnienia bez udziału temperatury i sił masowych (por. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości* [8] ss. 285÷287).

Zagadnienie powyższe można rozwiązać w sposób bezpośredni przy użyciu wykładniczej transformacji Fouriera

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi x_2} dx_2, \\ f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x_1, \xi) e^{-i\xi x_2} d\xi, \end{aligned} \tag{3.12}$$

co prowadzi do rezultatu:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi)(1+|\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \\ \sigma'_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi)(1-|\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \\ \sigma'_{12}(x_1, x_2) &= \sigma'_{21}(x_1, x_2) = -\frac{ix_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi)\xi e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\sigma'_{33}(x_1, x_2) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi. \tag{3.13′}$$

Pamiętać należy, że rozpatrywany stan równowagi w zakresie «primowanej» części tensora naprężeń siłowych jest stanem równowagi w ośrodku mikropolarnym, w którym oprócz stałych Lamégo λ, μ występują stałe α, γ, ε (stała β w rozpatrywanym płaskim zagadnieniu nie występuje). Wiąże się z tym występowanie tensora naprężeń momentowych, przy czym «primowana» jego część spełniać musi równanie równowagi (3.5') i równanie zgodności odkształceń $(3.8)_3$ wyrażone w naprężeniach (3.9'). Prawo konstytutywne określa się wzorem $(3.6)_2$ lub $(3.6')_2$. Składowe $\mu'_{\alpha 3}$ (również $\mu'_{3\alpha}$) są tu funkcjami harmonicznymi, otrzymujemy bowiem z (3.5') i (3.9') równanie Laplace'a

$$\mu'_{\alpha 3,\beta\beta} = 0. \tag{3.14}$$

Przejdźmy do wyznaczenia «primowanych» składowych tensora naprężeń momentowych. W tym celu do równań $(3.7)_{1,2}$ podstawiamy związki (3.6') i uwzględniamy zależność $(2.5')_1$, otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}(\sigma'_{12,1}-\sigma'_{11,2}+\sigma'_{33,2}), \\ \mu'_{23} &= \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}(\sigma'_{22,1}-\sigma'_{33,1}-\sigma'_{11,2}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Bezpośrednim podstawieniem do (3.14) sprawdzamy, że $\mu'_{\alpha 3}$ są funkcjami harmonicznymi i że spełniają równanie równowagi (3.5') oraz równanie zgodności odkształceń w naprężeniach (3.9'). Uwzględniając (3.13) i (3.13') wyznaczamy

$$\begin{aligned} \mu'_{13}(x_1, x_2) &= -\frac{2ia_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(\xi)\xi e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \\ \mu'_{23}(x_1, x_2) &= \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(\xi)|\xi| e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \end{aligned} \tag{3.16}$$

wprowadziliśmy oznaczenie: $a_0 = (\gamma+\varepsilon)(2\mu+\lambda)/4\mu(\lambda+\mu)$.

Dla $x_1 = 0$ otrzymujemy z $(3.16)_1$ wartość μ'_{13} na brzegu półprzestrzeni

$$\mu'_{13}(0, x_2) = 2a_0 \frac{d}{dx_2} p(x_2). \tag{3.17}$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia drugiej części rozwiązania. Zależności, którymi tu dysponujemy, są identyczne w swej postaci ze związkami (2.1) $\div$ (2.8). W celu ustalenia uwagi częściowo je tu przepiszemy.

Równania równowagi

$$\sigma''_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \quad \epsilon_{\alpha\beta}\sigma''_{\alpha\beta} + \mu''_{\alpha 3,\alpha} = 0. \tag{3.18}$$

Związki konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma''_{\alpha\beta} &= (\mu+\alpha)\gamma''_{\alpha\beta} + (\mu-\alpha)\gamma''_{\beta\alpha} + \lambda\gamma''_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, \\ \mu''_{\alpha 3} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa''_{\alpha 3} \end{aligned} \tag{3.19}$$

lub te ostatnie rozwiązanie względem odkształceń

$$
\begin{aligned}
&\gamma''_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma''_{\alpha\alpha} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma''_{\beta\beta}\right] \quad (\alpha \text{ nie sumować}),\\
&\gamma''_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma''_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma''_{[\alpha\beta]}, \qquad \alpha \neq \beta,\\
&\varkappa''_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu''_{\alpha 3}.
\end{aligned} \tag{3.19'}
$$

Symbole ( ) i [ ] oznaczają odpowiednio część symetryczną i antysymetryczną tensora $\sigma''_{\alpha\beta}$. Równania geometrycznej zgodności

$$
\begin{aligned}
&\gamma''_{21,1} - \gamma''_{11,2} - \varkappa''_{13} = 0,\\
&\gamma''_{22,1} - \gamma''_{12,2} - \varkappa''_{23} = 0,\\
&\varkappa''_{23,1} - \varkappa''_{13,2} = 0,
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

po przekształceniach i uwzględnieniu związków (3.19'), przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
&\sigma''_{22,11} + \sigma''_{11,22} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma''_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 2\sigma''_{(12),12},\\
&2[\sigma''_{(12),22} - \sigma''_{(12),11}] + \frac{2\mu}{\alpha}\sigma''_{[12],\alpha\alpha} + 2(\sigma''_{11} - \sigma''_{22})_{,12} + \frac{4\mu}{\gamma+\varepsilon}\mu''_{\alpha 3,\alpha} = 0,\\
&\mu''_{23,1} = \mu''_{13,2}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Zagadnienie należy rozwiązać z warunkami brzegowymi, które otrzymamy z wyjściowych warunków brzegowych (3.1) po uwzględnieniu podstawienia (3.3), warunków brzegowych dla «primowanego» zagadnienia (3.2) oraz zależności (3.17):

$$
\sigma''_{11}(0, x_2) = 0, \qquad \sigma''_{12}(0, x_2) = 0, \qquad \mu''_{13}(0, x_2) = -2a_0\frac{d}{dx_2}p(x_2). \tag{3.22}
$$

Poszukując rozwiązania wyjdziemy z rozseparowanych równań różniczkowych, jakie spełniają składowe $\sigma''_{\alpha\beta}$ i $\mu''_{\alpha 3}$ (por. [7]

$$
\begin{aligned}
&(l^2\sigma''_{\alpha\beta,\varepsilon\varepsilon} - \sigma''_{\alpha\beta})_{,\delta\delta\gamma\gamma} = 0,\\
&(l^2\mu''_{\alpha 3,\varepsilon\varepsilon} - \mu''_{\alpha 3})_{,\beta\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Ponadto zachodzą związki

$$
\begin{aligned}
&\sigma''_{\alpha\alpha,\beta\beta} = 0,\\
&l^2\sigma''_{[12],\alpha\alpha} - \sigma''_{[12]} = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Wielkość l^2 jest stałą i wynosi $l^2 = (\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)/4\mu\alpha$. Po transformacji równań (3.23) otrzymujemy równania różniczkowe zwyczajne postaci:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2\right)^2\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2\right)\tilde{\sigma}''_{\alpha\beta} = 0,\\
&\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2\right)\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2\right)\tilde{\mu}''_{\alpha 3} = 0, \qquad \varrho = \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Ogólną postać rozwiązania równań (3.25) z warunkami fizycznymi dla półprzestrzeni ($\sigma''_{\alpha\beta} \to 0$, $\mu''_{\alpha 3} \to 0$ dla $\sqrt{x_\alpha x_\alpha} \to 0$ przyjmujemy następująco:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}''_{\alpha\beta} = (A''_{\alpha\beta} + B''_{\alpha\beta}|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1} + C''_{\alpha\beta}e^{-\rho x_1},\\
&\tilde{\mu}''_{\alpha 3} = a''_{\alpha 3}e^{-|\xi|x_1} + b''_{\alpha 3}e^{-\rho x_1}.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Wielkości $A''_{\alpha\beta}$, $B''_{\alpha\beta}$, $C''_{\alpha\beta}$, $a''_{\alpha 3}$, $b''_{\alpha 3}$ jako funkcje parametru ξ wyznaczamy spełniając kolejno transformowane warunki (3.24), $(3.21)_3$, (3.22), (3.18), $(3.20)_1$. Przyrównując teraz w poszczególnych równaniach współczynniki przy odpowiednich wyrażeniach postaci $e^{-|\xi|x_1}$, $x_1 e^{-|\xi_1|x}$, $e^{-\rho x_1}$, otrzymujemy proste układy liniowych równań algebraicznych do wyznaczania wyżej wymienionych wielkości.

W ten sposób uzyskujemy rozwiązanie dla $\sigma''_{\alpha\beta}$, $\mu''_{\alpha 3}$ spełniające wszystkie równania wyszczególnione w sformułowaniu problemu. Ma ono postać:

$$\sigma''_{11}(x_\alpha; l) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\Big[(1-\Delta_0)(1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+ +2a_0\xi^2\Big(e^{-\varrho x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\Big)\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi,$$

$$(3.27)\qquad \sigma''_{22}(x_\alpha; l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\Big[(1-\Delta_0)(-1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1}+ +2a_0\xi^2\Big(e^{-\rho x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-|\xi|x_1}\Big)\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi,$$

$$\sigma''_{12}(x_\alpha; l) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\Big[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-|\xi|x_1}+ +2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}(e^{-\rho x_1}-e^{-|\xi|x_1})\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi,$$

$$\sigma''_{21}(x_\alpha; l) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\Big[(1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-|\xi|x_1}+ +2a_0\xi^2\frac{\xi}{\varrho}\Big(\frac{\varrho^2}{\xi^2}e^{-\rho x_1}-e^{-|\xi|x_1}\Big)\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi,$$

$$(3.27')\qquad \sigma''_{33}(x_\alpha; l) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1-i\xi x_2}d\xi,$$

oraz

$$(3.28)\qquad \begin{aligned}\mu''_{13}(x_\alpha; l) &= -\frac{2ia_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}\xi[(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1}-e^{-\rho x_1}]e^{-i\xi x_2}d\xi,\\ \mu''_{23}(x_\alpha; l) &= \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{p}}{\Delta_0}|\xi|\Big[(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1}-\frac{|\xi|}{\varrho}e^{-\rho x_1}\Big]e^{-i\xi x_2}d\xi.\end{aligned}$$

Oznaczyliśmy tu: $\tilde{p} = \tilde{p}(\xi)$, $\Delta_0 = \Delta_0(\xi) = 1+2a_0\xi^2\Big(1-\frac{|\xi|}{\varrho}\Big)$.

Ostatecznie rozkład naprężeń w półprzestrzeni uzyskujemy sumując $\sigma'_{\alpha\beta}$ z (3.13) i $\sigma''_{\alpha\beta}$ z (3.27) oraz $\mu'_{\alpha 3}$ z (3.16) i $\mu''_{\alpha 3}$ z (3.28).

Dla przypadku szczególnego [$\alpha = 0$] otrzymujemy rozwiązanie z klasycznej teorii sprężystości dane wzorami (3.13), (3.13'). Uzyskaliśmy zatem rozwiązanie złożone z dwóch części i spełniające nałożone na nie w punkcie 3 warunki, przy czym jest to rezultat zgodny z wynikami pracy W. NOWACKIEGO por. [7].

4. Równania przemieszczeniowe

Przejdźmy do równań przemieszczeniowych odpowiadających poszczególnym zagadnieniom (z «jedną» i «dwiema kreskami»). Dla «primowanego» zagadnienia z (1.2) po uwzględnieniu (2.1) i (3.3) uzyskujemy

$$\gamma'_{\alpha\beta} = u'_{\beta,\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta}\varphi'_3, \qquad \varkappa'_{\alpha 3} = \varphi'_{3,\alpha}. \tag{4.1}$$

Z założenia (3.4) wynika $(3.6')_1$ (tzn. $\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma'_{\beta\alpha}$) i dalej z (4.1) zależność

$$\varphi'_3 = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha}. \tag{4.2}$$

Widzimy, że φ'_3 pokrywa się teraz ze składową ω_3 wektora obrotu $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}$ dla płaskiego zagadnienia klasycznej teorii sprężystości. Podstawiając $(3.6)_1$ do równań równowagi (3.5) i uwzględniając pierwszą grupę związków z (4.1) oraz (4.2), uzyskujemy następujący układ równań różniczkowych w przemieszczeniach:

$$\mu u'_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda+\mu)e'_{,\alpha} = 0, \qquad e' = u'_{\beta,\beta} \tag{4.3}$$

oraz

$$\epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha cc} = 0. \tag{4.3'}$$

Warunki brzegowe (3.2) pozostają bez zmiany, tzn.

$$\sigma'_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \qquad \sigma'_{12}(0, x_2) = 0. \tag{4.4}$$

Równanie (4.3') wynika z równań (4.3), natomiast te ostatnie w połączeniu z (4.4) formułują problem klasycznej sprężystości (równania zgodności (3.7) po wprowadzeniu do nich związków (4.1) spełnione są tożsamościowo (por. [8]).

Przejdźmy do zagadnienia z «dwiema kreskami». Podstawiając związki (3.19) do równań równowagi (3.18) i uwzględniając

$$\gamma''_{\alpha\beta} = u''_{\beta,\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta}\varphi''_3, \qquad \varkappa''_{\alpha 3} = \varphi''_{3,\alpha} \tag{4.5}$$

otrzymujemy układ równań różniczkowych w przemieszczeniach — obrotach w postaci (związki (3.20) spełnione są tożsamościowo):

$$\begin{aligned} &(\mu+\alpha)u''_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu-\alpha)e''_{,\beta} + 2\alpha\epsilon_{\beta\gamma}\varphi''_{3,\gamma} = 0, \\ &(\gamma+\varepsilon)\varphi''_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha\varphi''_3 + 2\alpha\epsilon_{\alpha\beta}u''_{\beta,\alpha} = 0, \qquad e'' = u''_{\alpha,\alpha}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

z warunkami brzegowymi jak w (3.22), tzn.

$$\sigma''_{11}(0, x_2) = 0, \qquad \sigma''_{12}(0, x_2) = 0, \qquad \mu''_{13}(0, x_2) = -2a_0\frac{d}{dx_2}p(x_2). \tag{4.7}$$

Rezultat końcowy w przemieszczeniach i obrotach uzyskujemy zestawiając

$$u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \qquad \varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi''_3. \tag{4.8}$$

Ostatecznie więc uzyskaliśmy sformułowanie problemu przedstawionego na początku [zarówno w naprężeniach, jak i w przemieszczeniach — obrotach], które składa się ze sformułowania (analogicznego problemu do rozpatrywanego) wynikającego z klasycznej teorii sprężystości oraz sformułowania uzupełniającego.

Rozpatrzmy pokrótce zagadnienie termosprężyste. W tym przypadku należy wyjść z podstawowych równań mikropolarnej termosprężystości dla zagadnienia stacjonarnego (por. [1] lub prace źródłowe [9]). Dla zagadnienia płaskiego równania równowagi i związki geometrycznej zgodności pokrywają się odpowiednio z (2.4) i (2.6), natomiast prawo konstytutywne określają zależności

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= (\mu+\alpha)\gamma_{\alpha\beta} + (\mu-\alpha)\gamma_{\beta\alpha} + (\lambda\gamma_{\gamma\gamma} - \nu\theta)\delta_{\alpha\beta}, \\ \mu_{\alpha3} &= (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{\alpha3}, \qquad \sigma_{33} = \lambda\gamma_{\gamma\gamma} - \nu\theta. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Postępowanie analogiczne do przeprowadzonego w punkcie 3 pracy prowadzi do układów równań w przemieszczeniach — obrotach, które kolejno omówimy.

Dla zagadnienia klasycznej termosprężystości [por. [8]]

$$\mu u'_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu)e'_{,\beta} = \nu\theta_{,\beta}, \tag{4.10}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha\varepsilon\varepsilon} = 0. \tag{4.10'}$$

W (4.9) i (4.10) $\nu = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, natomiast α_t jest termicznym współczynnikiem liniowej rozszerzalności ośrodka. Temperaturę θ wyznaczamy z równania przewodnictwa cieplnego

$$\theta_{,\alpha\alpha} = -\frac{W}{\lambda_0}, \tag{4.11}$$

gdzie W oznacza intensywność źródeł ciepła, λ_0 — współczynnik przewodnictwa cieplnego. Dla wyznaczenia wielkości u''_α i φ''_3 otrzymujemy jednorodny układ równań różniczkowych identyczny z układem (4.6).

Jeżeli wyjściowe warunki brzegowe mają postać:

$$\sigma_{1\alpha}(0,x_2) = -p_\alpha(x_2), \qquad \mu_{13}(0,x_2) = 0, \tag{4.12}$$

dla obciążeń mechanicznych oraz

$$\theta(0,x_2) = f(x_2), \tag{4.12'}$$

dla temperatury, to wówczas rozwiązujemy równanie przewodnictwa cieplnego (4.11) z warunkiem (4.12'), a następnie znaną funkcję θ wprowadzamy do układu równań (4.10) i układ ten rozwiązujemy z warunkami brzegowymi

$$\sigma'_{1\alpha}(0,x_2) = -p_\alpha(x_2). \tag{4.13}$$

Dla układu równań z u''_α i φ''_3, tzn. dla (4.6) otrzymujemy warunki brzegowe typu (4.7) (tylko $\mu''_{13}(0,x_2) \neq 0$) i teraz wystarczy, w celu uzyskania pełnego rozwiązania, dodać do uzyskanego rozwiązania klasycznego rozwiązanie problemu brzegowego mikropolarnej sprężystości danego wzorami (3.27), zastępując tam jednak $p(x_2)$ odpowiednio dobranym $p^*(x_2)$.

Rozpatrzmy przykładowo półprzestrzeń ogrzaną na brzegu [warunek (4.12')] i wolną od obciążeń mechanicznych. Załóżmy ponadto brak źródeł ciepła w półprzestrzeni. Wówczas rozkład temperatury określa całka

$$\theta(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi, \tag{4.14}$$

natomiast rozkład naprężeń w przestrzeni uzyskujemy sumując rozwiązanie klasyczne

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= 0, \\ \sigma'_{33}(x_1, x_2) &= -\frac{\nu\mu}{\lambda+\mu}\theta(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{4.15}$$

z rozwiązaniem danym wzorami (3.27) i (3.27') oraz sumując

$$\begin{aligned} \mu'_{13}(x_1, x_2) &= 2\mu m a_0 i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) \xi e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi, \\ \mu'_{23}(x_1, x_2) &= -2\mu m a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) |\xi| e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi, \end{aligned} \tag{4.16}$$

z rozwiązaniem danym wzorami (3.28), przy czym za obciążenie $p(x_2)$ w (3.27), (3.27') i (3.28) podstawiamy teraz

$$p(x_2) = p^*(x_2) = -\mu m f(x_2), \qquad m = \frac{\nu}{\lambda+2\mu}, \tag{4.17}$$

otrzymując rezultat zgodny z rozwiązaniem tego zagadnienia w pracach [7], [10].

Dla przypadku, gdy w zagadnieniu występują «obciążenia» masowe, tzn.

$$\mathbf{X}(X_1, X_2, 0), \mathbf{Y}(0, 0, Y_3), \tag{4.18}$$

gdzie $\mathbf{X}$ jest wektorem sił masowych, $\mathbf{Y}$ — wektorem momentów masowych, pozostaje w mocy komplet równań z punktu 2 [(2.1)÷(2.8)], z wyjątkiem równań równowagi (2.4), które teraz mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\alpha} + X_\beta &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha 3,\alpha} + Y_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Uzyskujemy stąd klasyczne sformułowanie naprężeniowe (por. [8]), tj. związki $(3.6)_1$, $(3.8)_1$ i równania równowagi

$$\sigma'_{\alpha\beta,\alpha} + X_\beta = 0. \tag{4.20}$$

Także

$$\mu'_{\alpha 3,\alpha} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}\epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = 0 \tag{4.20'}$$

w połączeniu ze związkami $(3.6)_2$ i $(3.8)_3$. Natomiast dla $\sigma''_{\alpha\beta}$ i $\mu''_{\alpha 3}$ uzyskujemy tu niejednorodny układ równań różniczkowych w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\sigma''_{\alpha\beta,\alpha} = 0,\\
(4.21)\qquad &\epsilon_{\alpha\beta}\sigma''_{\alpha\beta} + \mu''_{\alpha 3,\alpha} + Y_3 - \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}\epsilon_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha} = 0,
\end{aligned}
$$

który łączymy ze związkami (3.19), (3.20) i odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Przechodząc do sformułowania w przemieszczeniach i obrotach otrzymujemy odpowiednio:

$$(4.22)\qquad \mu u'_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu)e'_{,\beta} + X_\beta = 0,$$

$$(4.22')\qquad \epsilon_{\alpha\beta}(\mu u'_{\beta,\alpha\varepsilon\varepsilon} + X_{\beta,\alpha}) = 0,$$

jak dla teorii klasycznej (por. [8]) [przy czym równanie (4.22') wynika z równań (4.22)] oraz niejednorodny układ równań dla u''_α i φ''_3

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)u''_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu-\alpha)e''_{,\beta} + 2\alpha\epsilon_{\beta\gamma}\varphi''_{3,\gamma} = 0,\\
(4.23)\qquad &(\gamma+\varepsilon)\varphi''_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha\varphi''_3 + 2\alpha\epsilon_{\alpha\beta}u''_{\beta,\alpha} + Y_3 - \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu}\epsilon_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha} = 0.
\end{aligned}
$$

Rozpatrzymy przykładowo działanie «obciążeń» masowych w postaci siły skupionej umieszczonej w początku układu współrzędnych (w przestrzeni nieskończonej — zagadnienie płaskie). Wówczas

$$(4.24)\qquad X_1 = P\delta(x_1)\delta(x_2), \qquad X_2 = Y_3 = 0,$$

gdzie $\delta(\ldots)$ jest funkcją Diraca.

Z równań (4.22) wyznaczamy równanie dla dylatacji

$$(4.25)\qquad e'_{,\alpha\alpha} = -\frac{1}{2\mu+\lambda}X_{1,1},$$

oraz rozseparowane równania dla u'_1 i u'_2:

$$
\begin{aligned}
&u'_{1,\alpha\alpha\beta\beta} = -\frac{1}{2\mu+\lambda}X_{1,11} - \frac{1}{\mu}X_{1,22},\\
(4.26)\qquad &\\
&u'_{2,\alpha\alpha\beta\beta} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+\lambda)}X_{1,12}.
\end{aligned}
$$

Z (4.22') przy uwzględnieniu (4.2) otrzymujemy równanie dla $\varphi'_3 = \omega_3$, mianowicie

$$(4.27)\qquad \varphi'_{3,\alpha\alpha} = \frac{1}{2\mu}X_{1,2}.$$

Wprowadźmy podwójną transformację Fouriera

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int f(x_1,x_2)e^{i\xi_\alpha x_\alpha}dx_1\,dx_2,\\
(4.28)\qquad &\\
&f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{f}(\xi_1,\xi_2)e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}d\xi_1\,d\xi_2
\end{aligned}
$$

oraz przepiszmy z pracy [7] oznaczenia i wartości dla następujących całek:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}}{(\xi_1^2+\xi_2^2)}d\xi_1 d\xi_2 = -(C+\ln r),\\
I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}}{\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\dfrac{1}{l^2}\right)} d\xi_1 d\xi_2 = K_0\left(\frac{r}{l}\right), \qquad (4.29)\\
I_3 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{r^2}{4}(C+\ln r),
\end{aligned}
$$

gdzie $r = \sqrt{x_\alpha x_\alpha}$, C jest stałą Eulera, $K_0(z)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju (funkcja Mac Donalda). Całka I_3 obliczona jest w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Całki I_1, I_2 obliczono według prac [11], [12].

Wykonując transformacje $(4.28)_1$ na równaniach (4.26), (4.27) oraz na warunku (4.24), otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1' &= \frac{1}{2\mu+\lambda}\frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\tilde{X}_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\tilde{X}_1,\\
\tilde{u}_2' &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{\xi_1\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\tilde{X}_1, \qquad (4.30)\\
\tilde{\varphi}_3' &= \frac{i}{2\mu}\frac{\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)}\tilde{X}_1,
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{X}_1 = \frac{P}{2\pi}. \qquad (4.31)
$$

Podstawiając (4.31) do (4.30) i wykonując transformację odwrotną, wyrażamy u_1', u_2', φ_3' poprzez całki I_1, I_2, I_3 z (4.29), mianowicie

$$
\begin{aligned}
u_1' &= -\frac{P}{2\pi(2\mu+\lambda)}I_{3,11} - \frac{P}{2\pi\mu}I_{3,22},\\
u_2' &= \frac{P(\lambda+\mu)}{2\pi\mu(2\mu+\lambda)}I_{3,12}, \qquad (4.32)\\
\varphi_3' &= -\frac{P}{4\pi\mu}I_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Z równań (4.23) otrzymujemy odpowiednio dla dylatacji równanie Laplace'a

$$
e''_{,\alpha\alpha} = 0, \qquad (4.33)
$$

zaś dla u_1'', u_2'' i φ_3'' równania w postaci:

$$
\begin{aligned}
(l^2 u''_{1,\alpha\alpha} - u''_1)_{,\delta\delta\gamma\gamma} &= \frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu^2} X_{1,22\beta\beta}, \\
(l^2 u''_{2,\alpha\alpha} - u''_2)_{,\delta\delta\gamma\gamma} &= -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu^2} X_{1,12\beta\beta}, \qquad (4.34)\\
(l^2 \varphi''_{3,\alpha\alpha} - \varphi''_3)_{,\delta\delta} &= -\frac{l^2}{2\mu} X_{1,2\beta\beta}.
\end{aligned}
$$

W celu wyznaczania u_1'', u_2'', φ_3'' w przcstrzeni nieskończonej wystarczy wyznaczyć rozwiązanie szczególne równań (4.34), tzn. znaleźć rozwiązanie dla równań:

$$
\begin{aligned}
(l^2 u''_{1,\alpha\alpha} - u''_1)_{,\delta\delta} &= \frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu^2} X_{1,22}, \\
(l^2 u''_{2,\alpha\alpha} - u''_2)_{,\delta\delta} &= -\frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu^2} X_{1,12}, \qquad (4.35)\\
l^2 \varphi''_{3,\alpha\alpha} - \varphi''_3 &= -\frac{l^2}{2\mu} X_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Transformujemy równania (4.35) otrzymując odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}''_1 &= -\frac{\alpha}{\mu(\mu+\alpha)} \frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\frac{1}{l^2}\right)} \tilde{X}_1, \\
\tilde{u}''_2 &= \frac{\alpha}{\mu(\mu+\alpha)} \frac{\xi_1\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\frac{1}{l^2}\right)} \tilde{X}_1, \qquad (4.36)\\
\tilde{\varphi}''_3 &= -\frac{i}{2\mu} \frac{\xi_2}{\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\frac{1}{l^2}\right)} \tilde{X}_1.
\end{aligned}
$$

Podstawiamy do zależności (4.36) wartość $\tilde{X}_1$ z (4.31), a następnie wyrażenia $\dfrac{\xi_2^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\frac{1}{l^2}\right)}$, $\dfrac{\xi_1\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\frac{1}{l^2}\right)}$ rozkładamy na ułamki proste i po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
u''_1 &= \frac{P}{2\pi} \frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu^2} (I_1 - I_2)_{,22}, \\
u''_2 &= -\frac{P}{2\pi} \frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu^2} (I_1 - I_2)_{,12}, \qquad (4.37)\\
\varphi''_3 &= \frac{P}{4\pi\mu} I_{2,2}.
\end{aligned}
$$

Rezultat klasyczny przedstawiają wzory (4.32), natomiast dla ośrodka mikropolarnego otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \qquad \varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi''_3, \tag{4.38}$$

co prowadzi do rezultatu:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -\frac{P}{2\pi\mu}\left[\frac{\mu}{2\mu+\lambda} I_{3,11} + I_{3,22} - \frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu}(I_1 - I_2)_{,22}\right], \\ \mu_2(x_1, x_2) &= \frac{P}{2\pi\mu}\left[\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda} I_3 - \frac{\gamma+\varepsilon}{4\mu}(I_1 - I_2)\right]_{,12}, \\ \varphi_3(x_1, x_2) &= -\frac{P}{4\pi\mu}(I_1 - I_2)_{,2}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

W powyższy sposób uzyskujemy również rozwiązania dla siły masowej w postaci $X_2 = S\delta(x_1)\delta(x_2)$ oraz dla skupionego momentu masowego w postaci $Y_3 = M\delta(x_1)\delta(x_2)$, przy czym otrzymane rezultaty zgodne są z wynikami cytowanej pracy [7].

W pracy [6] do równań równowagi w przemieszczeniach i obrotach (1.6) wprowadza się wektor $\boldsymbol{\zeta}$ za pomocą następującego podstawienia:

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}, \tag{4.40}$$

co dla przypadku płaskiego prowadzi do

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\alpha} u_{\beta,\alpha} - \zeta_3 . \tag{4.40'}$$

Wówczas układ równań (1.6) przechodzi w układ

$$\begin{aligned} \mu u_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu)e_{,\beta} &= 2\alpha\epsilon_{\beta\gamma}\zeta_{3,\gamma}, \\ \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\epsilon_{\alpha\beta}u_{\beta,\alpha\varepsilon\varepsilon} &= (\gamma+\varepsilon)\zeta_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha\zeta_3 . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Przyjmując następnie rozwiązanie w postaci

$$u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \quad \zeta_3 = \zeta'_3 + \zeta''_3 \text{ oraz } \zeta'_3 = 0, \tag{4.42}$$

otrzymujemy z (4.41) dwa następujące układy równań:

$$\begin{aligned} \mu u'_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu)e'_{,\beta} &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha\varepsilon\varepsilon} &= 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mu u''_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda+\mu)e''_{,\beta} &= 2\alpha\epsilon_{\beta\gamma}\zeta''_{3,\gamma}, \\ \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon)\epsilon_{\alpha\beta}u''_{\beta,\alpha\varepsilon\varepsilon} &= (\gamma+\varepsilon)\zeta''_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha\xi''_3 . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Układ (4.43) związany jest z klasyczną teorią sprężystości, natomiast układ (4.44) daje nam rozwiązanie uzupełniające uwzględniające efekty brzegowe.

Zauważmy, że układy równań w przemieszczeniach i w przemieszczeniach — obrotach, które uzyskaliśmy w tej pracy z równań naprężeniowych, tzn. układ (4.3) i (4.6), pokrywają się odpowiednio z układami $(4.43)_1$ i (4.44). Wystarczy tylko w (4.44) podstawić

$$\zeta_3'' = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}u_{\beta,\alpha}'' - \varphi_3'' . \tag{4.45}$$

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Theory of non-symmetric elasticity* [in Polish], PWN, Warszawa 1971.
2. E. V. KUVSHINSKI, E. L. AERO, *Continuum theory of asymmetric elasticity* [in Russian], Phis. Tverd. Tela, 5 (1963).
3. M. A. PALMOV, *Fundamental equations of asymmetric elasticity* [in Russian], Prikl. Mat. Mekh., **28** (1964).
4. N. SANDRU, *On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., **4**, 1 (1966).
5. Z. OLESIAK, *Stress differential equations of the micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., **18**, 5 (1970).
6. H. SCHAEFER, *Das Cosserat-Kontinuum*, ZAMM, 8, **47** (1967).
7. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. of Mech., **23**, 5 (1971).
8. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
9. W. NOWACKI, *Couples-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., Part I, II, **14**, 3 (1966): Part III, **14**, 8 (1966).
10. W. NOWACKI, *The plane problem of micropolar thermoelasticity*, Arch. of Mech., **22**, 1 (1970).
11. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
12. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in partial differential equations*, Yale Univeristy Press, 1923.

Резюме

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

На примере плоской задачи, описываемой векторами $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$, $\varphi(0, 0, \varphi_3)$ (см. работу [7]). рассмотрен некоторый способ решения статических задач линейной несимметричной теории упругости, состоящий в наложении решения для аналогичной классической задачи и дополняющего решения. В качестве исходных зависимостей приняты формулы для напряжений в плоской задаче, приведенные в работе [7].

Summary

ON A CERTAIN METHOD OF SOLUTION OF STATIC PROBLEMS OF THE LINEAR THEORY OF NON-SYMMETRIC ELASTICITY

The plane strain problem represented by the vectors $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$, $\varphi(0, 0, \varphi_3)$ serves as an example to demonstrate the method of solution of static problems of the linear theory of non-symmetric elasticity. The method consists in assuming the solution in a form of a sum of the classical solution and a complementary solution. The considerations are based on the stress equations of the two-dimensional problem presented in [7].

INSTYTUT MECHANIKI
UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1972 r.